复旦卓越·数学系列

高等职业技术院校教材

应用数学（上册）

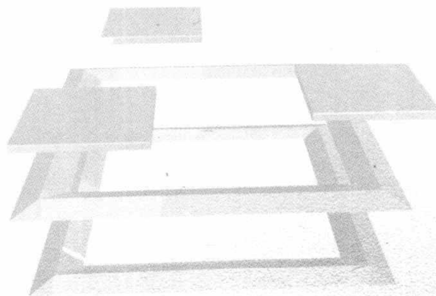
主　编　焦光利

复旦大学出版社

复旦卓越·数学系列
高等职业技术院校教材

应用数学（上册）

主　编　焦光利



復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学(上册) / 焦光利主编 . —上海: 复旦大学出版社,2009. 9

ISBN 978-7-309-06795-8

Ⅰ. 应… Ⅱ. 焦… Ⅲ. 应用数学—高等学校—教材 Ⅳ. O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 125949 号

应用数学(上册)

焦光利 主编

出版发行 复旦大学出版社 上海市国权路 579 号 邮编:200433

86-21-65642857(门市零售)

86-21-65100562(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)

fupnet@fudanpress. com http://www. fudanpress. com

责任编辑 梁 玲

出 品 人 贺圣遂

印 刷	句容市排印厂
开 本	787×960 1/16
印 张	21. 25
字 数	405 千
版 次	2009 年 9 月第一版第一次印刷

书 号	ISBN 978 - 7 - 309 - 06795 - 8 / O · 430
定 价	35. 00 元

内容提要

《应用数学》共分上、下两册（下册分为经济类和工程类两种）．上册共分6章，分别介绍了函数与极限、导数与微分、导数的应用、定积分与不定积分及其应用、矩阵代数、线性方程组与线性规划，以及相关数学实验、数学建模、数学文化等内容．书末所附光盘内含本书数学实验和数学建模的教学辅助软件．同时，本书还有配套练习册可供选用．

本书可作为高职高专或者普通本科院校的高等数学、工程数学课程教材，也可以作为一般工程技术人员的参考书．

前　　言

欢迎使用这套《应用数学》教材.本套教材根据教育部现行高等职业教育数学教学大纲、教学基本要求,为适应高等职业教育发展,由长期从事高等职业教育并从事高职数学教学的资深教师编写,主要适用于高职高专各科学生或普通高校各科学生,也可作为高职成人教育教材和自学考试学生的课外教材,同时也可作为一般工程技术人员的参考书.

随着当今计算工具和计算技术的飞速发展,数学这门既传统又古老的基础课程也正在发生着深刻的变化.放眼当今世界的科学技术界,手工设计和计算正在或即将成为历史,代之而起的是计算机设计和计算.高等数学课程的计算功能正在与计算机技术密切结合形成众多的计算技术和计算软件,而这些计算技术和计算软件正在科学领域、工程领域、经济管理等领域发挥着不可替代的作用.作为高等教育重要基础课程的高等数学应该教什么、怎么教的问题比任何时候都要突出.在这样一个大背景下,在本书的编写过程中,作者本着顺应时代潮流,对国家和民族负责、对学生负责的态度,以构建适合于我国国情的高职教育的公共课程体系为己任,以符合大纲要求、优化结构体系、加强实际应用、增加知识容量为原则,以新世纪社会主义市场经济形势下对人才素质的要求为前提,以高职数学在高职教育中的功能定位和作用为基础,努力编写一套思想内涵丰富、实际应用广泛、反映最新计算思想和技术、简单易学的高等数学教材.因此,在内容上删去了一些繁琐的推理和证明,比传统数学教材增加了一些实际应用的内容,力求把数学内容讲得简单易懂,重点让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯;在习题的编排上加入了大量的例题和习题,并照顾到高职多专业的特点,力求做到习题难易搭配适当.知识与应用结合紧密、掌握理论与培养能力相得益彰;在结构的处理上,注意与现行高中及中职教学内容的衔接,同时注意吸收国内外高职教材的优点,照顾到高职各专业的特点和需要,适当精简结构,使之更趋合理.为跟上当今计算机应用的发展步伐和大学生参加数学建模的需要,特意增加了一些数学软件的实验和数学建模的练习.书中带有 * 号的内容为选学内容.

