高等财经院校“十一五”精品系列教材

《线性代数》学习指导

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

郝秀梅　主编

经济科学出版社
Economic Science Press

高等财经院校“十一五”精品系列教材

《线性代数》学习指导

XIANXING DAISHU XUEXI ZHIDAO

郝秀梅　主编

经济科学出版社
Economic Science Press

责任编辑：吕　萍　张建光
责任校对：王肖楠
版式设计：代小卫
技术编辑：邱　天

图书在版编目（CIP）数据

《线性代数》学习指导／郝秀梅主编．—北京：经济科学出版社，2009.8
（高等财经院校“十一五”精品系列教材）
ISBN 978－7－5058－8379－6

Ⅰ．线…　Ⅱ．郝…　Ⅲ．线性代数－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 119554 号

《线性代数》学习指导
郝秀梅　主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：88191217　发行部电话：88191540
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
汉德鼎印刷厂印刷
永胜装订厂装订
787×1092　16 开　12.75 印张　230000 字
2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
印数：0001—4000 册
ISBN 978－7－5058－8379－6　定价：18.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

总　序

21世纪最短缺的是什么？人才。

大学是以人才培养和科学研究为己任，大学教育说到底是一种人文教育，大学是养育人文精神的地方。尽管科学研究是当今评价一所大学水平和地位的重要内容，但是，支撑科学研究的基础是人才的培养。一所大学要培养出优秀的、具有国际化和市场竞争意识的人才，教材是实现培养目标的关键环节。没有优秀的教材，就不可能有高水平的高等教育；没有高质量的人才培养，就不可能产生一流或特色鲜明的大学。中国的大学教育已从往日的“精英教育”走向“大众教育”，上大学不再是少数人的专利。在这种情况下，如何保证教学质量的稳定与提高？教材建设的功能愈显重要。

一本好的教材，既是教师的得力助手，又是学生的良师益友。尤其是在当今知识爆炸的21世纪。为了提高教学质量，深化教学改革，山东财政学院启动了“十一五”精品教材建设工程。该项工程以精品课程教材建设为目标，以重点学科（专业）培育为基础，集中全校优秀师资力量，编撰了高等财经院校“十一五”精品系列教材。

本系列教材在编写中体现了以下特点：

1. 质量与特色并行。为保证编写质量，本系列教材从选题、立项到编写、出版，每个环节都坚持“精品为先、质量第一、特色鲜明”的原则。严把质量关，突出财经特点，树立品牌意识，建设精品教材。

2. 教学与科研相长。教材建设要充分体现科学研究的成果，科学研究要为教学实践服务。两者相得益彰，互为补充，共同提高。本系列教材将各学科领域最新教学与研究成果进行提炼、吸收，实现了教

学、科研结合的大学教育目标。

3. 借鉴与创新并举。任何一门学科都会随着时代的进步而不断发展。因此，我们在教材编写中始终坚持“借鉴与创新结合”的理念，舍其糟粕，取其精华。在中国经济改革实践基础上进行创新与探索，充分展示了当今社会发展的新理论、新方法和新成果。

本系列教材是山东财政学院教学质量与教学改革工程建设的重要内容之一，适用于经济学、管理学及相关学科的本科教学。它凝聚了众多教授和专家多年教学的经验和心血，是大家共同努力的结晶。我们期望摆在读者面前的是一套优秀的精品教材。当然，由于我们的经验存在欠缺，教材中难免有不足之处，衷心期盼专家、学者及广大读者给予批评指正，以便再版时修改、完善。

高等财经院校“十一五”精品系列
教材建设委员会
2008 年 7 月

前　言

《线性代数》是高等财经院校重要的经济数学基础课之一，其理论与方法已经渗透到经济、信息、人文社科等各个领域．作为山东省精品课程、高等财经院校“十一五”精品系列教材《线性代数》的辅导教材，本书有以下几个特点：

