



KNOWLEDGE
TREE

2011 知识树考研

文登培训学校策划

考研 数学 基础

陈文灯等教授几十年的教学结晶：

——深入、精辟、透彻；

——授之以渔，触类旁通；

——开拓视野，步步登高。

核 心 讲 义

(理工类)

主 编 / 陈文灯

副主编 / 殷先军 王 莉 武海燕



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

013-44

74

文登培训学校策划



KNOWLEDGE TREE

2011 知识树考研

考研 数学 基础

主 编 / 陈文灯

副主编 / 殷先军

王 莉

武海燕

核 心 讲 义

(理工类)

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

2011年考研数学基础核心讲义:理工类 / 陈文灯主编. —北京:北京理工大学出版社,2010.1
ISBN 978-7-5640-2976-0

I. ①2… II. ①陈… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 242023 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京柯蓝博泰印务有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 26.75

字 数 / 522 千字

版 次 / 2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷

定 价 / 45.00 元

责任校对 / 陈玉梅

责任印制 / 母长新

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

数学是一门建立在基本概念、基本理论基础之上的推理演绎科学。有人把学数学比喻成爬台阶,下面几级上不去,就无法再向上爬了,很有道理。只有打好坚实的基础,才有可能掌握运算的方法和技巧。由于种种原因,有的同学还存在概念没吃透,理论没充分理解的欠缺。为此根据我们几十年的教学和考研辅导经验,编写这本与“教科书”平行,又略有提高,着重于引领同学们深入理解概念和基础理论的书。本书特点:

1. 文字叙述通俗易懂,深入浅出,使同学们对基本概念和基本理论理解得更深入更透彻。
2. 发掘出同学们认识和理解的死角和误区,通过例题的讲解,起到正本清源,拨乱反正的作用。
3. 为了引起同学们的注意,对有些概念、定理,还增加了注释,虽然只是寥寥数字,却有画龙点睛、开阔眼界、拓宽思路之功效。
4. 通过对精选例题的讲解收到正面的引导,有时也举些反例,起到反面的警示。
5. 针对线性代数、概率与统计公式比较多,难记忆的特点,采用表格法,使之一目了然。

本书对考研学生打基础很有参考价值,对在读本科生、大专生也是良师诤友,本书中有些处理不当的请同仁批评指正。

编 者

2009年12月

目 录

第 1 篇 高等数学

第 1 章 函数、极限和连续	1
1.1 函数	1
一、函数的基本概念	1
二、函数的基本性质	4
三、反函数、隐函数和复合函数	7
四、分段函数	11
五、初等函数	11
1.2 极限	13
一、数列的极限	13
二、函数的极限	16
三、无穷小、无穷大和无穷小量阶的比较	22
1.3 函数的连续性与间断点	25
一、函数的连续性	25
二、间断点	27
三、闭区间上连续函数的性质	28
习题一	30
第 2 章 导数与微分	33
2.1 导数与微分	33
一、基本概念、性质和定理	33
二、导数公式和运算法则	36
三、反函数、复合函数和隐函数的求导法则	37
四、微分	38
五、高阶导数	39
六、参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 所确定的函数的导数	41

2.2 各种函数的导数的解法	42
一、幂指函数的导数	42
二、函数表达式为若干因子连乘积或商形式的函数的导数或微分的求法	43
三、分段函数的导数	43
2.3 重要结论	44
习题二	45
第 3 章 微分中值定理和导数的应用	47
3.1 微分中值定理	47
一、罗尔定理	47
二、拉格朗日中值定理和柯西中值定理	50
三、泰勒定理	53
3.2 洛必达法则	54
一、 $\frac{0}{0}$ 未定式	54
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	55
三、其他未定式 $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$ 的计算	57
3.3 导数的应用	58
一、过定点的曲线的切线和法线方程	58
二、函数单调性的判别	59
三、函数的极值和最值	60
四、曲线的凹凸性和拐点	62
五、曲线的渐近线	63
六、函数作图及函数图形与其导函数图形的关系	64
七、曲率	65