《应用数学》共分上、下两册(下册分为经济类和工程类两种).本书为上册,内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、定积分与不定积分及其应用、矩阵代数、线性方程组与线性规划,以及相关的数学实验、数学建模、数学文化等.本书所附光盘内含本书数学实验和数学建模的教学辅助软件.同时,本书还配有配套练习册可供选用.使用本教材的学校可另外向复旦大学出版社索要教师用教学辅

助光盘或到复旦大学出版社的网站下载，在光盘中我们为各使用学校和教师们准备了本书全套的标准化教案、教学用PPT课件等教学辅助资料. 此外，教学辅助网站也正在建设中.

本书由焦光利主编. 在本书的编写过程中，得到了德州科技职业学院各级领导的关心和支持，同时也得到了复旦大学出版社领导和各位编辑的支持，编写中也参阅了有关的文献和教材，在此一并表示衷心的感谢.

由于时间仓促，加之水平有限，书中疏漏错误之处在所难免，恳切期望使用本书的师生多提意见和建议，以便于再版时更正.

编者

2009年7月

目　　录

第 1 章

函数与极限

函数是现代数学的重要基础，是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法. 因此掌握、运用好极限方法是学好高等数学的关键. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法.

§1.1　函数——变量相依关系的数学模型

1.1.1　邻域

1. 集合与区间

我们已在高中数学中学过集合的有关知识，它是函数的重要基础，现代数学正是应用了集合的方法使传统数学得到更大的发展.

除了自然数集 **N**、整数集 **Z**、有理数集 **Q** 与实数集 **R** 等常用数集外，区间是高等数学中最常用的数集.

介于某两个实数之间的全体实数称为有限区间，这两个实数称为区间的端点，两端点间的距离称为区间的长度.

设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，实数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)，即 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$. 而实数集 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记为 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$. 另外还有半开半闭区间. 如 $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$.

除了上面的有限区间外，还有无限区间，例如：$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\}$，$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$，$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<\infty\}=R$.

注　以后在不需要辨别区间是否包含端点、是否有限或无限时，常将其简称为“区间”，且常用 I 表示.

2. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ **邻域**，记

作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

其中点 a 叫做该邻域的中心，δ 叫做该邻域的半径，如图 1-1-1 所示.

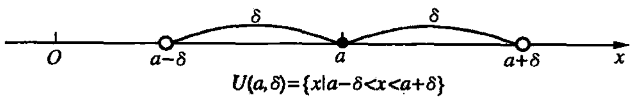


图 1-1-1

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心 a 去掉，所得到的邻域称为点 a 的去心邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$，并称 $(a-\delta,a)$ 为点 a 的左 δ 邻域，$(a,a+\delta)$ 为点 a 的右 δ 邻域. 例如：

$$U(2,1)=\{x\mid |x-2|<1\}=(1,3),$$
$$\mathring{U}(2,1)=\{x\mid 0<|x-2|<1\}=(1,2)\cup(2,3).$$

1.1.2 函数的概念及其表示方法

1. 函数的定义①

定义 1 如果变量 x 在其变化范围 D 内任意取一个数值，变量 y 按照一定对应法则总有唯一确定的数值与它对应，则称 y 为 x 的函数，记为

$$y=f(x),x\in D,$$

---

① 首先使用“函数”一词的是德国数学家莱布尼兹(Leibniz,1646—1716 年). 1673 年他在一篇手稿中用“函数”(Function) 来表示任何一个随着曲线上的点变动而变动的量，还在 1714 年的著作《历史》中用“函数”表示依赖于一个变量的量. 在此以前，人们经常用一些变量和运算符号书写成简单的表达式来表示函数，并认为函数必须有解析表达式. 而牛顿从 1665 年开始研究微积分起，就一直用“流量”来表示函数.

函数记号 $f(x)$ 是瑞士数学家欧拉(Euler,1707—1783 年)1734 年引入的.

