Gaodeng Shuxue

◇ Tongbu Fudao ◇

高等数学

同步辅导

下册

主　编　张红雷　王　峰

副主编　姜英姿　焦　琳

中国矿业大学出版社

China University of Mining and Technology Press

高等数学同步辅导

下 册

主　编　张红雷　王　峰
副主编　姜英姿　焦　琳

中国矿业大学出版社

内 容 简 介

本书是学习高等数学的辅助教材，内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等十二章内容.其中每章包括基本要求、知识结构、内容提要、释疑解难、典型例题、习题选解、自测试题、自测试题答案八部分.本书按一般高等数学内容的编排顺序，与教学要求保持同步.编写本书的目的是使学生在学习主教材的基础上，进一步开阔眼界、拓展思路、多实践、多练习，以提高分析问题和解决问题的能力.本书可以作为工科和经济管理类学生学习高等数学的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导.下册/张红雷，王峰主编.—徐州：中国矿业大学出版社，2009.9

ISBN 978-7-5646-0468-4

Ⅰ.高… Ⅱ.①张…②王… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 156411 号

书　　名	高等数学同步辅导・下册
主　　编	张红雷　王　峰
责任编辑	仓小金　潘俊成
出版发行	中国矿业大学出版社(江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008)
营销热线	(0516)83885307　83884995
网　　址	http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com
排　　版	中国矿业大学出版社排版中心
印　　刷	徐州中矿大印发科技有限公司
经　　销	新华书店
开　　本	787×1092　1/16　**本册印张** 12　**本册字数** 300 千字
版次印次	2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷
总 定 价	45.00 元(上、下册)

(图书出现印装质量问题，本社负责调换)

目　录

第八章　空间解析几何与向量代数

一、基本要求

(1) 理解空间直角坐标系，掌握两点间的距离公式；

(2) 掌握向量概念及向量的线性运算、数乘向量、向量的数量积和向量积，掌握向量的坐标表达式，两向量平行、垂直的条件，能熟练地运用坐标表达式进行向量运算；

(3) 熟悉空间平面和直线的方程及其求法；

(4) 掌握球面方程、以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程，对常见的二次曲面方程，能说出名称并画出图形；

(5) 了解空间曲线的一般方程.

二、知识结构

- 向量代数
  - 向量及其线性运算
  - 数量积、向量积、混合积
    - 定义
    - 坐标表示
- 平面、直线
  - 空间平面及其方程
    - 点法式
    - 一般式
    - 截距式
  - 空间直线及其方程
    - 一般式
    - 对称式
    - 参数式
- 曲面、曲线
  - 曲面及其方程
    - 一般式
    - 旋转曲面
    - 母线平行于坐标轴的柱面
    - 二次曲面
  - 空间曲线及其方程
    - 一般式
    - 参数式
    - 在坐标平面上的投影曲线
- 相关位置
  - 直线间的位置关系、平面间的位置关系、直线与平面间的位置关系
  - 两直线的夹角、两平面的夹角、直线与平面的夹角
  - 平面束

三、内容提要

（一）向量及其运算

1. 向量的基本概念

（1）向量的定义

既有大小，又有方向的量，称为向量或矢量.

（2）向量的模

向量的大小称为向量的模，用 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示向量的模.

（3）单位向量

模为 1 的向量称为单位向量.

（4）零向量

模为 0 的向量称为零向量，零向量的方向是任意的.

（5）向量的相等

大小相等且方向相同的向量称为相等的向量.

（6）自由向量

在空间任意地平行移动后不变的向量，称为自由向量.

（7）向径

终点为 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的向径.

2. 向量的线性运算

（1）向量的加法

① 三角形法则

若将向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点与向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种求向量和的方法称为向量加法的三角形法则.

② 平行四边形法则

将两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，并以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，则从起点到对角顶点的向量称为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种求向量和的方法称为向量加法的平行四边形法则.

向量的加法满足下列运算律：

交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

（2）向量与数的乘法运算

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与数 λ 的乘积，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，并且有：

① $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

② 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；

③ 当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量.

设 λ,μ 都是实数，向量与数的乘法满足下列运算律：

结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$；

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法运算和向量与数的乘法运算统称为向量的线性运算.

