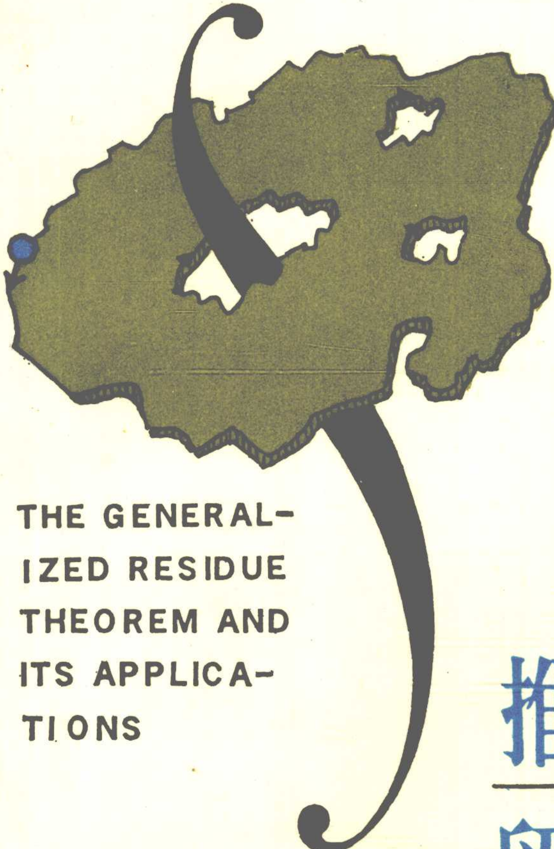


THE GENERALIZED RESIDUE THEOREM AND ITS APPLICATIONS

推广的留数定理及其应用

钟寿国 编著

武汉大学出版社

推广的留数定理及其应用

钟寿国　编著
路见可　审校

国家自然科学基金
国家教育委员会博士点基金
资助项目

武汉大学出版社

(鄂)新登字 09 号

推广的留数定理及其应用

© 钟寿国　编著

路见可　审校

*

武汉大学出版社出版发行

(430072 武昌 珞珈山)

黄石日报印刷厂印刷

*

850×1168　1/32　4.875 印张　121 千字

1993 年 [illegible] 月第 1 版　1993 年 7 月第 1 次印刷

印数:1—1000

ISBN 7-307-01553-6/O・133

定价: 2.95 元

内 容 提 要

本书是根据路见可1977－1978年提出的高阶奇异(复)积分和推广留数定理的基础上发展而成的普及读物。它由浅入深地系统介绍积分围道上有各种极点时积分概念的逐步扩充和留数定理的一系列推广及其结论的高度简明统一。

作者丰富和发展了路见可在这方面的理论，提出了端点高阶奇异积分、∞点高阶奇异积分的概念；进一步明确了高阶奇异积分和普通积分的关系及其前者对后者计算中的重要意义；提出了第二类无界多连通域上的推广留数定理；对定义本性奇点留数和推广相应留数定理的得失也作了初步的探索。

作者构作了大量丰富翔实的例子，特别是举出用基本留数定理过去难于求积的例子，演示了上述理论对实积分计算的重要作用，显示了高阶奇异积分和推广的留数定理的应用前景。因此，本书有很强的应用性，适合工程技术人员和科学工作者阅读；又是《复变函数》课的补充读物，供数学、物理、力学本科生和教师参考。

书中每部分后有习题并附解答。

目 录

1 从实积分计算谈起(代　序)

在物理和工程技术中大量的实际问题有时会导致实积分的计算.例如,在有阻尼振动问题中需要计算

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx;$$

在光的折射问题中需要计算

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx;$$

在原子核物理中需要计算

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{xe^{-x^2}\sin 2ax}{x^2+b^2}dx \quad (a>0,b>0,a\neq b)$$

等等.然而积分远不如微分运算那么容易,因为原函数不总是能用初等函数表示(有时即使能用初等函数表示也嫌太烦),这就是为什么微积分学中积分占有比微分更重比例的原因之一.为了得出它们的解答,历史上曾困扰许多著名数学家.