习题三	67	二、 平面图形的面积	105
第4章 不定积分	70	三、 旋转体的体积	107
4.1 不定积分的基本概念和性质	70	四、 旋转体的侧面积	108
一、 原函数和不定积分的概念	70	五、 已知截面面积的立体的体积	109
二、 基本积分公式	72	六、 平面曲线的弧长	109
三、 不定积分的基本运算法则	73	七、 一元积分在物理上的应用	109
4.2 不定积分的计算方法	74	习题五	111
一、 不定积分的换元积分法	74	第6章 向量代数与空间解析几何	114
二、 不定积分的分部积分法	78	6.1 向量代数	114
4.3 各种函数的不定积分	80	一、 向量概念及坐标表示	114
一、 有理函数的积分	80	二、 向量的运算	115
二、 三角函数有理式 $\int R(\sin x, \cos x) dx$ 的 积分	81	三、 两个向量的关系	117
三、 含无理式的不定积分	84	6.2 空间平面方程和空间直线方程	118
四、 分段函数的不定积分	85	一、 平面方程的几种形式	118
五、 复合函数的不定积分	86	二、 空间直线方程的几种形式	119
习题四	87	三、 平面与平面、平面与直线、直线与直 线的关系	119
第5章 定积分和反常积分	90	四、 平面方程和直线方程的计算	121
5.1 定积分的概念和性质	90	6.3 曲面方程与空间曲线方程	124
一、 定积分的概念	90	一、 曲面方程基本概念	124
二、 定积分的性质	91	二、 空间曲线方程	125
5.2 定积分的计算	94	三、 柱面	125
一、 微积分基本公式	94	四、 投影曲线	126
二、 定积分的换元法和分部积分法	95	五、 旋转曲面	128
三、 定积分计算中的常用公式	97	六、 二次曲面	129
四、 分段函数的定积分	99	习题六	131
五、 杂例	101	第7章 多元函数微分学及应用	134
5.3 反常积分及计算	102	7.1 多元函数、极限和连续	134
一、 无穷区间上的反常积分	102	一、 多元函数的概念	134
二、 无界函数的反常积分(或瑕积分)	103	二、 二元函数的极限和连续	135
三、 计算反常积分的步骤	104	7.2 二元函数偏导数、全微分	137
5.4 定积分的应用	105	一、 偏导数	137
一、 微元法	105	二、 全微分	139
		7.3 多元复合函数和隐函数微分法	143

一、多元复合函数微分法	143	三、两种曲线积分的关系	186
二、多元隐函数微分法	147	四、格林公式及其应用	187
7.4 多元函数的极值、条件极值和最大值、最小值	149	9.2 曲面积分	190
一、基本概念和定理	149	一、对面积的曲面积分	191
二、极值的求法	150	二、对坐标的曲面积分 $\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz$	
7.5 空间曲线的切线和法平面(数二不作要求)	153	$+ Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dx dy$	192
一、空间曲线的切线和法平面	153	三、两种曲面积分的关系	195
二、曲面的切平面和法线	153	四、高斯定理及其应用	196
习题七	154	9.3 场论初步	198
第8章 重积分	157	一、方向导数	198
8.1 二重积分	157	二、梯度	198
一、二重积分的概念	157	三、散度	198
二、二重积分的基本性质	158	四、旋度	199
三、二重积分的计算	160	五、通量	199
四、分段函数的二重积分	166	习题九	200
8.2 三重积分(数二不作要求)	168	第10章 无穷级数	203
一、概念	168	10.1 数项级数	203
二、直角坐标系下三重积分的计算	168	一、级数的概念	203
三、柱坐标系下三重积分的计算	170	二、正项级数收敛性的判别	205
四、球坐标系下三重积分的计算	171	三、交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, (u_n > 0)$ 与莱布尼茨定理	208
五、利用对称性或轮换对称性化简三重积分	172	四、任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \text{ 可正、可负、可 } 0)$ 的绝对收敛和条件收敛	209
8.3 重积分的应用	173	10.2 幂级数	211
一、求体积	173	一、函数项级数	211
二、求曲面面积	175	二、幂级数	212
三、求薄片或形体的质量、质心的坐标、转动惯量、引力	175	10.3 傅里叶级数	218
习题八	177	一、基本概念和定理	218
第9章 曲线积分与曲面积分	179	二、傅里叶级数的展开	218
9.1 曲线积分	179	习题十	220
一、对弧长的曲线积分	179	第11章 常微分方程	223
二、对坐标的曲线积分	183	11.1 微分方程的基本概念	223

