经济管理类专业

陈永庆 编著

高等数学（一）
自学考试解题指导书

中国商业出版社

高等数学自学考试解题指导书

陈永庆　编著

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学自学考试解题指导书/陈永庆编著．—北京：中国商业出版社，1996.10

ISBN7—5044—3308—X

Ⅰ．高… Ⅱ．陈… Ⅲ．高等数学—解题—高等教育—自学考试—教学参考资料 Ⅳ．013—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 18660 号

责任编辑：何敬福
责任校对：陈永庆
装帧设计：郭同桢

中[illegible]商业出版[illegible]出版[illegible]行
(10[illegible]053 北京广安门内报[illegible]寺1[illegible])
新[illegible]书店总[illegible]京发[illegible]所[illegible]销
蚌埠[illegible]书刊发[illegible]限公[illegible]照排
中国[illegible]石[illegible]厂[illegible]印刷
850×1168毫米 [illegible] 字数：312千字
1996年10月第[illegible] 1996[illegible]11月第1次印刷
印数：1—5000册 定价：12.80元

* * * *

(如有印装质量问题可更换)

编审说明

本书由我院陈永庆副教授根据全国高等教育自学考试教材《经济管理类专业高等数学(一)微积分》编写而成。旨在帮助学员全面、系统地掌握该门学科知识,增强解题能力,提高应试水平。书中比较系统、全面地介绍了各种类型习(试)题的解题方法和注意事项,是作者对参加十余次自考阅卷情况进行深入分析研究之后编写而成的。

全书共分函数及其图形、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、积分、无穷级数、多元函数微积分、微分方程初步八章。各章各分为若干个课题,在每一个课题中均有解题提要,以便对有关知识(概念、性质、定理等)进行回顾,指明解题方法及注意事项;并通过大量例题指导学员掌握解题方法与解题技巧,所有例题均在分析的基础上予以解答。每章均配有练习题,并在书后附有答案或解答。全书例题及习题所涉及的内容基本上涵盖了历年来自学考试试题的内容。

本书最后还附录了:1994年(下)、1995年(下)、1996年(上、下)全国自学考试试题;1986~1996十年试题分值逐章分布表;《高等数学(一)》习题、复习题选解等。

本书力求以全国高等教育自学考试指定教材为基础,针对应试者在自学中经常遇到的难点、应掌握的重点及考试时易犯的共性错误等方面的问题予以详尽解答和剖析。为使读者能够较快地掌握解题方法与解题技巧,突出解题规范化,全书注意介绍主、客观性命题解法的区别,并尽可能提供用观察法求解的方法。书中客观性命题(单项选择题、填空题)占有较大篇幅。

本书在编写过程中，借鉴了一些国内出版的高等数学教材和自学指导书，得到安徽财贸学院杨桂元、徐品修、王新颖、姚超等同志的大力支持，在此谨向他们表示衷心的感谢！

对于书中错误与不足之处，恳请广大读者不吝批评指正，以便不断修订完善。

安徽财贸学院高等教育自学考试办公室

1996 年 11 月

目 录

第一章　函数及其图形

§1.1　集合　区间　邻域

【解题提要】

元素与集合之间只存在属于或不属于两种关系；包含或包含于只是两个集合间一种特殊的关系。

若元素 a 属于集合 A 时，必有元素 a 属于集合 B，记作 $a \in A \Rightarrow a \in B$（注 1）[①]，则称集合 A 包含于集合 B（或称集合 B 包含集合 A），记作 $A \subset B$（注 2）[②]。

集合 A 与 B 的并集是：

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

集合 A 与 B 的交集是：

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

对于任何两个集合 A 与 B 及空集 $\varnothing$，有如下关系：

$$\varnothing \subset A \subset A \cup B, \qquad \varnothing \subset B \subset A \cup B$$

---

① 注 1　命题“有 A 就有 B”，记作 A⇒B。在这个命题中，“有 A”是“有 B”的充分条件；“有 B”是“有 A”的必要条件。A⇔B 表示“有 A”与“有 B”互为充分必要条件。由于原命题和它的逆否命题是等价的，所以“A⇒B”⇔“无 B⇒ 无 A”。

② 注 2　有在些教材中，集合间的包含关系中，又区分出一种真包含关系，即：若 A 是 B 的子集，且在 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，或 A 真包含于 B。为了区别，用符号 $\subset$ 表示真包含；用 $\subseteq$ 表示通常意义下的包含关系（含真包含）。

$$A \cap B \subset A, \qquad A \cap B \subset B$$

区间是一些特殊的集合,它们是数轴上的一条线段或者是射线,甚至是整个数轴。

点 x_0 的 $\delta(>0)$ 邻域是集合 $\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$,是数轴上到点 x_0 的距离小于 δ 的点的集合,它是一个开区间,即 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$。