(3) 求与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量的方法

设向量 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，则与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

(4) 负向量

当 $\lambda=-1$ 时，记 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$，则 $-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，模相等，$-\boldsymbol{a}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量.

(5) 向量的减法

两向量的减法（即向量的差）规定为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}$.

向量的减法也可按三角形法则进行，只要把 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 即是以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量.

3. 空间直角坐标系

在空间，x 轴、y 轴和 z 轴相互垂直且相交于一点 O，一般将 x 轴和 y 轴放置在水平面上，z 轴垂直于水平面. z 轴的正向按右手法则确定：伸出右手，让四指与大拇指垂直，并使四指先指向 x 轴的正向，然后让四指沿握拳方向旋转 $90°$ 指向 y 轴的正向，这时大拇指所指的方向就是 z 轴的正向. 这样就组成了右手空间直角坐标系 $Oxyz$. 在此空间直角坐标系中，x 轴称为横轴，y 轴称为纵轴，z 轴称为竖轴，O 称为坐标原点；每两轴所确定的平面称为坐标平面，简称坐标面. x 轴与 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 坐标面，类似地有 yOz 坐标面，zOx 坐标面. 这些坐标面把空间分为 8 个部分，每一部分称为一个卦限.

在空间直角坐标系中建立了空间的一点 M 与一组有序数 (x,y,z) 之间的一一对应关系. 有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标；x,y,z 分别称为 x 坐标、y 坐标、z 坐标.

4. 利用向量作向量的线性运算

(1) 基本单位向量

$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为与 x 轴，y 轴，z 轴同向的单位向量.

(2) 向径的坐标表示

点 $P(a_1,a_2,a_3)$ 的向径 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标表达式为

$$\overrightarrow{OP}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},$$

或简记为

$$\overrightarrow{OP}=(a_1,a_2,a_3).$$

(3) $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示

设以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，以 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表达式为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

(4) 向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ 的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则有

① $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}$

② $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k}$

③ $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})=\lambda a_1\boldsymbol{i}+\lambda a_2\boldsymbol{j}+\lambda a_3\boldsymbol{k}$

(二) 向量的数量积和向量积

1. 向量的数量积

(1) 定义

设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则称 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$. 向量的数量积又称点积或内积.

向量的数量积满足下列运算律：

交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$；

结合律：$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$（其中 λ 为常数）.

(2) 数量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

(3) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

(4) 向量的方向余弦

设向量 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴的正向夹角分别为 $\alpha,\beta,\gamma(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$，称其为向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个方向角，并称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦的坐标表示为

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\quad\cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\quad\cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},$$

且
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

2. 向量的向量积

(1) 定义

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积是一个向量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的模和方向分别规定如下：

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 θ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角；

② $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向为既垂直于 $\boldsymbol{a}$ 又垂直于 $\boldsymbol{b}$，并且按顺序 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手法则.

向量的向量积满足如下运算律：

反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$；

结合律：$\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$（其中 λ 为常数）.

(2) 向量积的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}.$$

可将 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 表示成一个三阶行列式的形式，计算时，只需将其按第一行展开即可. 即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$

3. 三个重要结论

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$.

(1) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3$;

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$;

(3) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$($\lambda\neq0$ 为常数).

其中,"$\Leftrightarrow$"表示"充分必要条件".

(三) 曲面及其方程

1. 曲面方程

如果曲面Σ上每一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$,则称方程 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 Σ的方程,称曲面Σ 为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

2. 旋转曲面

(1) 定义

一平面曲线 C 绕与其在同一平面上的直线 L 旋转一周所形成的曲面称为旋转曲面,曲线 C 称为旋转曲面的母线,直线 L 称为旋转曲面的轴.

(2) 母线在坐标面上,绕某个坐标轴旋转所形成的旋转曲面

设在 yOz 坐标面上有一条已知曲线C,它在 yOz 坐标面上的方程是 $f(y,z)=0$,母线 C 绕 z 轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$. 由此可见,只要在 yOz 坐标面上曲线 C 的方程 $f(y,z)=0$ 中把 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$,就可得到曲线 C 绕 z 轴旋转的旋转曲面方程. 同理,曲线 C 绕 y 轴旋转的旋转曲面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

对于其他坐标面上的曲线,用上述方法可得到绕此坐标平面上任何一条坐标轴旋转所生成的旋转曲面.