法国数学家柯西(Cauchy,1789—1857 年) 在 1821 年的《分析教程》中给出了函数的定义：“在某些变数间存在着一定关系，当一经给定其中某一变数的值，其他变数的值可随之确定时，则将最初的变数叫做自变量，其他各变数叫做函数.”

德国数学家狄利克莱(Dirichlet,1805—1859 年) 在一篇讨论函数的文章中，称“如果对于 x 的每一个值，y 有一个完全确定的值与其对应，则 y 是 x 的函数”. 该定义抓住了函数的实质：x 与 y 之间存在一个确定的数值对应关系(法则). x 与 y 间只需有一个确定的数值对应关系(法则) 存在，不论这个关系(法则) 是公式、图像、表格或其他形式，y 就是 x 的函数，从而使函数概念从解析式的束缚中挣脱出来，扩大了函数概念的内涵.

后来，德国数学家戴德金(Dedekind,1831—1916 年) 和德国数学家韦伯(Weber,1842—1913 年) 把集合论引入函数定义，分别用“集合”与“映射”和“集合”与“对应”来定义函数，从而构成了近代函数的概念.

中国数学史中的“函数”一词，是我国清代数学家李善兰引入的. 他在 1859 年翻译《代数学》一书时，把 Function 译成了“函数”，并给出定义：“凡式中含天，为天之函数.”

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 为函数的定义域.

对于 $x_0 \in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y_0 与之对应，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值，记为

$$y_0 = f(x_0) \text{ 或 } y_0 \big|_{x=x_0}.$$

当自变量 x 取遍定义域 D 内的各个数值时，对应的变量 y 全体组成的数集称为这个函数的值域.

函数的定义域 D 与对应法则 f 称为函数的两个要素，两个函数相等的充分必要条件是定义域和对应法则均相同.

函数的定义域在实际问题中应根据实际意义具体确定，如果讨论的是纯数学问题，则使函数的表达式有意义的实数集合称为它的定义域，即自然定义域.

2. 函数运算

函数可作四则运算.

定义 2　设有两函数：$y = f(x), x \in D_1$；$y = g(x), x \in D_2$. 当 $D = D_1 \cap D_2 \neq \Phi$ 时，则定义 $f(x)$，$g(x)$ 的和、差、积、商为：

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),\ x \in D,$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x),\ x \in D,$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in \{x \mid x \in D, g(x) \neq 0\}.$$

例 1　设 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0, 3a]\,(a > 0)$，求 $g(x) = f(x+a) + f(2x-3a)$ 的定义域.

解　设 $u = x + a$，$v = 2x - 3a$，有

$$f(x+a) = f(u),\ f(2x-3a) = f(v).$$

因为 $f(x)$ 的定义域 $= [0, 3a]$，所以

(1) $0 \leqslant u \leqslant 3a$，即 $0 \leqslant x + a \leqslant 3a$，有 $-a \leqslant x \leqslant 2a$，即 $f(x+a)$ 定义域 $D_1 = [-a, 2a]$；

(2) $0 \leqslant v \leqslant 3a$，即 $0 \leqslant 2x - 3a \leqslant 3a$，有 $\frac{3}{2}a \leqslant x \leqslant 3a$，即 $f(2x-3a)$ 定义域 $D_2 = \left[\frac{3}{2}a, 3a\right]$. 于是 $g(x)$ 的定义域为

$$D = D_1 \cap D_2 = [-a, 2a] \cap \left[\frac{3}{2}a, 3a\right] = \left[\frac{3}{2}a, 2a\right].$$

1.1.3　函数的性质

1. 函数的奇偶性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对于任何 $x \in D$，

(1) 恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

(2) 恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

几何上，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称，如图 1-1-2(a) 和(b) 所示.