【例 1】 (单项选择)如果集合 A 和 B 满足 $A \cup B = B$,那么,A 与 B 的关系必是(　　)

①$A = B$　　②$A \subset B$　　③$A \subseteq B$　　④$A \supset B$

分析　　本题应区分真包含与一般包含。A 是 $A \cup B$ 的子集,即 A 是 B 的子集,而且这一结论对于 $A = B$ 或 $A \subset B$ 时都是成立的。

答:(③)(**注** 3)[①]

【例 2】 (单选)如果集合 $A = \{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$,下列集合中哪个集合与 A 相等(　　)

(A)$\{x \mid x(x+1) = 0\}$　　(B)$\{x \mid x^2(x^2 - 1) = 0\}$

(C)$\{x \mid (x-1)(x^2 - 1) = 0\}$　　(D)$\{x \mid e^x(x^2 - 1) = 0\}$

分析　与 A 相等的集合是与 A 的元素完全相同的集合。集合 A 与备选答案中的集合的元素都是方程的根,正确答案中的方程应与 A 中的方程 $x(x^2 - 1) = 0$ 等价。

答:((B))(**注** 4)[②]

---

① **注** 3　单项选择题(以后简称单选)中的备选答案都是命题,作为命题,只存在真命题与假命题两种情况,而且,对于命题,只要存在一种不正确的情况,它就是假命题。

② **注** 4　在解单项选择题时,由于它的备选答案中只有一个是正确的,因而在确定了一个正确答案以后,其余的备选答案就可以不必再考虑了。如在例 3 中,已经确定了(B)是正确的,(C)和(D)就可以不考虑了。需要声明的是:在本书中,为了加深读者对问题的理解,在分析时,也会对错误的备选答案作些说明。

【例 3】（单选）设集合 $E = \{X \mid |x| \leqslant 1\}$，$F = \{x \mid x^2 - 1 < 0\}$，则有下列关系（　　）

$(A) E \subset F$　　$(B) E \supset F$　　$(C) E = F$　　$(D) E \cap F = \varnothing$

分析　$F = \{x \mid |x| < 1\}$.

答：（(B)）

【例 4】（单选）设有集合 $E = \{1,2,3,4\}$，$F = \{1,2,5,6\}$ 和 $H = \{4,7\}$，则 $(E \cup F) \cap H =$（　　）

A. $\{1,2,3,4,5,6\}$　　B. $\{4\}$　　C. $\{1,2,4,7\}$　　D. $\varnothing$

分析　E、F、H 都是元素个数有限的有限集合。在求两个有限集合的并集时，先写出元素个数较多的那个集合中的所有元素，再补充仅仅属于另一个集合的所有元素；在求两个有限集合的交集时，可逐个判定元素个数较少的集合的元素，是否也是另一个集合的元集。对于本题，只需判定 H 中的两个元素 4 与 7 是否为 E 或 F 的元素即可得解。

答：(B)

【例 5】（填空）设集合 $M = \{x \mid -2 \leqslant x < 4\}$，$N = \{x \mid -1 < x < 6\}$，则 $M \cup N =$ ________.

分析　M 与 N 是用不等式表示的无限集合，是区间。它们的并集与交集可以通过示意图来求得。（注 5）[①]

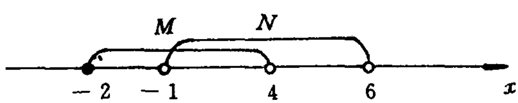

图　1—1

---

① **注 5**　在画示意图时，只需注意两点的相对位置，不必关心它们的实际距离。求并集时，可将集合的符号记在数轴的同一侧；若求交集，可记在数轴的两侧。

由图得解。

答：$\{x|-2\leqslant x\leqslant 6\}$

【例 6】（单选）设 $M=\{x|x^2-x-6>0\}$，$R=\{x|x-1\leqslant 0\}$，则 $M\cap R=$（　　）

(A) $\{x|x>3\}$　　(B) $\{x|x<-2\}$

(C) $\{x|-2<x\leqslant 1\}$　　(D) $\{x|x\leqslant 1\}$

分析　$M=\{x|x<-2$ 或 $x>3\}$，$R=\{x|x\leqslant 1\}$，画出图 1—2，由图得解。

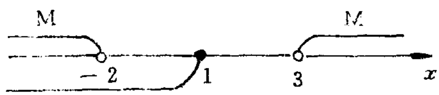

图　1—2

答：((B))

【例 7】（填空）$[(-1,2)\cap(0,2)]\cup[1,3]=$ ______.