3. 柱面

直线L沿定曲线C平行移动所形成的曲面称为柱面. 定曲线C称为柱面的准线,动直线 L 称为柱面的母线.

如果柱面的准线 C 在 xOy 坐标面上的方程为 $f(x,y)=0$,那么以 C 为准线,母线平行于 z 轴的柱面方程就是 $f(x,y)=0$;同样的,方程 $g(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面;方程 $h(x,z)=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面. 一般的,在空间直角坐标系中,含有两个变量的方程就是柱面方程,且在其方程中缺哪个变量,此柱面的母线就平行于哪一个坐标轴.

例如,方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $x^2-2py=0$ 分别表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面、双曲柱面和抛物柱面.

4. 二次曲面

在空间直角坐标系中,如果 $F(x,y,z)=0$ 是二次方程,则它的图形称为二次曲面. 下面给出几种常见的二次曲面方程.

(1) 球面方程

以 $P_0(x_0,y_0,z_0)$为球心,R 为球半径的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

(2) 圆柱面方程

设一个圆柱面的母线平行于 z 轴，准线 C 是在 xOy 坐标面上的以原点为圆心，R 为半径的圆，即准线 C 在 xOy 坐标面上的方程为 $x^2+y^2=R^2$，则该圆柱面方程为

$$x^2+y^2=R^2.$$

(3) 锥面方程

顶点在原点，对称轴为 z 轴的圆锥面方程为

$$z^2=k^2(x^2+y^2)\quad (k\neq 0\text{ 为常数}).$$

(4) 抛物面方程

抛物面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz\quad (a>0,b>0,p>0)$$

当 $a=b$ 时，原方程化为 $x^2+y^2=2qz(q>0$，其中 $q=a^2p)$，它由抛物线绕 z 轴旋转而成，称为旋转抛物面.

(5) 椭球面方程

椭球面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\quad (a>0,b>0,c>0),$$

其中，a,b,c 称为椭球面的半轴.

(四) 空间曲线及其方程

1. 空间曲线的一般方程

可将曲线看成两曲面的交线.

方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 称为空间曲线的一般方程，如 $\begin{cases}z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\\\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2.\end{cases}$

2. 空间曲线的参数方程

可将曲线看成动点的轨迹.

方程组 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ 称为空间曲线的参数方程，如 $\begin{cases}x=a\cos\omega t\\y=a\sin\omega t\\z=vt.\end{cases}$

3. 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，过曲线 C 上的每一点作 xOy 坐标面的垂线，这些垂线形成了一个母线平行于 z 轴的柱面，称为曲线 C 关于 xOy 坐标面的投影柱面. 这个柱面与 xOy 坐标面的交线称为曲线 C 在 xOy 坐标面的投影曲线，简称为投影.

在方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中消去变量 z，得

$$H(x,y)=0.$$

方程 $H(x,y)=0$ 就是曲线 C 关于 xOy 坐标面的投影柱面方程. 它与 xOy 坐标面的交线

$$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$$

就是曲线 C 在 xOy 坐标面的投影曲线方程.

(五) 平面及其方程

1. 平面的点法式方程

如果一非零向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于平面 π,则称此向量为该平面的法向量.过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法向量的点法式平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\quad (A,B,C\text{ 至少有一个不为零}).$$

2. 平面的一般式方程

以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法向量的一般式平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0\quad (A,B,C\text{ 至少有一个不为零}).$$

3. 平面 π_1 与 π_2 的夹角

(1) 夹角公式

平面 π_1 与 π_2 的夹角 θ,即为两个平面法向量夹角,

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\quad \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

(2) 两个平面的位置关系

设两个平面 π_1 与 π_2 的方程分别为

$$\pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

其法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$,$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$,有如下结论:

① $\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;

② $\pi_1/\!/\pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$;

③ π_1 与 π_2 重合 $\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

4. 点到平面的距离

点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式为

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(六) 空间直线及其方程

1. 直线的一般式方程

若直线 L 作为平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的交线,则该直线 L 的一般式方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2Z+D_2=0\end{cases}$$

其中,A_1、B_1、C_1 与 A_2、B_2、C_2 不成比例.

