普通高等教育"十一五"规划教材

公共基础课教材系列

高等数学学习指导与同步训练教程

（配高教第六版）

郑州轻工业学院数学与信息科学系　编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材

公共基础课教材系列

高等数学学习指导与同步训练教程

郑州轻工业学院数学与信息科学系　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书作为同济大学数学系编的《高等数学》第六版的配套辅导教材，全书共分十二章，章节的划分与六版完全一致. 每章内容由五部分组成：一、内容提要与基本要求；二、典型例题分析；三、同步训练题；四、自测题；五、同步训练题及自测题参考答案与提示. 书末附有 2008～2009 年硕士研究生入学考试数学试题及答案.

本书可作为高等工科院校"高等数学"学习的辅导读物，也可作为教师教学的参考书，同时也是一本同步训练教程，而且也可作为学生考研的系统复习用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与同步训练教程/郑州轻工业学院数学与信息科学系编. —北京：科学出版社，2009

(普通高等教育"十一五"规划教材·公共基础课教材系列)

ISBN 978-7-03-025681-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. 郑… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 174091 号

责任编辑：王 超 张 斌/责任校对：柏连海 王万红

责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年10月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2009年10月第一次印刷 印张：19 1/2

印数：1-3 000 字数：393 000

定价：30.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235（HP04）

前　　言

高等数学是理工类专业一门重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目。同济大学数学系主编的《高等数学》是一本深受广大师生欢迎并多次获奖的优秀教材。在前五版的基础上，按照精品课程教材的要求，在保持优点、特色的前提下，继续坚持改革，反复锤炼，努力反映国内外高等数学改革和学科建设的最新研究成果和最高水平，体现创新教学理念，2007 年同济大学数学系又推出了《高等数学》第六版，进一步强调激发学生自主学习，提高学生的综合素质和创新能力。为帮助广大学生学好高等数学，我们依据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和分层次教学改革的需要，编写了这本与同济大学数学系编写的《高等数学》第六版配套的学习指导与训练教程，以加深学生对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，提高数学素养并掌握运用数学工具去解决实际问题的能力。

全书共分十二章，章节的划分与六版完全一致。每章内容由五部分组成：一、内容提要与基本要求；二、典型例题分析；三、同步训练题；四、自测题；五、同步训练题及自测题参考答案与提示。第一部分内容提要与基本要求是本章内容的归纳，既简洁又翔实；第二部分典型例题分析选编的例题题型多，覆盖面广，基本涵盖了本章各节典型的重、难点题目；第三部分同步训练旨在帮助学生通过训练，巩固基础，掌握本节的基本知识、解题方法与技巧；第四部分自测题重在覆盖面，难度略高于期中期末试题，这样有助于检验学生对本章内容的掌握情况，发现知识的缺陷，从而为完成全部课程的学习奠定基础；第五部分同步训练习题与自测题答案与提示附有说明、简答或提示，指出解题的思路及方法。书末附有 2008～2009 年硕士研究生入学考试数学试题及答案，为的是让有志于继续深造的同学同步完成考研备考，达到考研的能力和要求。

本书结构严谨，条理清晰，综合性强，并有较强的针对性和可操作性，深入浅出，便于自学，可作为高等工科院校“高等数学”学习的辅导读物，也可作为教师的参考书。

本书由郑州轻工业学院数学与信息科学系组织编写，编写过程中得到郑州轻工业学院教务处和教材建设委员会的大力支持和帮助，同时在编写的过程中我们博采众家之长，汲取了多本参考书的精华，在此向各位领导和作者一并表示感谢。由于时间仓促，水平有限，不足之处在所难免，殷切希望读者提出宝贵意见，以便改进和修正。

编　者

2009. 6. 16

于郑州轻工业学院

目　　录

第一章　函数与极限

一、内容提要与基本要求

1. 理解映射与函数的概念及函数性质

(1) 映射的概念

需要注意的问题：

(a) 构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域的范围：$R_f\subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x\in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

(b) 对每个 $x\in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y\in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f\subset Y$，不一定 $R_f=Y$.

(c) 满射、单射和双射.

(d) 逆映射与复合映射.

(2) 函数的概念

定义　设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

应注意的问题：

(a) 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的，前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x)$，$x\in D$”或“$y=f(x)$，$x\in D$”来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f.

(b) 要求会求函数的定义域.

(c) 理解分段函数的概念：在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数.

(3) 函数的几种特性：有界性，奇偶性，单调性，周期性

(4) 理解复合函数和反函数的概念

(5) 熟悉基本初等函数、初等函数的性质及其图形

(a)基本初等函数.