一、微分方程	223	2.3 分块矩阵	259
二、常微分方程的解	223	2.4 初等变换	260
11.2 一阶微分方程	224	一、初等变换	260
一、可分离变量的微分方程	224	二、初等矩阵	261
二、齐次方程	224	三、矩阵的秩	262
三、一阶线性微分方程	227	习题二	264
四、伯努利方程(数二不作要求) ..	229	第3章 向量	268
五、全微分方程(数二不作要求) ..	229	3.1 向量	268
11.3 二阶线性微分方程	231	一、基本概念和运算法则	268
一、线性微分方程解的性质和结构定理	231	二、线性组合	269
二、可降阶的微分方程	232	三、线性相关和线性无关	269
三、常系数齐次和非齐次线性微分方程	233	四、向量组的等价	271
四、欧拉方程(数二不作要求)	237	五、向量组相关性的重要结论	271
习题十一	238	3.2 向量组的秩	272
第2篇 线性代数		一、极大线性无关组	272
第1章 行列式	241	二、向量组的秩	272
1.1 行列式的概念	241	3.3 向量空间	273
一、排列与逆序	241	一、向量空间的概念	273
二、 n 阶行列式定义	242	二、正交矩阵(数二不作要求)	275
三、特殊的行列式	242	习题三	277
1.2 行列式的性质和定理	243	第4章 线性方程组	280
一、行列式的性质	243	4.1 高斯消元法	280
二、行列式按行(列)展开定理	244	一、基本概念	280
1.3 行列式的计算	245	二、高斯消元法(用初等变换求线性方程组的解)	280
1.4 克莱姆法则	249	4.2 线性方程组解的结构、性质和判定	283
习题一	251	一、齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 的基础解系	283
第2章 矩阵	254	二、齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 的解判定定理、性质和结构定理	285
2.1 矩阵的概念	254	三、非齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = b$ 的解的判定定理、性质和结构定理	286
一、矩阵的概念和运算	254	四、两个线性方程组解之间的关系	288
二、方阵的行列式	256		
2.2 逆矩阵和伴随矩阵	257		
一、逆矩阵	257		
二、伴随矩阵	258		

4.3	线性方程组在向量中的应用	290
一、	向量的线性相关性	290
二、	向量组的线性表示的问题	291
习题四		293
第5章	特征值与特征向量	296
5.1	特征值与特征向量	296
一、	基本概念	296
二、	基本性质	296
三、	计算特征值与特征向量	297
5.2	相似矩阵与矩阵的对角化	299
一、	基本概念和性质	299
二、	矩阵的相似对角化的步骤	299
三、	实对称矩阵的相似对角化	301
习题五		302
第6章	二次型	306
6.1	基本概念和性质	306
一、	二次型的定义	306
二、	合同变换和合同矩阵	307
三、	二次型的标准形与规范形	308
四、	矩阵的等价、相似和合同的结论	313
6.2	正定二次型	314
习题六		316

第3篇 概率论与数理统计

第1章	随机事件与概率	319
1.1	基本概念与性质	319
一、	基本概念	319
二、	事件的概率和性质	321
1.2	古典概率	323
一、	古典概型	323
二、	几何概型	325
1.3	条件概率和三个概率计算公式	326
一、	条件概率	326

二、	三个概率计算公式	327
1.4	事件的独立性和贝努里概型	329
一、	事件的独立性	329
二、	贝努里(Bernoulli)概型	331
习题一		332
第2章	随机变量及其分布	335
2.1	基本概念和性质	335
一、	随机变量和分布函数	335
二、	离散型随机变量	336
三、	连续型随机变量	339
2.2	随机变量函数的分布	342
一、	离散型随机变量函数的分布	342
二、	连续型随机变量函数的分布	343
习题二		344
第3章	多维随机变量及其分布	349
3.1	基本概念	349
一、	二维随机变量的分布	349
二、	边缘分布	350
3.2	二维随机变量	350
一、	二维离散型随机变量	350
二、	二维连续型随机变量	354
三、	相互独立的随机变量	357
3.3	随机变量的函数分布 $Z = g(X, Y)$	359
习题三		363

第4章	随机变量的数字特征	369
4.1	一维随机变量的数字特征	369
一、	数学期望和方差	369
二、	重要结论和公式	371
三、	由随机试验给出的随机变量的数字特征的 计算	372
4.2	二维(多维)随机变量的数字特征	373
一、	两个随机变量函数的数学期望	373