2. 直线的对称式方程与参数方程

如果一个非零向量 $\boldsymbol{s}$ 平行于直线 L,则称 $\boldsymbol{s}$ 为直线 L 的方向向量.

(1) 直线的对称式方程

设直线 L 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\boldsymbol{s}=(a,b,c)$ 为方向向量,则直线 L 的对称式方程(也

称为点向式方程)为

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

(2) 直线的参数方程

设直线 L 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\boldsymbol{s}=(a,b,c)$ 为方向向量,则直线 L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$$

其中,t 为参数.

3. 两直线的夹角

(1) 两直线方向向量的夹角 $\theta\left(取\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$称为两直线的夹角.

(2) 两直线 $L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$,$L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$的夹角余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

(3) 两直线互相垂直$\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$,

两直线互相平行$\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

4. 直线与平面的夹角

(1) 直线和它在平面上的投影直线间的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$称为直线与平面的夹角.

(2) 直线$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 夹角 φ 的正弦为

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{s}|}.$$

(3) 直线 L 与平面 π 垂直$\Leftrightarrow\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 平行$\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$;

直线 L 与平面 π 平行$\Leftrightarrow\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直$\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

四、释疑解难

问题 1 向量之间能比较大小吗?

答:不能.向量是既有大小,又有方向的量.而方向无所谓大小,在向量的描述中所讲"既有大小"是指向量的模的大小.

问题 2 命题"若 $\boldsymbol{a}\neq0$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 或 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$"是真命题吗?

答:不是.在数量积及向量积运算中向量的这种消去律不能成立.

如:若取 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,1,0)$,$\boldsymbol{c}=(0,1,1)$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,但是 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

问题 3 是否所有的三元二次方程都表示曲面?

答:不一定.我们知道,三元二次方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面称为二次曲面,锥面、椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、椭圆抛物面、双曲抛物面及以二次曲线为准线的柱面等曲面均为二次曲面.但是,三元二次方程的图形不总是曲面,有时会出现"退化"情况,有可能表

示曲线甚至点. 例如，方程 $x^2+y^2+4z^2-2x-4y-8z+9=0$，即 $(x-1)^2+(y-2)^2+4(z-1)^2=0$，它仅表示一个点(1,2,1).

五、典型例题

【题型一】 向量的运算

例 1 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-6\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=8(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，试证 A、B、D 共线.

证明 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(-6\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b})+8(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BD}$，它们又都过 B 点，故 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BD}$ 共线，即 A、B、D 三点共线.

例 2 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

解 由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$ 得

$$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0,$$

又
$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1,$$

所以
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=-\frac{3}{2}.$$

例 3 已知三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 两两都不平行，但 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，试证：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$.

证明 由于 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，故存在实数 λ_1，λ_2 使得

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\lambda_2\boldsymbol{a}\end{cases}$$

两式相减得
$$(1+\lambda_2)\boldsymbol{a}=(1+\lambda_1)\boldsymbol{c}.$$

由于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{c}$ 不平行，且皆不为零向量，只有 $1+\lambda_2=0$，$1+\lambda_1=0$，故 $\lambda_1=\lambda_2=-1$.

因此 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，于是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$.

例 4 证明向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ 垂直.

证明 因为 $[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$

所以向量 $\boldsymbol{c}$ 与向量 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ 垂直.

例 5 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，求 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.

(1995 年数学(一)、(二)考研题)

解
$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})&=[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4.\end{aligned}$$

例 6 求由下列三点决定的三角形的面积 S：

(1) $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$，$C(2,4,7)$；

(2) $A'(-2,-1,-3)$，$B'(-1,-2,0)$，$C'(0,-3,3)$.

解 因为两向量的向量积的模，在数值上等于以这两个向量为相邻边组成的平行四边形的面积，所以

(1) $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\sqrt{14}$.