幂函数　$y=x^\mu$ ($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数)；

指数函数　$y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)；

对数函数　$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，特别当 $a=e$ 时，记为 $y=\ln x$）;

三角函数　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;

反三角函数　$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

(b) 初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

(6) 会建立简单实际问题中的函数关系式

2. 理解数列的概念及数列极限的概念和性质

(1) **定义**　如果数列$\{x_n\}$与常数 a 有下列关系:对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，则称常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a\ (n\to\infty).$$

(2) **性质**

定理 1（极限的唯一性）　数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限.

定理 2（收敛数列的有界性）　如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

定理 3（收敛数列的保号性）　如果数列$\{x_n\}$收敛于 a，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

定理 4（收敛数列与其子数列间的关系）　如果数列$\{x_n\}$收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

3. 理解函数极限的概念和性质

(1) **定义 1**　设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正数 δ,使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当\ x\to x_0).$$

定义 2　设 $f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在着正数 X，使得当 x 满足不等式$|x|>X$ 时，对应的函数数值 $f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则常数 A 叫做函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

(2) 单侧极限

若当 $x\to x_0^-$ 时，$f(x)$无限接近于某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=A$；

若当 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)$无限接近于某常数 A，则常数 A 叫做函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=A$.

注意:① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

② $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

(3) **性质**

定理 1 (函数极限的唯一性) 如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，那么极限唯一.

定理 2 (函数极限的局部有界性) 如果 $f(x)\to A$ $(x\to x_0)$，那么存在常数 $M>0$和 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有$|f(x)|\leqslant M$.

定理 3 (函数极限的局部保号性) 如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

定理 3 如果 $f(x)\to A(x\to x_0)(A\neq0)$，那么存在点 x_0 的某一去心邻域，在该邻域内，有$|f(x)|>\frac{1}{2}|A|$.

定理 4 (函数极限与数列极限的关系) 如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$的极限存在，$\{x_n\}$为 $f(x)$的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N}^+)$，那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

4. 理解无穷小和无穷大的概念并掌握其运算

(1) **定义** 如果函数 $f(x)$当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限为零，那么称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小.

特别地，以零为极限的数列$\{x_n\}$称为 $n\to\infty$时的无穷小.

定义 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，对应的函数值的绝对值$|f(x)|$无限增大，就称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大. 记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty).$$

(2) 无穷小与函数极限及无穷大的关系

定理 1 在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)中，函数 $f(x)$具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是无穷小.

定理 2 (无穷大与无穷小之间的关系) 在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$为无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果 $f(x)$为无穷小，且 $f(x)\neq0$，则

$\frac{1}{f(x)}$为无穷大.

(3) 无穷小的比较及运算

定义 设α及β都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小.

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$；

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小；

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq0$，就说$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小；

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq0$，$k>0$，就说$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小；

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记为$\alpha\sim\beta$.

定理1 有限个无穷小的和也是无穷小.

定理2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

定理3 β与α是等价无穷小的充分必要条件为$\beta=\alpha+o(\alpha)$.

定理4 设α,β在自变量的同一变化中均是无穷小，且$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

这表明，求两个无穷小之比的极限时，分子及分母都可用等价无穷小来代替. 因此，如果用来代替的无穷小选取得适当，则可使计算简化.

当$x\to0$时，常见的等价无穷小有：$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$，$a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq1)$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$，$x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}$，$\arcsin x-x\sim\frac{x^3}{6}$，$\tan x-x\sim\frac{x^3}{3}$，$x-\arctan x\sim\frac{x^3}{3}$，$\tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}$.

5. 熟练掌握极限运算法则

(1) 极限的四则运算法则

定理1 如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

② $\lim f(x)\cdot g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$；

③ $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

推论 1 如果 $\lim f(x)$存在，而 c 为常数，则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

推论 2 如果 $\lim f(x)$存在，而 n 是正整数，则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

定理 2 设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$. 如果

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A,\ \lim_{n\to\infty} y_n = B,$$

那么

① $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)=A\pm B$; ② $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)=A\cdot B$;

③ 当 $y_n\neq 0(n=1, 2,\cdots)$ 且 $B\neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

定理 3 如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$，而 $\lim\varphi(x)=a$，$\lim\psi(x)=b$，那么 $a\geqslant b$.