1. 在内容和体系上与《线性代数》教材高度保持一致．本书每章均由内容提要、重点难点、习题类解、同步练习和习题解答五部分构成．内容提要部分力求对线性代数内容进行简要分析和概括，使之成为课堂讲授的补充和深化，让读者了解各章的重点难点；习题类解部分意在强化读者对知识的理解与掌握，帮助读者加深对概念的理解，培养读者的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力以及运用所学知识分析、解决问题的能力；同步练习部分（含填空题、选择题、计算题、证明题）考查读者对基本概念、基本理论、基本方法的运用与掌握；习题解答部分查验读者对本章知识的学习效果．

2. 适合多层次读者的需要．本书虽然主要是作为经济管理学科本科专业学生的学习辅导书，实际上也适用于其他专业类别的本、专科生的学习辅导及教师教学参考．同时，本书中有一定比例的例题与习题选自历年全国研究生考试试题中有代表性的题目，因此，本书也不失为一本系统的考研复习参考书．

3. 本书在涵盖《线性代数》教材全部内容的基础上，进行了深度扩展和延伸，使学有余力的学生达到丰富和扩充知识面的目的．习题类解部分中的一些例子或给出一题多解，或点拨以思路，或强调解法之重要，或突出重点与难点，希望读者能够独立思考、深入钻研，对这些习题给出更好的解答．

本书由山东财政学院统计与数理学院郝秀梅教授主编，谭香、王继强副主编．参加本书编写的有：郝秀梅、王继强（第1章）、谭香（第2、第4章）、王希泉（第3章）、王继强（第5章）、林英（第6章）．全书由郝秀梅提出总体编写框架，统一修改定稿．

在本书的编写过程中，我们参阅并借鉴了国内外线性代数教学和研究领域的相关图书文献资料，得到了山东财政学院教务处和经济科学出版社的大力支持，在此一并表示感谢.

由于编者水平所限，书中不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编者

2009年7月

目　录

第1章 行列式

内容提要

在数学发展史上，线性代数的第一个研究对象是线性方程组，行列式（determinant）正是在对线性方程组的研究过程中被提出并使用的一个重要工具．其实，行列式在工程技术和应用学科中有着超越线性方程组的更为广泛的应用．本章主要介绍行列式的概念、性质、计算以及与之相关的克莱姆（Cramer）法则等内容．这些关于行列式的基本理论是学习后续各章的基础．

一、n 阶行列式

行列式的概念最早是在 1683 年由日本数学家关孝和（Seki Kowa）在其著作《解伏题之法》中引入的．1693 年，德国数学家莱布尼兹（Leibnitz）在欧洲第一个提出了行列式的概念，他在写给法国数学家洛比达（L'Hospital）的信中首次使用了行列式的符号“| |”．关于行列式理论的最系统的论述当推德国数学家雅可比（Jacobi Jacob）于 1841 年所著的《论行列式的形成与性质》一书．

1. 二阶、三阶行列式

二阶、三阶行列式的概念是从初等数学中求解二元、三元线性方程组的问题中提出来的，其计算遵循对角线法则．

二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

四阶以上的行列式不满足对角线法则．

2. 排列与逆序

排列与逆序是为了介绍 n 阶行列式的概念而引入的．

n 级排列指的是自然数 1，2，…，n 的一个全排列，其中 $12\cdots n$ 称为标准排列．n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中大的在前、小的在后的两个数构成一个*逆序*，逆序的总个数称为*逆序数*，记作 $N(i_1i_2\cdots i_n)$．根据逆序数的奇偶性，排列有奇排列和偶排列之分．

两个重要的逆序数：$N(12\cdots n)=0$，$N(n(n-1)\cdots 21)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

关于逆序数的一个重要性质：$N(i_1i_2\cdots i_n)+N(i_n\cdots i_2i_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

互换排列中两个数的位置的变换称为一个*对换*．经一次对换，排列的奇偶性改变．n 级排列中奇、偶排列数目各半，均为$\dfrac{n!}{2}$.

3. n 阶行列式

n 阶行列式的定义：

$$D=|a_{ij}|_{n\times n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

（所有取自不同行不同列的 n 个元素之积的代数和）.