(2) $\overrightarrow{A'B'}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,$\overrightarrow{A'C'}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$.

$$\overrightarrow{A'B'}\times\overrightarrow{A'C'}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & -2 & 6\end{vmatrix}=0,$$

所以$\triangle A'B'C'$的面积$S'=\frac{1}{2}|\overrightarrow{A'B'}\times\overrightarrow{A'C'}|=0$.

说明 ① 三点共线,则由它们所组成的两个向量的向量积为零向量,因而由此三点所决定的三角形面积为0,这是判断三点共线的常用方法.

② 此题解法表明,在求三角形或平行四边形的面积时,将相邻两边作为向量,再求两向量的向量积的模,即可得到面积.

例7 设$|\boldsymbol{a}|=4$,$|\boldsymbol{b}|=3$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{6}$,求以向量$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积.

解 所求面积$S=|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|=5|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|=5|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{6}=30$.

例8 设$\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$,$\boldsymbol{c}=(2,1,2)$,向量$\boldsymbol{r}$满足$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$,$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{r}=14$,求$\boldsymbol{r}$.

解 设$\boldsymbol{r}=(r_x,r_y,r_z)$,

因为$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}$所以$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=0$,故 $2r_x-3r_y+r_z=0$ ①

因为$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$所以$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}=0$,故 $r_x-2r_y+3r_z=0$ ②

因为$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{r}=14$,所以$\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=14$,故 $2r_x+r_y+2r_z=42$ ③

由①,②,③得 $r_x=14,r_y=10,r_z=2$,

所以 $\boldsymbol{r}=(14,10,2)$.

例9 向量$\boldsymbol{c}$垂直于向量$\boldsymbol{a}=(2,3,-1)$和$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$并满足$\boldsymbol{c}\cdot(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=-6$,求向量$\boldsymbol{c}$.

解 设$\boldsymbol{c}=(x,y,z)$,则有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=7\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}.$$

由$\boldsymbol{c}/\!/(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$得 $\frac{x}{7}=\frac{y}{-7}=\frac{z}{-7}$,

又$\boldsymbol{c}\cdot(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=-6$即$2x-y+z=-6$,得$x=-3$,$y=z=3$,向量$\boldsymbol{c}=(-3,3,3)$.

例10 已知$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$与$7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$垂直,且$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$与$7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$垂直,求$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的夹角.

解 设$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的夹角为θ,由于$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$与$7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$垂直,所以有

$$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2$$
$$=7|\boldsymbol{a}|^2+16|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta-15|\boldsymbol{b}|^2=0. \quad ①$$

由于$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$与$7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$垂直,所以有

$$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{ab}+8|\boldsymbol{b}|^2$$
$$=7|\boldsymbol{a}|^2-30|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta+8|\boldsymbol{b}|^2=0. \quad ②$$

由①,②得 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{2|\boldsymbol{a}|}$, ③

将③代入①,得 $|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2$,故 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$, ④

由③,④得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2},\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

例 11　设向量 $\overrightarrow{AB}=4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 的终点 B 的坐标为 $(2,-1,7)$. 求:(1) 始点 A 的坐标;(2) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模;(3) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦;(4) 与向量 $\overrightarrow{AB}$ 方向一致的单位向量.

解　(1) 设始点 A 的坐标为 (x,y,z),则有 $2-x=4,-1-y=-4,7-z=7$,得 $x=-2,y=3,z=0$;

(2) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}=9$;

(3) $\cos\alpha=\dfrac{4}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{4}{9},\cos\beta=\dfrac{-4}{|\overrightarrow{AB}|}=-\dfrac{4}{9},\cos\gamma=\dfrac{7}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{7}{9}$;

(4) $\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{1}{9}(4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})$.

例 12　已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$ 及 x 轴垂直,且 $|\boldsymbol{a}|=2$,求向量 $\boldsymbol{a}$.