分析　由图 1—3 可得解

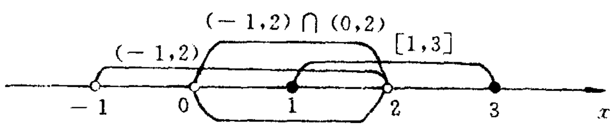

图　1—3

答：$[0,3]$

【例 8】（单选）用区间表示满足不等式 $|x|>|x-2|$ 的所有 x 的集合是（　　）

①$(-1,1)$　②$(1,+\infty)$　③$(-\infty,1)$　④$(-\infty,+\infty)$

分析　$|x|>|x-2| \Leftrightarrow |x|^2>|x-2|^2 \Leftrightarrow x^2>x^2-4x+4 \Leftrightarrow 4x>4 \Leftrightarrow x>1$

答:(②)

【例 9】（填空）点 $x_0=-2$ 的 $\delta=0.5$ 邻域是________；区间 (a,b) 是点 $x_0=$ ________ 的 $\delta=$ ________ 邻域。

分析　$x_0-\delta=-2-0.5=-2.5$，

$x_0+\delta=-2+0.5=-1.5$；

$$x_0=\frac{(x_0-\delta)+(x_0+\delta)}{2}=\frac{a+b}{2},$$

$$\delta=x_0-(x_0-\delta)=\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}。$$

答:$\underline{(-2.5,-1.5)}$；$\underline{\frac{a+b}{2}}$，$\underline{\frac{b-a}{2}}$

§1.2　函数的对应规则与定义域

【解题提要】

对应规则与定义域是函数的两个要素。两个函数当且仅当它们的对应规则与定义域均相同时，是同一函数。如函数 $u=f(v)(v\in D)$ 与 $y=f(x)(x\in D)$ 的对应规则都是 f，定义域都是 D，所以，这两个函数是同一函数。

函数的对应规则指明了由自变量得到因变量(即函数)的方法。在《高等数学》的教材中的函数的对应规则是用由数学式子组成的等式给出的。其中，用两个或两个以上的等式表示的函数，称为分段函数。

求函数的定义域时，应区分是用一个等式表示的函数，还是分段函数。对于前者，定义域是使函数表达式中的每一个数学式有意义的自变量的集合的交集。解题时，通常应考虑下列条件：

(1) 分母不为零；

(2) 偶次方根的根底式非负；

(3) 对数的真数大于零；当分母为对数函数时，真数还不能为 1；

(4) 正切、余切、正割、余割及反正弦与反余弦函数的自变量均应在其有意义的集合上取值。特别是对于 $\arcsin f(x)$ 及 $\arccos f(x)$ 均应有 $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$。

对于由 $y = f(u)$ 及 $u = g(x)$ 复合而成的复合函数 $y = f[g(x)]$，其定义域是 $\{x \mid x \in D_g$ 且 $g(x) \in D_f\}$。

分段函数的定义域与数学表达式无关，它是和每一个等式相对应的自变量的集合的并集。

【例 10】 (单选) 若 $f(x) = |1 + x| + \dfrac{(7 - x)(x - 1)}{|2x - 5|}$，则 $f(-2) = (\quad)$

(a) 4　(b) 8　(c) -2　(d) -4

分析　$f(-2) = |1 + (-2)| + \dfrac{[7 - (-2)](-2 - 1)}{|2 \times (-2) - 5|}$

$$= |-1| + \frac{9 \times (-3)}{|-9|}$$

$$= 1 + \frac{-27}{9} = -2$$

答：((c))

【例 11】 (单选) 设函数 $f(x) = x^3 - x^2 - 1$，则 $f[f(1)] = (\quad)$

① -1　② -3　③ 0　④ 1

分析　$f(1) = 1^3 - 1^2 - 1 = -1$，$f[f(1)] = f(-1)$

$$= (-1)^3 - (-1)^2 - 1 = -3$$

答：(②)

【例 12】 (填空) 设 $f(x) = \sin\alpha$，则 $f(x - 1) - f(1 - x) =$ ________.

分析　$f(x)$ 是常值函数，它在任何两点处的值均相等(均为

$\sin\alpha$)。

答：$\underline{\quad 0 \quad}$

【例 13】（单选）设函数

$$f(x)=\begin{cases}|2x+1|+\dfrac{|x-1|}{x+1}, & x\neq -1\\ 0, & x=-1\end{cases}，则 f(-2)=$$

(　　)

$A.\ -6$　　$B.\ 6$　　$C.\ 0$　　$D.\ 1$

分析　$-2\neq -1$，计算 $f(-2)$ 应用上面的表达式：

$$f(-2)=|2(-2)+1|+\frac{|-2-1|}{-2+1}=0$$

答：(C)

【例 14】（单选）设 $f(x-1)=x^2+1$，则 $f(x_0+h)=$ (　　)

$A.\ (x_0+h)^2+1$　　$B.\ (x_0+h)-1$

$C.\ (x_0+h)^2-1$　　$D.\ (x_0+h)^2+2(x_0+h)+2$

分析　设 $x-1=x_0+h$，则 $x=(x_0+h)+1$，于是

$$\begin{aligned}f(x_0+h)&=[(x_0+h)+1]^2+1\\&=(x_0+h)^2+2(x_0+h)+2\end{aligned}$$