人们为了计算一些实积分,曾建立了一整套含参变量积分的理论,并辅之以高度精湛的计算技艺.例如在$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$及著名欧拉(Euler)积分$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)x^a}dx\,(0<a<1)$的计算中,数学家们所表现的杰出技巧不能不令人啧啧称赞.但赞叹之余不免望而却步.其一,因为往往一题一法,不具普遍性;其二,在于对含参变量积分所加的条件比较复杂,应用起来还是不够方便.因此促使人们进行新的探索.

在复变函数理论建立之后,却发生了根本性的变化.特别是

19 世纪法国伟大数学家柯西(Cauchy)对复变函数积分理论的建立起了奠基性作用.他不仅建立了柯西定理和柯西公式,更重要的是他建立了留数定理*并应用于计算实积分,使之运算大为简化.由于这一理论高度的实用性,使得它时至今日,在大学理、工科复变函数教材中无例外地占有重要一席之地.

人们在这个理性的胜利面前沉寂了多年,然而细心的研究者会发现,留数定理还有不尽人意的地方.现就最简单情形说明.设域D是由一条逐段光滑封闭曲线L围成,$z_1,\cdots,z_n\in D$,设函数$f(z)$在$\overline{D}-\{z_1,\cdots,z_n\}$解析,则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_j) \qquad (1,1)$$

其中L取关于D的正向.但是,当$f(z)$在边界上有孤立奇点t_0时,这个定理不能用.其困难在于这时(1,1)左端积分在t_0附近的可积性发生了问题,而且随着t_0奇性的不同很难对积分的意义作出合理的解释.因此每次碰到积分路线上有孤立奇点时,总是以t_0为心从域中挖去一个充分小的圆,然后让积分曲线绕道而行以便能应用留数定理,最后再来估计$f(z)$在小圆弧上的积分当圆弧半径趋于零时的极限,这样作虽能解决问题,却很不方便.例如计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

时,取辅助函数$f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z}$,因$z=0$处有一阶极点,不能在上半圆盘$\{|z|\leqslant R\}\cap\{\mathrm{Im}z\geqslant 0\}$上应用(1,1),故选取积分路径为$\overline{D}=\{z\,|\,r\leqslant z\leqslant R,0\leqslant\arg z\leqslant\pi\}$的边界(图1—

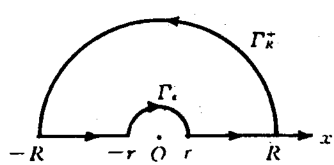


图1—1

* 见 M. 克莱因著:《古今数学思想》第 3 册,第 27 章,上海科技出版社,1985.

1)，记 Γ_r,Γ_R 分别为上半圆弧 $|z|=r$ 及 $|z|=R$. 因 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析，由柯西定理有

$$\left(\int_{-R}^{-r}+\int_{r}^{R}\right)\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\Gamma_r^-}f(z)dz+\int_{\Gamma_R^+}f(z)dz=0$$

由约当(Jordan)引理知，$\lim\limits_{z\to\infty}\int_{\Gamma_R^+}f(z)dz=0$，$\lim\limits_{\substack{R\to+\infty\\ r\to0}}\left(\int_{-R}^{-r}+\int_{r}^{R}\right)\cdot\frac{e^{ix}}{x}dx=2i\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$，最后经过一番估计算出 $\lim\limits_{r\to0}\int_{\Gamma_r^-}f(z)dz=-\pi i$，于是得 $I=\frac{\pi}{2}$.

又如欧拉积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x)x^{\alpha}}\quad(0<\alpha<1)\tag{1.3}$$

取辅助函数 $f(z)=\frac{1}{(1+z)z^{\alpha}}$，由于 z^{α} 枝点为 $0,\infty$，故以$[0,+\infty]$为剖线，取 z^{α} 在正实轴上岸为正实值的分枝. 然而分枝后的 $f(z)$ 在 $z=0$ 仍有某种“极”性即 $\lim\limits_{z\to0}f(z)=\infty$，不能用(1.1)，必须以 $z=0$ 为心作充分小的圆 Γ_ε：$|z|=\varepsilon,0<\varepsilon<1$，为了区域有界还要作充分大的圆 Γ_R：$|z|=R,R>1$. 设 D 是圆环 $\varepsilon<|z|<R$ 除去剖线后的开区域，在 D 内 $f(z)$ 除 $z=-1$ 有一阶极点外解析且连续到剖线 D 的边界. 由(1.1)，沿 D 的边界正向(图 1—2)积分，有