(2) 复合函数的极限运算法则

定理 4 设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $y=f(u)$与函数 $u=g(x)$复合而成，$f[g(x)]$在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 若 $g(x)\to u_0(x\to x_0)$，$f(u)\to A(u\to u_0)$，且在 x_0 的某去心邻域内 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim_{u\to u_0} f(u) = A.$$

6. 理解极限存在准则、两个重要极限并会用两个重要极限求极限

(1) 夹逼准则(数列形式) 若$\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$满足 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

(2) 夹逼准则(函数形式) 若在 x_0 的某去心邻域(或$|x|>M>0$)内,满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$ ，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(3) 单界有界数列必有极限

(4) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

7. 理解函数连续的概念及其运算,了解间断点的概念,并会判别间断点的类型

(1) 函数连续的概念

定义 设函数 $y=f(x)$在点 x_0的某一个邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x =x-x_0$趋于零时，对应的函数的增量 $\Delta y= f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0,\text{或}\lim_{x\to x_0}f(x) = f(x_0),$$

那么就称函数 $y=f(x)$在点 x_0处连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$在点 x_0 处左连续；

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$在点 x_0 处右连续.

左、右连续与连续的关系

函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$在点 x_0 处左连续且右连续.

(2)函数的间断点

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 在此前提下，如果函数 $f(x)$有下列三种情形之一：

(a) 在 x_0 没有定义；

(b) 虽然在 x_0 有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(c) 虽然在 x_0 有定义且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$；

则函数 $f(x)$在点 x_0 为不连续，而点 x_0 称为函数 $f(x)$的不连续点或间断点.

(3)间断点的类型

通常把间断点分成两类：如果 x_0 是函数 $f(x)$的间断点，但左极限 $f(x_0^+)$及右极限 $f(x_0^-)$都存在，那么 x_0 称为函数 $f(x)$的第一类间断点. 不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点. 在第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点. 无穷间断点和振荡间断点显然是第二间断点.

(4) 连续函数的运算

定理 1 设函数 $f(x)$和 $g(x)$在点 x_0 连续，则函数

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}(\text{当 } g(x_0)\neq 0 \text{ 时})\text{ 在点 } x_0 \text{ 也连续.}$$

定理 2 如果函数 $f(x)$在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$也在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),\ x\in I_x\}$上单调增加(或单调减少)且连续.

定理 3 设函数 $y=f[g(x)]$由函数 $y=f(u)$与函数 $u=g(x)$复合而成，$\mathring{U}(x_0)\subset D_{f\circ g}$，若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，而函数 $y=f(u)$在 u_0 连续，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)] = \lim_{u\to u_0}f(u) = f(u_0).$$

定理 4 设函数 $y=f[g(x)]$由函数 $y=f(u)$与函数 $u=g(x)$复合而成，$U(x_0)\subset D_{f\circ g}$. 若函数 $u=g(x)$在点 x_0 连续，函数 $y=f(u)$在点 $u_0=g(x_0)$连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x_0 也连续.

结论：基本初等函数在它们的定义域内都是连续的. 一切初等函数在其定义

区间内都是连续的.

8. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(介值定理,最大最小值定理)

定理 1(最大值和最小值定理) 在闭区间上连续的函数在该区间上一定能取得它的最大值和最小值.

定理 2(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

定理 3(零点定理) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号，那么在开区间(a, b)内至少有一点 ξ 使 $f(\xi)=0$(ξ 称为 $f(x)$的零点).

定理 4(介值定理) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a) = A \quad 及 \quad f(b) = B,$$

那么，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间(a, b)内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi) = C.$$

定理 4′(介值定理) 设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，那么，对于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任意一个数 C，在开区间(a, b)内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi) = C.$$

二、典型例题分析

例 1.1 利用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)=1$.

证 对于任给的 $\varepsilon>0$,要使$\left|1-\dfrac{1}{2^n}-1\right|=\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$,只要 $2^n>\dfrac{1}{\varepsilon}$即可,两边取对数 $n\ln 2>\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$,即 $n>-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 2}$,故对于任给的 $\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),可取正整数 $N=\left[-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]$,当 $n>N$ 时,恒有$\left|1-\dfrac{1}{2^n}-1\right|<\varepsilon$ 成立,即$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)=1$.

例 1.2 设数列$\{x_n\}$的一般项 $x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$,问$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$? 求出 N,使当 $n>N$ 时,x_n 与其极限之差的绝对值小于正数ε. 当 $\varepsilon=0.001$ 时,求出 N.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，对于 $\varepsilon=0.001$,由于 $|x_n-0|=\left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}$ 所以只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon=0.001$ 即可,即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$,所以取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]=1000$,当 $n>1000$ 时，x_n 与 0 的差的绝对值小于 0.001.