二、协方差、相关系数和矩	373	一、 χ^2 分布	394
三、二维随机变量及其函数的数字特征 的计算	374	二、 t 分布	394
四、利用(0-1)分布求多维随机变量数 字特征	380	三、 F 分布	395
习题四	381	四、正态总体的抽样分布	395
第5章 大数定律与中心极限定理	385	五、统计量的数字特征	397
5.1 大数定律	385	习题六	399
一、切比雪夫不等式	385	第7章 参数估计与假设检验	401
二、大数定律	386	7.1 参数的点估计	401
5.2 中心极限定理	387	一、基本概念	401
一、列维-林德伯格定理	387	二、矩估计法	401
二、棣莫佛-拉普拉斯定理	388	三、最大似然估计法	402
习题五	390	四、估计量的性质	404
第6章 样本与抽样分布	392	7.2 参数的区间估计	406
6.1 数理统计的基本概念和结论	392	一、置信区间	406
一、总体与样本	392	二、正态总体的区间估计	406
二、统计量	393	7.3 假设检验(数三不作要求)	409
三、分位数	394	一、基本概念	409
6.2 三个常用统计量分布: χ^2 分布, t 分布 和 F 分布	394	二、常见正态总体的假设检验	410
		三、两类错误	414
		习题七	415

第 1 篇 高等数学

第 1 章 函数、极限和连续

基础知识与规律总结

1.1 函 数

一、函数的基本概念

1. 函数的概念

设 x 和 y 是两个变量, D 是实数集 \mathbf{R} 的非空子集. 若对任意的 $x \in D$, 变量 y 按照对应法则 f 总有一个确定的实数值与之对应, 则称 y 为定义在 D 上的一个函数. 通常记作

$$y = f(x), x \in D.$$

其中 x 为自变量, y 为因变量, D 称为函数的定义域, 有时记为 D_f .

全体函数值的集合 $Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

① 函数是一个变量对另一个变量的依赖关系.

如, 函数 $y = x^2, y = \sin x + 1, y = \ln x, y = \ln x^2$ 等.

② $y = c$ (c 为常数) 称为常函数.

2. 函数的定义域的求解

(1) 若函数是用解析式表示的, 则定义域是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数的集合;

(2) 若是根据实际问题建立的函数, 则定义域就是具有实际意义的实自变量值的集合.

常用函数的定义域:

$$y = \frac{1}{x}, \text{定义域为: } x \neq 0; y = \sqrt[n]{x} (n \in \mathbf{N}), \text{定义域为: } x \geq 0;$$

$$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1), \text{定义域为: } x > 0;$$

$$y = \sin x \text{ 或 } y = \cos x, \text{定义域为: } (-\infty, +\infty);$$

$$y = \tan x, \text{定义域为: } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z};$$

$$y = \cot x, \text{定义域为: } x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z};$$

$$y = \arcsin x \text{ 或 } y = \arccos x, \text{定义域为: } [-1, 1].$$

【例 1.1】求下列函数的定义域:

$$(1) y = \log_{x-1}(9-x^2);$$

$$(2) y = \sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{4}}.$$

【解】(1) 函数若要有意义,必满足以下条件:

$$\begin{cases} 9-x^2 > 0 \\ x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}, \text{故函数的定义域为: } \{x \mid 1 < x < 2 \text{ 或 } 2 < x < 3\}.$$

(2) 函数若要有意义,必满足以下条件:

$$\begin{cases} \arcsin x - \frac{\pi}{4} \geq 0 \\ |x| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}, \text{故函数的定义域为: } \left\{x \mid \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 1\right\}.$$

一般给出函数表达式时,并不写出它的定义域,但是隐含定义域.

如,给出函数 $y = \frac{1}{x}$,就隐含了 $x \neq 0$.

3. 函数的值域的求解

(1) 由多项式表达的函数,一般用配方法或判别式法求函数的值域.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \text{ 有实数解} \Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac \geq 0.$$

若 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$,则 $f(x)$ 无实数解.

(2) 通过求反函数的定义域来求原函数的值域.

(3) 若含三角函数,可利用某些三角函数的有界性.