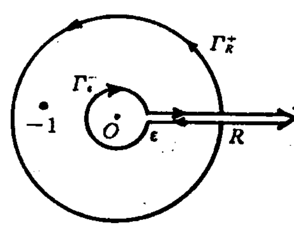


图 1—2

$$\int_{\varepsilon}^{R}\frac{dx}{(1+x)x^{\alpha}}+\int_{\Gamma_R^+}f(z)dz$$
$$-\int_{\varepsilon}^{R}\frac{dx}{(1+x)x^{\alpha}e^{2\pi\alpha i}}+\int_{\Gamma_\varepsilon^-}f(z)dz$$
$$=2\pi i\mathrm{Res}(f,-1)=2\pi ie^{-\alpha\pi i}$$

令 $\varepsilon\to0,R\to+\infty$，计算出

$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_\varepsilon^+}f(z)dz=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{\Gamma_\varepsilon^-}f(z)dz=0$. 最后得 $I=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$.

以上二例中，辅助函数 $f(z)$ 在实轴上孤立奇点为数不多，如

果 $f(z)$ 在积分路线上有多个孤立奇点，则要一一挖去，然后一一估计它们的值，这是很不方便的. 能否有一种方法将边界上与区域内的孤立奇点类似地看待而统一到留数定理中去呢？

1978 年路见可在用直接解法求解一类奇异积分方程解的时候，顺便提出了推广的留数定理. 指出留数的基本定理中，如果边界 L 上还有有限个极点 $t_1,\cdots,t_m$ 时，只要对积分作出适当的理解（引进主值积分和高整数阶奇异积分概念，见 **4**、**5**、**6**），对定理的结果稍加修改还是对的. 例如(1.1)可改为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_j)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\theta_k}{2\pi}\mathrm{Res}(f,t_k)\qquad(1.4)$$

其中 θ_k 是 t_k 的两个单侧切线关于 D 的张角，$\frac{\theta_k}{2\pi}$ 则是张角占周角的份额. 若某个 t_k 为光滑点，则 $\frac{\theta_k}{2\pi}=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$，形象些说，好象这个点一半属于 D，一半在 D 之外，因此这个点算半个留数. 若某 θ_k 为直角，则 $\frac{\theta_k}{2\pi}=\frac{1}{4}$，则只有 $\frac{1}{4}$ 个点属于 D，因而此点算 $\frac{1}{4}$ 个留数，等等. 例如将(1.4)用于(1.2)，取上半圆盘 $\overline{D}=\{|z|\leqslant R\}\cap\{\mathrm{Im}z\geqslant 0\}$ 边界为积分路线，$f(z)=\frac{e^{iz}}{z}$ 在 $\overline{D}$ 上除 $z=0$ 有一阶极点外解析. 于是

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{\Gamma_R^+}f(z)dz=2\pi i\left[\frac{1}{2}\mathrm{Res}(f,0)\right]=\pi i$$

令 $R\to+\infty$，立即得 $I=\frac{\pi}{2}$（详见例 4.4).

又如(1.3)中，$f(z)=\frac{1}{(1+z)z^{\alpha}}$ 分枝后在 $z=0$ 出现了分数阶“极性”，其奇性不足一阶，不过今后还会看到在别的例子中其分数阶极性可能更高，这时只要对奇点附近的积分作出适当解释（引进弱奇性积分及高分数阶奇异积分概念，见 **3**、**7**），(1.4)仍对. 以后将证明，可视作这些奇点的“留数为零”.

这一切都可以推广到 ∞ 为边界点的情况.

例如(1.3)中的$f(z)$在剖开的平面D内于$z=-1$处有一阶极点，而在边界$z=0$处有不足一阶的“极”性，边界$z=\infty$处有高于一阶的“零”性，以后将证明(见3)可不计$z=0,z=\infty$处的留数.直接以剖线上、下岸为围道在无界域D中(把∞也看成一孤立奇点)用留数定理：

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^a}-\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^a e^{2\pi ai}}=2\pi i\mathrm{Res}(f,-1).$$

综上所述，可以认为推广的留数定理是古典留数理论的升华，它不仅在理论问题的探讨中带来很多好处，而且实际应用时十分方便，更有甚者，过去某些不能用留数定理计算的积分，利用本书的方法却能算出来.因此它出现之后，首先得到物理界的欢迎，认为给他们帮了大忙，为了把这一计算方法介绍给广大读者，我们将不涉及解析函数边值问题的专门知识，力图写得通俗一些，只要学过复变函数中留数定理的读者都能看懂本书.如果本书的问世能达到上述目的的话，那就是作者最大的欣慰了.