例 1.3 当 $x\to 2$ 时,$y=x^2\to 4$. 问 $\delta=$? 使当$|x-2|<\delta$时,$|y-4|<0.001$.

解 对 $\varepsilon=0.001$，要使 $|y-4|<0.001$ 成立，而 $|y-4|=|x^2-4|=|x-2||x+2|$，由于 $x\to 2$，不妨设 $1<x<3$，则有 $3<|x+2|<5$，所以 $|y-4|<5|x-2|$，只要 $5|x-2|<0.001$ 即可，即 $|x-2|<\frac{0.001}{5}=0.0002$，所以取 $\delta=0.0002$ 时有，当 $|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$.

例 1.4 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}f(x)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\\&=\lim_{x\to 0^-}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\&=\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1,\end{aligned}$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$
故
$$\lim_{x\to 0}f(x)=1.$$

例 1.5 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+C}{x-C}\right)^x=4$，求 C.

解法一
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+C}{x-C}\right)^x&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2C}{x-C}\right)^x\\&=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{2C}{x-C}\right)^{\frac{x-C}{2C}}\right]^{2C}\left(1+\frac{2C}{x-C}\right)^C\right\}\\&=\mathrm{e}^{2C}=4\ ,\end{aligned}$$
故
$$C=\ln 2.$$

解法二 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+C}{x-C}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{C}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{C}{x}\right)^x}=\dfrac{\mathrm{e}^C}{\mathrm{e}^{-C}}=\mathrm{e}^{2C}$，故 $C=\ln 2$.

解法三 本题属于“1^∞”型，且 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{x+C}{x-C}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2Cx}{x-C}=2C$.

故
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+C}{x-C}\right)^x=\mathrm{e}^{2C}，故\ C=\ln 2.$$

关于“1^∞”型极限的求法，对 $\lim[f(x)]^{g(x)}$，其中
$$\lim f(x)=1\quad \lim g(x)=\infty$$

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$$

而

$$\begin{aligned}\lim g(x)\ln f(x)&=\lim\frac{\ln[1+(f(x)-1)]}{\frac{1}{g(x)}}\\&=\lim\frac{f(x)-1}{\frac{1}{g(x)}}=\lim g(x)[f(x)-1]\end{aligned}$$

故

$$\lim[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$$

例 1.6 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,b>0,c>0)$.

【分析】 本题属于“1^∞”型,下面给出三种解法.

解法一 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)}$$

$$=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=\sqrt[3]{abc}.$$

解法二 因为$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x+b^x+c^x}{3}=1,\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$,而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)&=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\left(\frac{a^x-1}{x}+\frac{b^x-1}{x}+\frac{c^x-1}{x}\right)\\&=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\ln abc.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{3}\ln abc}=\sqrt[3]{abc}$$

解法三 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln3}{x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{a^x+b^x+c^x}}=e^{\frac{1}{3}\ln abc}=\sqrt[3]{abc}.$$

例 1.7 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right]$.

【分析】 求这种 n 项和的极限,可考虑使用夹逼定理,即要构造夹逼不等式.通常是通过放大分子,缩小分母来对式子进行放大,通过缩小分子,放大分母来对式子进行缩小.

解 因为$\frac{n(n+1)}{n^2+n}\leqslant\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\leqslant\frac{n(n+n)}{n^2+1}$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+n)}{n^2+1}=2$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{n^2+n}=1$，两边极限值不同，不能这样用夹逼定理. 注意到

$$\frac{(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+n)}{n^2+n}\leqslant\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}$$
$$\leqslant\frac{(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+n)}{n^2+1},$$

即

$$\frac{n(3n+1)}{2(n^2+n)}\leqslant\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\leqslant\frac{n(3n+1)}{2(n^2+1)}.$$

但

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(3n+1)}{2(n^2+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(3n+1)}{2(n^2+1)}=\frac{3}{2},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right]=\frac{3}{2}.$$

例 1.8 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$，其中 $a>0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证 显然 $x_n>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{x_n\cdot\dfrac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$，即 x_n 有下界. 又 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant0$，故由单调有界原理知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则在 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$两边令 $n\to\infty$取极限得 $A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{a}{A}\right)$，解得 $A=\pm\sqrt{a}$（负值舍去），故得 $A=\sqrt{a}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

例 1.9 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

【分析】 本题属于“$\dfrac{0}{0}$”型.

解法一 $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}+x\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\dfrac{\ln(1+x)}{x}}=\frac{1}{2}.$$

解法二 $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$