(4) 利用连续函数在闭区间上存在最值来求函数的值域.(1.3节讲)

【例 1.2】求下列函数的值域:

$$(1) y = 3 - \sqrt{x^2 - 4x + 9};$$

$$(2) y = \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2};$$

$$(3) y = \frac{x+1}{x-1};$$

$$(4) y = 3 - 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$(5) y = \frac{5}{2x^2 - 4x + 3}.$$

【解】(1) 应用配方法,则 $y = 3 - \sqrt{(x-2)^2 + 5}$,

故函数的值域为: $(-\infty, 3 - \sqrt{5}]$.

$$(2) y = \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} = 1 - \frac{4}{\sin x + 2}, \text{而 } -1 \leq \sin x \leq 1,$$

$$\text{所以 } 1 \leq \sin x + 2 \leq 3, \frac{1}{3} \leq \frac{1}{\sin x + 2} \leq 1,$$

$$\text{即 } -3 \leq y \leq -\frac{1}{3}, \text{故函数的值域为: } \left[-3, -\frac{1}{3}\right].$$

(3) 当 $x \neq -2$ 时,由原式可得 $x = \frac{1-2y}{y-1}$,即 $y \neq 1$.

故函数的值域为: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

(4) 由原式可得: $x = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3-y}{2} + \frac{\pi}{12}$, 因为 $\left| \frac{3-y}{2} \right| \leq 1$,

所以函数的值域为: $[1, 5]$.

(5) 变形为 $2yx^2 - 4yx + 3y - 5 = 0$, 则

$$\Delta = 16y^2 - 8y(3y - 5) \geq 0 \Rightarrow y(y - 5) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq 5.$$

4. 函数概念的两个要素: 定义域和对应法则

(1) 定义域: 自变量 x 的取值范围. $y = \arcsin(x^2 + 2)$ 不是函数, 因为 $x^2 + 2 > 1$.

(2) 对应法则: 给定 x 值, 求 y 值的方法.

① 当且仅当其定义域和对应法则完全相同时, 两个函数才表示同一个函数 (或称两个函数等价), 否则表示两个不同的函数.

② 函数的表示法只与定义域和对应法则有关, 而与用什么字母表示无关, 称为函数表示的无关特性. 此法常用来求函数的表达式.

【例 1.3】 在下列各组函数中, 找出两个函数等价的一组.

(1) $y = x^0$ 与 $y = 1$;

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 与 $y = \sqrt{x^2}$;

(3) $y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^3}}$;

(4) $y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$.

【解】 (1) $y = x^0$ 的定义域为 $\{x \neq 0\}$; $y = 1$ 的定义域为实数集 \mathbf{R} , 故该组的两个函数不等价.

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x \geq 0\}$; $y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为实数集 \mathbf{R} , 故该组的两个函数不等价.

(3) 两个函数的定义域均为 $\{x \neq 0\}$, 且对应法则相同, 故该组的两个函数等价.

(4) 要使 $y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 有意义, 则要求 $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$, 即定义域为 $\{x \geq 3\}$; 要使 $y = \sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$

有意义, 则要求 $\begin{cases} \frac{x-3}{x-2} \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$, 即定义域为 $\{x \geq 3 \text{ 或 } x < 2\}$, 故该组的两个函数不等价.

【例 1.4】 设 $f(\tan x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}$, 求 $f(x)$.

【分析】 对 $f(g(x)) = h(x)$, 一般令 $g(x) = t$, 求出 x 关于 t 的表达式, 代入 $h(x)$, 然后利用函数的表示无关特性求函数的表达式.

【解】 $f(\tan x) = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x + \tan^2 x = 1 + 2\tan^2 x$, 令 $\tan x = t$, 有 $f(t) = 1 + 2t^2$.

于是 $f(x) = 1 + 2x^2$.

【例 1.5】 设 $f(\cos^2 x) = \cos 2x - \cot^2 x$, $0 < x < 1$, 求 $f(x)$.

【解】 $f(\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 - \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$,

令 $t = \cos^2 x$, 则 $f(t) = 2t - 1 - \frac{t}{1-t}$, $\cos^2 1 < t < 1$.

故 $f(x) = 2x - 1 - \frac{x}{1-x} = 2x - \frac{1}{1-x}$, $\cos^2 1 < x < 1$.

二、函数的基本性质

1. 函数的奇偶性

(1) 定义.