作者衷心感谢路见可教授对本书的审阅和对出版的鼎立支持，衷心感谢杜金元教授、王建忠教授及学科小组同事们的热情关怀和帮助.

然而，由于作者水平所限，谬误之处在所难免，希读者不吝赐教.

2 留数的基本定理

本节首先介绍本书常用的术语和记号，然后帮助读者概括、复习留数的基本理论，并着重深化在无界区域中留数定理和积分理论的讨论，以作为在各个方向上推广留数定理的基本依据.

2.1 曲线·区域·相对邻域

本书所涉及的曲线全部都是逐段光滑曲线(封闭或否)，有时也简称曲线. 如果曲线不通过无穷远点则其长是有限的*，否则将为无限长. 而后者可能一端或两端伸向无穷. 如果为两端伸向无穷的曲线 L，本书通常要求 L 伸向∞时具有渐近方向. 也就是说，L 上的点 t 沿 L 两端伸向∞时，t 关于 L 的两侧切线夹角(指 L 正向对所围区域 D)有极限，设为 θ_∞(图 2—1)，称此角为 L 在∞关于 D 的渐近角**.

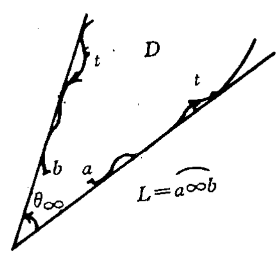


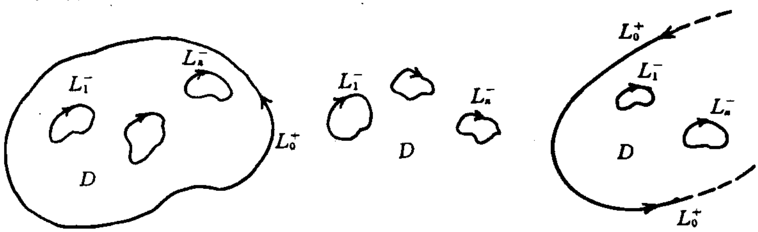
图 2—1

本书讨论的平面区域分为两类. 一类称有界(多连通)域，如图 2—2(a)所示，$L_0, L_1, \cdots, L_n$ 均为简单逐段光滑封闭曲线，其中 $L_1, \cdots, L_n$ 均落在 L_0 的内域且两两外离，由它们组成 $n+1$ 连通的有

* 为叙述简单，以后凡逐段光滑曲线均指不通过∞，否则将特别指明.

** 只一端伸向∞的逐段光滑曲线也可定义单侧渐近方向，但本书不涉及.

界区域D，另一类称为无界(多连通)域，如图2—2(b)，(c)所示. 其中(b)相当于(a)中去掉L_0后生成的无界区域，以后称为第一类无界(多连通)域；而(c)相当于(a)中L_0换成两端伸向∞时具有渐近方向的封闭曲线*后所形成的无界区域，以后称为第二类无界(多连通)域. 以上三类区域的三类边界都称作复合闭路. 它们均以这样的方向为正向，即沿着周界行进时，区域D恒在观察者的左方.



(a) (b) (c)

图 2—2

当然，多连通区域的连通数可以是无穷的，但本书所指的多连通域都是上述有限连通数的区域，且边界均由封闭曲线组成.

以后还常常用到所谓相对邻域的概念. 设域D的边界为曲线L，$z_0\in L(z_0\neq\infty)$，且z_0为L的内点. 取$\delta>0$充分小，记$B(z_0,\delta)$为以z_0为心δ为半径的开圆盘，将$B(z_0,\delta)\cap D$称为以z_0为心δ为半径关于D的相对邻域，记为$\Delta(z_0,\delta)$，或简记为$\Delta(z_0)$，Δ等. $\Delta(z_0,\delta)$不一定是连通的，但L为逐段光滑曲线时可以证明，当$\delta>0$充分小时，$\Delta(z_0,\delta)$是连通的(不证). 因此我们今后写出的$\Delta(z_0,\delta)$恒认为是连通的. 又注意，当z_0为D的内点，则$\Delta(z_0,\delta)=B(z_0,\delta)$($\delta$充分小)即为通常邻域.