解　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{i}$(垂直于 x 轴),故 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{i}$ 平行. 由两向量平行的充要条件,可知 $\boldsymbol{a}$ 可写成 $\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{i})$,即

$$\boldsymbol{a}=\lambda\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&6&8\\1&0&0\end{vmatrix}=\lambda(8\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}).$$

由题设 $|\boldsymbol{a}|=2$,得 $\sqrt{(8\lambda)^2+(-6\lambda)^2}=2,\lambda^2(8^2+6^2)=4,\lambda=\pm\dfrac{1}{5}$,

从而得 $\boldsymbol{a}=\dfrac{8}{5}\boldsymbol{j}-\dfrac{6}{5}\boldsymbol{k}$,或 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{8}{5}\boldsymbol{j}+\dfrac{6}{5}\boldsymbol{k}$.

评注　利用向量解决几何问题时,要与几何图形相联系. 一方面要灵活运用和向量、差向量、数乘向量的定义,另一方面要注重各个向量所构成的几何示意图,并努力使两者融会贯通. 用向量证明几何问题,往往有的既可以用坐标形式,也可以不用坐标形式,这时要结合题目所给条件,确定采取的方法. 以上部分例子中由于题设中未给出向量的坐标,因而我们避开了用坐标的方法.

【题型二】　*求平面的方程*

例 13　求三点 $P_1(1,1,1),P_2(2,0,1),P_3(-1,-1,0)$ 的平面方程.

解　$\overrightarrow{P_1P_2}=(1,-1,0),\overrightarrow{P_1P_3}=(-2,-2,-1)$

可取平面的一个法向量 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&0\\-2&-2&-1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,

由点法式方程得所求平面方程为 $(x-1)+(y-1)-4(z-1)=0$,

即
$$x+y-4z+2=0.$$

例 14 求平行于 y 轴，且过点 $A(1,-5,1)$ 与 $B(3,2,-3)$ 的平面方程.

解 设所求的平面方程为 $Ax+Cz+D=0$，

又所求平面过点 $A(1,-5,1)$ 与 $B(3,2,-3)$，将 A,B 的坐标代入上述方程，

得 $\begin{cases}A+C+D=0,\\3A-3C+D=0,\end{cases}$ 解之得 $A=2C, D=-3C$，

代入所设方程，故所求平面方程为 $2x+z-3=0$.

例 15 求通过点 $(3,0,0)$ 和点 $(0,0,1)$ 且与 xOy 平面成 $\frac{\pi}{3}$ 角的平面的方程.

解 设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，

平面过点 $(3,0,0)$，有 $3A+D=0$，即 $A=-\frac{D}{3}$， ①

平面过点 $(0,0,1)$，有 $C+D=0$，即 $C=-D$， ②

又平面与 xOy 面成 $\frac{\pi}{3}$ 角，有 $\frac{C}{1\times\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，

即 $A^2+B^2-3C^2=0$， ③

由①，②，③得 $B=\pm\frac{\sqrt{26}}{3}D$，

故所求平面为 $-\frac{D}{3}x\pm\frac{\sqrt{26}}{3}Dy-Dz+D=0$，

即 $x\pm\sqrt{26}+3z-3=0$.

例 16 求过点 $(1,-2,1)$ 且垂直于直线 $\begin{cases}x-2y+z-3=0\\x+y-z+2=0\end{cases}$ 的平面方程.

解 已知直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{1,-2,1\}\times\{1,1,-1\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=(1,2,3)$，

由于平面与该直线垂直，故可取平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 为该方向向量 $\boldsymbol{s}$，即 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}=(1,2,3)$，由点法式得平面方程为 $x-1+2(y+2)+3(z-1)=0$，即 $x+2y+3z=0$.

例 17 求通过点 $M(-1,3,-2)$，且通过直线 l：$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{5}$ 的平面方程.

解 直线上的点 $(-1,1,0)$ 与点 $M(-1,3,-2)$ 所连的向量为 $(0,2,-2)$ 且直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(3,-2,5)$，则可取法向量

$$\boldsymbol{n}=(0,2,-2)\times(3,-2,5)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&2&-2\\3&-2&5\end{vmatrix}=6\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k},$$

所以，平面方程为 $6(x+1)-6(y-3)-6(z+2)=0$ 即 $x-y-z+2=0$.

例 18 设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$ 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面的方程.

（1996 年数学(一)、(二)考研题）

解 由题设，原点和点 $(6,-3,2)$ 连线 l 的点向式方程为

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{2},$$