两种等价的定义：

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\ j_1j_2\cdots j_n}}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

行列式的三种不同形式的定义在本质上是相同的，即行列式是所有可能的来自不同行不同列的元素之积的代数和．

显然，二阶、三阶行列式分别是 n 阶行列式在 $n=2$、3 时的特例.

特别地，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

一些常用的行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

二、行列式的性质

行列式的性质主要是为简化行列式的计算而引入的，具体如下：

(1) 转置不改变行列式的值；

(2) 交换两行时，行列式的值变号；

(3) 两行元素对应相同时，行列式的值为0；

(4)（提公因子）某行元素都乘以数 k，等于以 k 乘以此行列式；

推论　某行元素均为0时，行列式的值为0.

(5) 两行元素对应成比例时，行列式的值为0；

(6)（拆项）某行元素均可表为 $m(m\geqslant 2)$ 个元素之和时，行列式可表为 m 个行列式之和；

(7)（加倍）某行元素的 k 倍对应加到另一行元素上时，行列式的值不变.

以上性质对列也同样成立.

三、行列式按行（列）展开

1. 余子式与代数余子式

在 $n(n\geqslant 2)$ 阶行列式 D 中，划去元素 a_{ij}所在的行和列，剩下的元素按原来的相对位置所构成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij}的余子式，记作 M_{ij}.

代数余子式：$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

2. 行列式按行（列）展开定理

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$（任一行各元素与其对应的代数余子式乘积之和）

$\quad=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$（任一列各元素与其对应的代数余子式乘积之和）.

异乘变零定理：

$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0\quad(i\neq s)$,

（某一行各元素与另一行对应元素的代数余子式乘积之和为0）

$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0\quad(j\neq t)$.

（某一列各元素与另一列对应元素的代数余子式乘积之和为0）

上述两个定理合记作：

（行）$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj}=\begin{cases}D, & i=s,\\ 0, & i\neq s.\end{cases}$$

（列）$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{it}=\begin{cases}D, & j=t,\\ 0, & j\neq t.\end{cases}$$

3*. 拉普拉斯（Laplace）定理

拉普拉斯定理虽为选学内容，但读者若能加以领会掌握，则对行列式计算能力的增强不无裨益. 首先，将元素的余子式与代数余子式的概念推广到 k 阶子式、余子式及代数余子式：

在 n 阶行列式 D 中，任意选定 k 行 k 列（$1\leqslant k\leqslant n$），其交叉处的 k^2 个元素按原来的位置所构成的 k 阶行列式 M 称为 D 的 k 阶子式，剩下的元素按原来的位置所构成的 $n-k$ 阶行列式 N 称为 M 的余子式.

代数余子式：$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}N$，其中 i_1，i_2，…，i_k 和 j_1，j_2，…，j_k 分别为 k 阶子式 M 在 D 中的行标和列标.

拉普拉斯定理：$n(n\geqslant 2)$ 阶行列式 D 的值等于在 D 中任取 k 行（列），由这 k 行（列）元素所构成的所有 k 阶子式与其代数余子式乘积之和．

显然，行列式按行（列）展开定理是拉普拉斯定理在 $k=1$ 时的特例．

四、行列式的计算

行列式的计算问题类型多样，方法不一，主要有：按行（列）展开、化为上（下）三角行列式、降阶法（化高阶行列式为低阶行列式）、递推关系式法、数学归纳法、加边法等．读者应多加练习，以求逐渐积累经验，达到熟能生巧之目的．

另外，记住一些常见的结论对于计算行列式也是非常必要和有益的，如：

对称行列式：

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{n\times n} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

范德蒙德（Vandermonde）行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

奇数阶反对称行列式的值为 0.

五、克莱姆（Cramer）法则

1750 年，瑞士数学家克莱姆（Cramer）在其著作《线性代数分析导引》中首次给出了一个求解一类特殊的线性方程组的方法，后被称为克莱姆法则，其内容是：

含 n 个方程 n 个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

时有惟一解：$x_j=\dfrac{D_j}{D}$，$j=1$，2，…，n，其中 D_j 是将 D 的第 j 列换为 b_1，b_2，…，b_n，其余列不变所得到的行列式．

克莱姆法则的条件是：线性方程组的方程的个数等于未知量的个数，且系数行列式不等于零．

克莱姆法则的结论是：方程组有惟一解，且 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$，$j=1$，2，…，n.

