西京学院系列教材

高等数学

总主编　任万钧
主　编　李星军

北京出版集团公司
北　京　出　版　社

西京学院系列教材

高等数学

总主编　任万钧
主　编　李星军

北京出版集团公司
北　京　出　版　社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/李星军主编. —北京：北京出版社，2009.8

ISBN 978-7-200-07933-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 李… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 144115 号

高等数学
GAODENG SHUXUE
主 编 李星军

*

北京出版集团公司
北 京 出 版 社 出版

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码:100120

网 址：www.bph.com.cn

北京出版集团公司总发行

北京市通县华龙印刷厂印刷

*

787×1092 16 开本 17.75 印张 420 千字

2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-200-07933-3

O·14 定价：29.00 元

质量监督电话：010-82684553 010-58572393

序

当今世界，教育在综合国力的激烈竞争中处于非常重要的地位．国力强弱愈来愈取决于国家各类人才的质量和素质，这对于培养和造就适应我国经济社会发展需要的数以千万计的专门人才和一大批拔尖创新人才提出了更高的要求．

高等学校是高层次人才培养的重要阵地，是知识创新、技术创新的摇篮，是“科教兴国”的强大生力军．高校的根本任务是培养具有自主创新精神、创新能力、实践能力、德智体美全面发展的社会主义事业的合格建设者和可靠接班人．高等学校要完成好这一历史重任，就必须全面贯彻党的教育方针和落实科学发展观，努力提高教学质量，加强学科、专业建设和课程建设．其中一个重要任务之一是做好教材建设工作，编写出一大批规划教材和各种创新教材，确保教学质量，使高水平、高质量教材走进课堂．这是因为教材是体现教学内容和教学方法的知识载体，是教学活动的基本工具，也是深化教育教学改革、全力推进素质教育、培养创新人才的重要保证．

为了实现这一任务，我们决心投入大量的人力、物力和财力，利用自己的专任教师，实行专兼结合，写出一批符合时代需要的新教材．我们所编教材要以科学发展观为指导，按照各类专业人才培养目标以及课程教学的基本要求和教学大纲的要求，结合实际，注重素质教育，有利于各种能力的培养．新教材要吸收国内外科学研究和教学研究的先进成果，将各学科的新知识、新理论和新技术充实到新教材中，关注新兴学科、交叉学科和新兴职业．一方面正确阐述各学科的基本理论、基本知识和基本技能，坚持理论联系实际，努力做到科学性、先进性、系统性、适用性和连续性的统一；另一方面符合教学规律和认知规律，富有启发性，有利于激发学生的学习兴趣，有利于学生知识、能力和素质的培养，有利于提高学生的学习能力、创新能力、实践能力、交流能力和社会适应能力，以培养出既有远大理想和高尚职业道德，又有丰富科学技术、文化知识和敢于创新的高素质大学生奉献于时代，服务于社会，为“科教兴国”尽绵薄之力！

西京学院

任芳构

前　言

我们在教学过程中感觉到编写一本适合于高职高专学生使用的教材非常必要．针对高职高专学生的特点，我们在总结教学实践经验的基础上，根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，完成了本书的编写工作．

考虑到高职高专教育培养应用型人才的需要，本教材在内容的选择和处理上，力求叙述简明，深入浅出，分散难点。贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”和“因材施教”的原则，在尽量保证科学性的基础上，注意讲清概念，减少理论证明，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养，强调数学的应用，重视理论联系实际，着力于让学生掌握数学的基本思想方法和技能，适当降低起点要求．在内容的编写上，通过实例引入概念，选择例题尽量贴近生活，引入模型来源于实际，并特别注意数学在工程技术、物理学、经济学和管理学中的应用，以此来提高学生的学习兴趣和应用能力，达到知识和能力的转化．

教材中打 * 的内容，对经济管理类学生可以选讲或者不讲．不同专业按照教学大纲对教材内容可进行适当调整或选取．

在教材的编写过程中，我们得到西京学院科研处和基础部的大力支持和资助；西安建筑工程专修学院院长蔡秉衡教授认真审阅了全部书稿，并提出了不少宝贵的意见，在此，表示衷心的感谢．

第一章至第三章由刘文强执笔，第四章、第十一章、第十二章由李永新执笔，第五章至第七章由李星军执笔，第八章至第十章由王文波执笔．最后由李星军负责全书的修改、统稿．

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中定有不少缺点与错误，恳请广大读者及同行专家批评指正，使再版时更臻完善．

编　者

目　录

第一章　函　　数

函数是数学中的重要概念之一，是高等数学研究的主要对象，本章在中学数学的基础上进一步阐述函数的定义与性质.