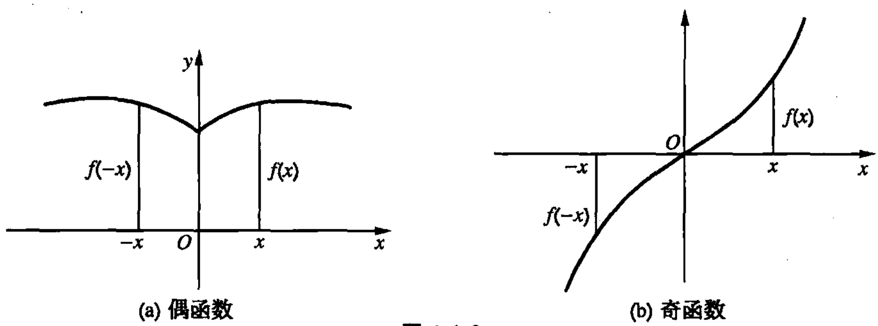


图 1-1-2

例 2　判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

解　因为函数定义域为$(-\infty,+\infty)$(即原点对称)，且

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$$
$$=\ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x).$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

2. 函数的单调性

定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，对于任意 $x_1,x_2\in I$，如图 1-1-3 所示.

当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调递增函数；

当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上是单调递减函数.

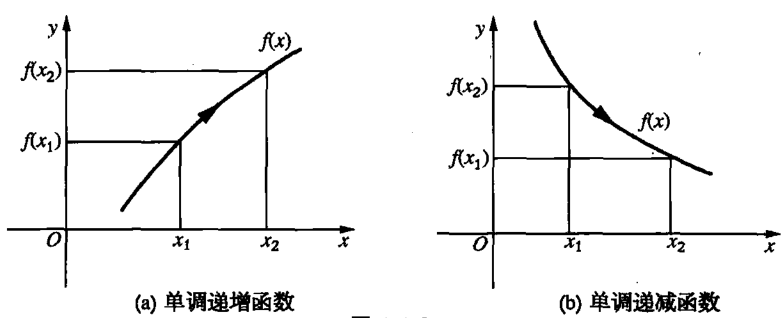


图 1-1-3

例如：函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$，在 $(0,+\infty)$ 是单调减少，在 $(-\infty,0)$ 是单调增加，如图 1-1-4 所示.

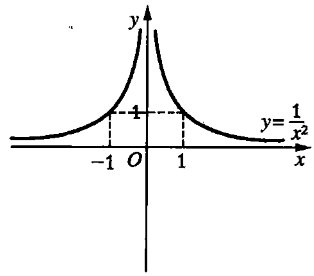


图 1-1-4

3. 函数的有界性

定义 5　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$，如果存在一个正数 M，对任一 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界，或称 $f(x)$ 为 I 上的有界函数；如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界，或称 $f(x)$ 为 I 上的无界函数.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界，因为对任一 $x\in\mathbf{R}$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，如图 1-1-5 所示.

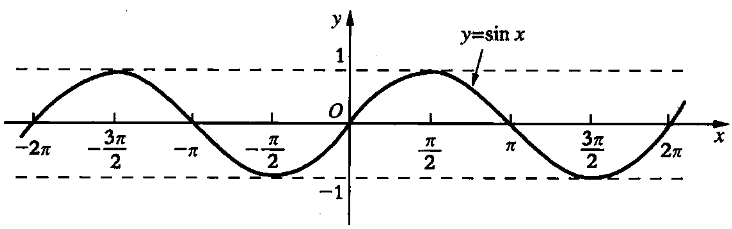


图 1-1-5

又如图 1.1.4 所示的函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$，在区间 $(0,1)$ 上无界，但它在 $[1,+\infty)$ 上有界.

4. 函数的周期性

定义 6　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正数 T，对任一 $x\in D$ 有 $x\pm T\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期（通常指最小正周期）.

例如：函数 $y=\cos x$ 的周期是 2π，如图 1-1-6 所示；$y=\tan x$ 的周期是 π，如图 1-1-7 所示.

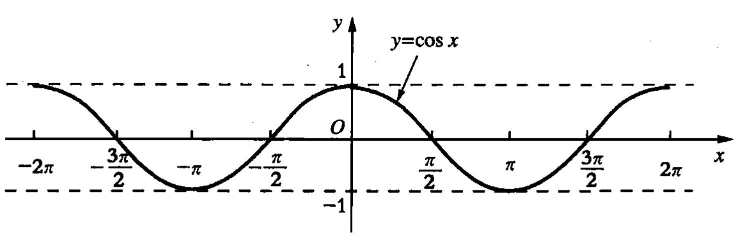


图 1-1-6