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对任意 $x \in D$, 有

$$f(-x) = f(x) \text{ (或 } f(-x) = -f(x) \text{)}$$

则称函数 $f(x)$ 为关于自变量 x 的偶函数(或奇函数).

① 奇、偶性是函数的整体性质, 对整个定义域而言. 奇、偶函数的定义域一定关于原点对称, 如果一个函数的定义域不关于原点对称, 则这个函数一定不是奇(或偶)函数. 所以判断函数的奇偶性, 首先是检验其定义域是否关于原点对称, 然后再严格按照奇、偶性的定义经过

化简、整理, 再与 $f(x)$ 比较得出结论. 如, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, 因为其定义域关于原点对称, 它就不具有奇偶性.

② 偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称; 奇函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称.③ $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 是奇函数的有效方法. 若 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $x = 0$ 处有定义, 则 $f(0) = 0$.④ $f(x) \equiv 0$ 既是奇函数又是偶函数. $f(x) \equiv c (c \neq 0)$ 是偶函数.

(2) 奇偶函数的运算性质.

① 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数.

② 偶数个奇(或任意多个偶)函数之积为偶函数; 奇数个奇函数之积为奇函数.

③ 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.

④ 非零的一个奇函数和一个偶函数的和是非奇非偶的.

常见的偶函数: 常函数 $y = c$, $|x|$, $\cos x$, x^{2n} (n 为正整数), e^{x^2} , $e^{|x|}$, $e^{\cos x}$, \dots .常见的奇函数: $\sin x$, $\tan x$, $\frac{1}{x}$, x^{2n+1} (n 为正整数), $\arcsin x$, $\arctan x$, $\operatorname{sgn} x$, \dots .**【例 1.6】** 判别下列函数的奇偶性.

(1) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

(2) $f(x) = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right)$, 其中 $a > 0, a \neq 1, F(x)$ 为奇函数;

(3) $f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x > 0 \\ x(1+x), & x < 0 \end{cases}$.

【解】 (1) $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

$$(2) \text{ 令 } G(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } G(-x) = \frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1 - a^x} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } G(x) + G(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0.$$

所以 $G(x)$ 是奇函数, 又 $F(x)$ 是奇函数, 而偶数个奇函数的乘积是偶函数, 所以 $f(x)$ 是偶函数.

$$(3) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } f(-x) = -x[1 + (-x)] = -x(1 - x) = -f(x);$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } f(-x) = -x[1 - (-x)] = -x(1 + x) = -f(x).$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

【例 1.7】 证明: 定义在对称区间 $(-a, a)$ 内的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

【证】 设 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内有定义, 令

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)],$$

$$\text{因为 } \varphi(-x) = -\varphi(x), \psi(-x) = \psi(x),$$

$$\text{所以 } \varphi(x) \text{ 是奇函数, } \psi(x) \text{ 是偶函数, 而 } f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

故命题得证.

● 这个结论要记住, 以后用起来方便.

2. 周期性

(1) 定义.

设函数 $f(x)$ 的定义域为数集 D , 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使得对任意 $x \in D$, 恒有

$$f(x + T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

$$f(x - T) = f(x) \text{ 也是成立的.}$$

(2) 周期函数的运算性质.

① 若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax + b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

② 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的周期函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数.

③ 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2 (T_1 \neq T_2)$ 为周期的周期函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 一般是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的周期函数 (正弦函数与余弦函数的和或差不满足此性质, 如 $|\sin x| + |\cos x|$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$).

常见的周期函数: $\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$;

$$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|, \text{ 其周期 } T = \pi.$$

【例 1.8】 求 $f(x) = x - [x]$ 的最小周期.

【解】 设 $x = n + r, m$ 为正整数, 则

$$f(x + m) = f(m + n + r) = m + n + r - [m + n + r]$$

$$= m + n + r - m - [n + r] = n + r - [n + r] = f(x),$$

故一切正整数 m 都是 $f(x)$ 的周期,且最小周期为 1.

周期函数并不一定有最小周期,如对于常函数,任意正数都是它的周期;对于狄利克莱函数,任意正有理数都是该函数的周期,所以常函数和狄利克莱函数都不存在最小正周期.

【例 1.9】 设函数 $y = f(x), x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于直线 $x = a, x = b$ 均对称 ($a < b$), 求证: $y = f(x)$ 是周期函数, 并求其周期.