一个重要的推论：齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0, \end{cases}$$

仅有零解 $\Leftrightarrow D\neq 0$. 有非零解 $\Leftrightarrow D=0$.

重点难点

一、重点

1. 行列式的概念与性质

行列式是线性代数中的一个重要而基本的概念．行列式的定义（尤其是展开式中的一般项）有三种表述方式，读者应在理解逆序数概念的基础上加以记忆．行列式的性质是进行行列式计算的基础．行列式的个别性质（如提公因子的性质）与第 2 章中矩阵运算的有关性质看似相像，实则有异，读者应切实理解，避免混淆．

2. 行列式按行（列）展开定理

余子式和代数余子式，包括 k 阶子式、余子式和代数余子式的概念是行列式按行（列）展开定理的基础，也是学习线性代数的“死角”．读者初次学习这些概念时应深刻理解，牢固掌握；否则，时间稍久，极易迷惑不解．行列式按行（列）展开定理和异乘变零定理应结合起来记忆，方能区隔异同（选定行（列）的各元素是否和自己的代数余子式相乘），认清联系，历久弥新．作为行列式按行（列）展开定理的推广，拉普拉斯定理在理论证明上的意义远大于在实际计算上的作用．

3. 行列式的计算

行列式的计算贯穿于整个线性代数的始终，是学习矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型等其他知识的基础．行列式的种类众多，形式繁杂，其计算无固定方法可用．大致说来，常用方法主要有：按行（列）展开、化为上（下）三角行列式、降阶法、递推关系式法、数学归纳法、加边法等．此外，记住一些常见行列式的结果也是很有必要的．

4. 克莱姆法则

作为行列式理论的具体应用之一，克莱姆法则可以用来求解一类特殊的线性方程组（含 n 个方程 n 个未知量），但其适用范围有限（要求线性方程组的系数行列式的值非零），读者在使用这一法则时应多加注意．关于一般线性方程组的解法将在第 4 章中加以介绍．

二、难点

1. 行列式的概念

因为行列式是借助逆序数来定义的，而初学者往往对逆序数的概念感到困惑，加之行列式定义中的一般项有三种不同的表达形式，所以行列式的概念是本章的难点之一，也是重要的考点之一．

2. 行列式的计算

如上所述，行列式的计算没有一套统一的方法可以遵循，因此它既是本章的

重点，也是本章乃至整个线性代数知识体系的难点．

习题类解

一、逆序数的计算

例 1　$N(i_1i_2\cdots i_n)+N(i_n\cdots i_2i_1)=$____．

分析　本题考查逆序数的定义．

解　显然，i_1，i_2，…，i_n 中的任意两个数（共有 C_n^2 种可能）都在排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $i_n\cdots i_2i_1$ 之一中构成一个逆序，故 $N(i_1i_2\cdots i_n)+N(i_n\cdots i_2i_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 因此，应填$\dfrac{n(n-1)}{2}$.

注　这一结论在利用行列式的定义计算行列式时常常用到，读者应牢记．

例 2　求 m，n，使 $1m25n4897$ 为偶排列．

分析　m，n 仅可能为 3，6.

解　不妨设 $m=3$，$n=6$，则 $N(132564897)=5$，从而，132564897 为奇排列．因一次对换改变排列的奇偶性，故 $m=6$，$n=3$.

二、利用行列式的定义计算行列式

例 3　（教材习题一 B）若 n 阶行列式中零元素的个数多于 n^2-n，则该行列式的值为____．

分析　本题考查 n 阶行列式的定义．

解　显然，该行列式中非零元素少于 n 个．由行列式的定义可知，该行列式的展开式中没有非零项，故其值为 0. 因此，应填 0.

例 4　$\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix}=$____．

分析　根据行列式的定义，该行列式的展开式中只有一个非零项．