同样，设$\infty\in L$，∞为L的内点(L这时必为通向∞的曲线)，取$R>0$充分大，记$|z|>R$为$B(\infty,R)$，称作以∞为心R为半径

---

* 这里指拓朴意义下的封闭曲线，把∞与平面上其它有穷点同等看待，如实轴，角域、带形域的边界都属此类.

的邻域，而 $\Delta(\infty,R)=B(\infty,R)\cap D$ 称为以 ∞ 为心 R 为半径关于 D 的相对邻域. R 充分大时，$\Delta(\infty,R)$ 将是连通的.

2.2 有界多连通域留数定理

定义 2.1 设 $z_0\neq\infty$，$f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 解析 $(0<R<+\infty)$，则环绕 z_0 任一圆周 L：$|z-z_0|=\rho(\rho<R)$ 的积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} f(z)dz$$

(其中 L 取逆时针向)称为 f 在 z_0 的留数，记为

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} f(z)dz \tag{2.1}$$

在 $0<|z-z_0|<R$ 内将 $f(z)$ 展成罗朗(Laurent)级数，由(2.1)，在 L 上逐项积分，得

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\alpha_{-1} \tag{2.2}$$

α_{-1} 是罗朗展式中负一次幂系数.

在不同情况下留数求法如下：

1° 当 z_0 为可去奇点时，$\operatorname{Res}(f,z_0)=0$，

2° 当 z_0 为一阶极点时，

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \tag{2.3}$$

特别，$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z)$，$Q(z)$ 均在 z_0 解析，但 z_0 不是 $P(z)$ 的零点而是 $Q(z)$ 的一阶零点，这时

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \tag{2.4}$$

3° 当 z_0 为 k 阶极点时，

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)] \tag{2.5}$$

4° 当 z_0 为本性奇点，只能用定义或罗朗展开求 α_{-1}.

以下是留数的基本定理.

定理 2.1 设 D 是由复合闭路 L 围成的有界多连通域，$z_1, \cdots, z_n \in D$，设 $f(z)$ 在 $D-\{z_1,\cdots,z_n\}$ 内解析，在 $\overline{D}-\{z_1,\cdots,z_n\}$ 连续，则

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_j) \tag{2.6}$$

其中积分沿 L 关于 D 的正向.

虽然本定理由柯西积分定理而得来，但反过来也可把柯西积分定理看作本定理的特例. 例如本定理其它条件不变，而设 $f(z)$ 在 D 内无孤立奇点，则得有界多连通域中的柯西定理：

$$\int_L f(z)dz = 0 \tag{2.7}$$

又若 $z_0 \in D$，则 $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ 在 z_0 有一阶极点，利用(2.6)，(2.4)有该域中的柯西公式：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0) \tag{2.8}$$

仍设 $z_0 \in D$，则 $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 在 z_0 有 $n+1$ 阶极点，利用(2.6)及(2.5)有该域中柯西求导公式：

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \tag{2.9}$$

(2.6)－(2.9)是柯西积分理论中的基本公式.

幅角原理也是柯西积分理论的产物，我们在这里将条件略作削弱，证明方法也与通常有别. 在今后留数定理推广时，幅角原理也可相应推广，故在这里先提出最基本的幅角原理.

定理 2.2（幅角原理） 设 D 是由复合闭路 $L=L_0^+ + L_1^- + \cdots + L_s^-$ 所围成的有界多连通域，$f(z)$ 在 D 内亚纯，$f'(z)$ 在 $\overline{D}$ 除 D 内极点外连续，且 $f(z)$ 在 L 上不为零，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}[\mathrm{Arg} f(z)]_L = N - P \tag{2.10}$$

其中 L 取关于 D 的正向，N，P 分别为 $f(z)$ 在 D 内零点和极点的

总数，有几重零(极)点就算几个零(极)点.