【证】 由题设, $f(a+x) = f(a-x), f(b+x) = f(b-x)$,

$$\begin{aligned} \text{于是 } f(x) &= f[a+(x-a)] = f[a-(x-a)] = f(2a-x) \\ &= f[b+(2a-x-b)] = f[b-(2a-x-b)] \\ &= f[x+2(b-a)]. \end{aligned}$$

故 $y = f(x)$ 是周期函数, 且周期 $T = 2(b-a)$.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义, 若存在 $M > 0$, 使得对任意 $x \in D$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有界, 数 M 称为 $f(x)$ 的一个界; 若不存在这样的正数 M , 则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

若存在 M_1 , 对任意 $x \in D$, 恒有 $f(x) \leq M_1$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界, 且 M_1 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个上界.

若存在 M_2 , 对任意 $x \in D$, 恒有 $f(x) \geq M_2$, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界, 且 M_2 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的一个下界.

① 有界性是相对于某个区间而言的, 是局部概念.

如, $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 是无界的, 但在 $[0.01, 2]$ 是有界的.

② 函数在 D 上有界的充分必要条件是函数在 D 上既有上界又有下界.

六个常见的有界函数:

$$|\sin x| \leq 1; |\cos x| \leq 1, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$|\arcsin x| \leq \pi/2; |\arccos x| \leq \pi, x \in [-1, 1];$$

$$|\arctan x| < \pi/2; |\operatorname{arccot} x| < \pi, x \in (-\infty, +\infty).$$

4. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若对任意 $x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ (或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

① 函数 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加时, $x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号相同, 即

$$(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) > 0.$$

函数 $f(x)$ 在区间 X 上单调减少时, $x_1 - x_2$ 与 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号相反, 即

$$(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0.$$

① 单调性也是相对于某个区间而言的,是局部概念.

② 单调函数的反函数仍单调,且单调性相同.

③ 复合函数 $f(g(x))$ 的单调性有如下结论:

若 f, g 的单调性相同,则 $f(g(x))$ 单增;若 f, g 的单调性相反,则 $f(g(x))$ 单减.

【例 1.10】 设 $f(x)$ 为定义在 $(-a, a)$ 内的奇函数,若 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加,证明 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加.

【证】 任意 $x_1, x_2 \in (-a, 0)$, 且 $x_1 < x_2$, 则 $-x_1, -x_2 \in (0, a)$ 且 $-x_1 > -x_2$.

由于 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 内单调增加,故 $f(-x_1) > f(-x_2)$,

又由于 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内是奇函数,则 $-f(x_1) > -f(x_2)$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

故 $f(x)$ 在 $(-a, 0)$ 内也单调增加.

奇函数若在某区间单调增加(或减少),则在对称区间也是单调增加(或减少);

偶函数若在某区间单调增加(或减少),则在对称区间也是单调减少(或增加).

三、反函数、隐函数和复合函数

1. 反函数

(1) 定义.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D_f , 值域为 Z_f , 若对任意 $y \in Z_f$, 有唯一确定的 $x \in D_f$ 满足 $y = f(x)$, 则称 x 是定义在 Z_f 上以 y 为自变量的函数, 记为

$$x = f^{-1}(y) \text{ (或 } x = \varphi(y)),$$

并称 $x = f^{-1}(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 而 $y = f(x)$ 是 $x = f^{-1}(y)$ 的直接函数. 习惯上 $y = f(x)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x), x \in Z_f$.

① $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的图像重合; 而 $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称(均是在同一坐标系)

② $y = f(x)$ 的定义域是其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的值域.

③ 只有自变量与因变量一一对应的函数才有反函数. 定义域上单调的函数必有反函数. 若要求函数的反函数, 则只能求它的单调区间的反函数.

④ $y = f(f^{-1}(y)), x = f^{-1}(f(x))$.

⑤ 奇函数的反函数也是奇函数.

⑥ 原函数与反函数具有相同的单调性.

(2) 计算反函数, 步骤如下:

① 把 x 从方程 $y = f(x)$ 中解出, 得到 $x = f^{-1}(y)$;

② 将刚才得到的表达式中的字母 x 与 y 对换, 即得所求函数的反函数 $y = f^{-1}(x)$, 注意要写出定义域.

若求分段函数的反函数, 只要求出各区间段的反函数及定义域即可.

【例 1.11】 求 $y = \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}$ 的反函数.