答：(D)

【例 15】（填空）若 $f(2x-1)=x(x+1)$，则 $f(x)=$

________.

分析　设 $2x-1=t$，则 $x=\frac{1}{2}(t+1)$，于是

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2}(t+1)\left[\frac{1}{2}(t+1)+1\right]\\&=\frac{1}{4}(t+1)(t+3)。\end{aligned}$$

答：$\underline{\frac{1}{4}(x+1)(x+3)}$

【例 16】（填空）设 $f(x)=e^{(x-a)^2}$，$\varphi(x)=a+\cos x$，则 $f[\varphi(x)]=$ ________.

分析　$f[\varphi(x)] = e^{[\varphi(x)-a]^2} = e^{[(a-\cos x)-a]^2}$

答:$\underline{e^{\cos^2 x}}$

【例 17】（单选）设函数 $f(x) = x^2$,$g(x) = 2^x$,则 $f[g(x)] =$ ________.

(1)2^{x^2}　　(2)x^{2^x}　　(3)x^{2x}　　(4)2^{2x}

分析　$f[g(x)] = [g(x)]^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$

答:$\underline{(4)}$

【例18】（单选）设函数 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$,则当 $x \neq 1$ 且 $x \neq 0$ 时,$f(\dfrac{1}{f(x)}) = ($　　$)$

①$\dfrac{x-1}{x}$　　②$\dfrac{x}{x-1}$　　③$1-x$　　④x

分析　$$f(\frac{1}{f(x)}) = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}-1} = \frac{1}{1-f(x)} = \frac{1}{1-\frac{x}{x-1}}$$

$$\xlongequal{\text{分子、分母同乘}(x-1)} \frac{x-1}{(x-1)-x} = 1-x$$

答:(③)

【例 19】（单选）将函数 $f(x) = 2-|x-2|$ 表示为分段函数时,$f(x) = ($　　$)$

A.$\begin{cases} 4-x, & x \geqslant 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$　　B.$\begin{cases} 4-x, & x \geqslant 2 \\ x, & x < 2 \end{cases}$

C.$\begin{cases} 4-x, x \geqslant 0 \\ 4+x, x < 0 \end{cases}$　　D.$\begin{cases} 4-x, x \geqslant 2 \\ 4+x, x < 2 \end{cases}$

分析　令 $|x-2| = 0$,得分段点 $x = 2$,正确的答案,只可能是 B 或 D。当 $x < 2$ 时,$f(x) = 2-[-(x-2)] = x$.

答:(B)

【例 20】（填空）函数 $y = \dfrac{1}{|1-x|}$ 的定义域是________.

分析　$|1-x|\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \Leftrightarrow x<1$ 或 $x>1$

答：$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

【例 21】（单选）函数 $y=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域为（　）

(A)(0,1)　　　(B)(0,1) ∪ (1,4)

(C)(0,4)　　　(D)(0,1) ∪ (1,4]

分析　$D=\left\{x\middle|\begin{cases}x>0 \text{ 且 } x\neq 1\\ 16-x^2\geqslant 0\end{cases}\right\}$

$=\left\{x\middle|\begin{cases}x>0 \text{ 且 } x\neq 1\\ -4\leqslant x\leqslant 4\end{cases}\right\}=\{x|0<x\leqslant 4 \text{ 且 } x\neq 1\}$

答：((D))

【例 22】（单选）函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & |x|\leqslant 3\\ x^2-9 & 3<|x|<4\end{cases}$ 的定义域是（　）

A. [−3,4)　　B. (−3,4)　　C. [−4,4)　　D. (−4,4)

分析　$D=\{x||x|\leqslant 3\}\cup\{x|3<|x|<4\}=\{x||x|\leqslant 3$ 或 $3<|x|<4\}=\{x||x|<4\}=\{x|-4<x<4\}$

答：(D)

【例 23】（单选）设函数 $f(x)$ 的定义域为[0,2]，则函数 $f(x-1)$ 的定义域是（　）

A. [0,2]　　B. [−1,1]　　C. [1,3]　　D. [−1,0]

分析　$(x-1)\in[0,2]\Leftrightarrow 0\leqslant x-1\leqslant 2\Leftrightarrow 1\leqslant x\leqslant 3$

答：(C)

【例 24】（填空）设 $y=f(x)$ 的定义域是[0,1]，则 $f(x^2)$ 的定义域是________.

分析　$x^2\in[0,1]\Leftrightarrow 0\leqslant x^2\leqslant 1\Leftrightarrow x^2\leqslant 1\Leftrightarrow |x|\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$

答：[−1,1]