证 $f(z)$在 D 内只有有限个极点，否则在 D 内或 L 上形成聚点. 若在 D 内形成聚点，此点为非孤立奇点，与亚纯定义矛盾；在 L 上形成聚点，与 L 上的点为连续点矛盾.

$f(z)$在 D 内只能有有限个零点. 在除去 $f(z)$在 D 内极点后得域 D_1，若在 D_1 内的零点有聚点，则此点决不会为极点，而只能在 D_1 内或 L 上. 若在 D_1 内有聚点，由解析函数唯一性，$f(z)$在 D_1 内恒为零，又由连续性，则 $f(z)$在 L 上为零，矛盾；若此聚点在 L 上，则由连续性 $f(z)$在这点上必为零，这与 L 上 $f(z)\neq 0$ 矛盾.

因 $f'(z)$在 L 上连续，且 L 上 $f(z)\neq 0$，于是 z 平面上每个简单逐段光滑封闭曲线 L_j: $L_j(t)$ 由 $w=f(z)$映为 w 平面上逐段光滑封闭曲线 Γ_j: * $\Gamma_j(t)=f(L_j(t))$，$\alpha_j\leqslant t\leqslant\beta_j$，$j=1,\cdots,s$. 因 $w=f(z)\neq 0$ 于 L，从而 $\Gamma=\Gamma_1+\cdots+\Gamma_s$ 不过原点，于是 Γ 对原点的绕数

$$n(\Gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dw}{w}$$

为一整数，即

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{f'(z)}{f(z)}dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dw}{w}=n(\Gamma,0)$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\operatorname{Arg}w]_{\Gamma}=\frac{1}{2\pi i}[\operatorname{Arg}f(z)]_{L}$$

设 $f(z)$在 D 内零点 a_k 和极点 b_j 分别为 p_k 和 q_j 阶，$k=1,\cdots,m$；$j=1,\cdots,n$，则

$$\varphi(z)=\frac{f(z)\prod_{j=1}^{n}(z-b_j)^{q_j}}{\prod_{k=1}^{m}(z-a_k)^{p_k}}$$

在 D 内解析，在 $\overline{D}$ 上无零点且连续，又 $\varphi'(z)$也在 $\overline{D}$ 上连续，于是

* Γ_j 可能自身相交，但不影响结果.

$\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$在 D 内解析，$\overline{D}$ 上连续，而 L 经变换 $\zeta=\varphi(z)\neq 0$ 变为不经过原点的曲线 $\tilde{\Gamma}$，由柯西定理，

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}}\frac{d\zeta}{\zeta}=n(\tilde{\Gamma},0)\\&=\frac{1}{2\pi i}[\mathrm{Arg}\varphi(z)]_L\\&=\frac{1}{2\pi}[\mathrm{Arg}f(z)]_L+(q_1+\cdots+q_n)-(p_1+\cdots+p_m)\\&=\frac{1}{2\pi}[\mathrm{Arg}f(z)]_L+P-N.\end{aligned}$$ 证毕.

2.3　第一类无界多连通域留数定理

定义 2.2　设 $f(z)$在 $R<|z|<+\infty$内解析，取任一圆周 L：$|z|=\rho(\rho>R)$的积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L^-}f(z)dz$$

称为 f 在∞的留数，记为

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L^-}f(z)dz \tag{2.11}$$

其中 L^-取顺时针方向.

由 $f(z)$在∞邻域罗朗展式类似得到

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\alpha_{-1} \tag{2.12}$$

设∞是 $f(z)$的可去奇点，这时 $\mathrm{Res}(f,\infty)$不一定为零，这是因为∞附近罗朗展式中正幂项系数为零，而 α_{-1}并不知道是否为零. 这一点是不同于有穷可去奇点的地方.

关于∞点的留数，我们有以下结果. 设∞点附近

$$f(z)=z^n\varphi(z),\qquad n\text{ 为整数}$$

$\varphi(\infty)\neq 0$，$\varphi(z)$在∞解析，称 f 在∞有 n 阶. 即∞点附近有

$$f(z)=z^n\left(\beta_0+\frac{\beta_{-1}}{z}+\frac{\beta_{-2}}{z^2}+\cdots\right),\quad \beta_0\neq 0 \tag{2.13}$$