第一节　函数的概念

一、常量与变量

在人们的生产实践过程中，在自然科学与技术科学中，我们经常要遇到各种不同性质的量. 例如，在物理学中有重量、温度、时间、速度、距离、力等；在化学中有原子量、分子量、溶解度等；在几何中有长度、面积、体积等. 然而一切量都有一个共同的性质：每一个量都可以用同种类的任意量作为测量单位来度量它. 例如，以“米”作为长度的度量单位，以“牛顿”作为重量的度量单位，以“时”作为时间的度量单位等.

一个具体的量与它同类的度量单位相比时，其比值是一个抽象的数，这个抽象的数叫做已给具体量的数值，简称为已给量的值.

数学中所研究的量，并不考虑它的物理意义、化学意义或几何意义等. 即该量是重量、分子量还是体积，从数学角度来看，都是从生产实践中抽象出来的量(数). 但是这种抽象只是暂时脱离了生产实践. 当人们掌握了量的某种规律之后，再将它应用到生产实践中去，就能解决实际问题，从而促进社会生产力与科学技术的发展.

人们在观察、研究某一运动的过程中，会遇到许多不同的量. 其中有的量在所研究的过程中保持不变，这种量叫做常量，我们通常用字母 $a,b,c,d,\cdots$ 等表示常量；也有的量在这个过程中可取不同的值，这种量叫做变量，通常用 $x,y,z,u,v,\cdots$ 等字母表示变量. 例如，火车在两车站之间行驶过程中，乘客人数是个常量；而火车离两站的距离及燃料的储存量等都是变量. 又如，对某一地点，物体从不高的空中下落的过程中，物体离地面的距离是变量，而重力加速度 g 是常量. 必须注意，上述常量与变量的概念，依赖于所考察的过程. 仍以落体为例，如果由高空落下，重力加速度不是常量而是变量.

二、函数的定义

一切客观事物都是不断变化发展的，但又是互相联系和具有内部规律的. 在物质的运动过程中，各个变量的变化不是孤立的，而是彼此联系的. 为了探索和掌握各种运动过程的规律性，就必须深入研究变量的变化状态和变量间的依赖关系，这也是高等数学这门课程研究的主要内容.

函数是高等数学研究的对象．虽然在中学已经讲授过一些有关函数的知识，但不够详尽，不够透彻．因此对函数的概念要有更深刻的理解．

在中学我们已经学过映射的概念，它反映两个非空集合之间的一种对应关系．

定义 1 设A、B是两个非空集合，如果存在一个对应法则f，使得对于A中任何一个元素x，按照对应法则f，在B中都有唯一确定的元素y与x对应，记为：$f:x\mapsto y$．那么称这个法则f是从A到B的映射(或称为算子)，记作$y=f(x)$，元素y称做元素x(在映射f下)的象，对任何一个固定的y，称适合关系$y=f(x)$的x全体为y(在映射f下)的原象．集合A称为映射f的定义域，记作$D(f)$，设C是A的子集，C中所有元素x的象y的全体记为$f(C)$，称它为集合C的象．称$f(A)$为映射f的值域，即$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$，记作$R(f)$，有时为了简便起见，常把从$D(f)=A$到$R(f)\subseteq B$的映射写成：$f:A\to B$．

首先，我们再叙述一下一元函数的定义．

定义 2 设A，B是两个非空数集，如果存在一个对应法则f，使得对A中任何一个数x，按照对应法则f，在B中都有唯一确定的数y与x对应，记为：$f:x\mapsto y$或$f:A\to B$，则称对应法则f是A上的函数，A称为函数f的定义域，记作$D(f)$．记为：

$$y=f(x),\quad x\in A.$$

其中x叫做自变量，$y=f(x)$叫做函数或因变量(即“象”)，$x\in A$表示x的值属于A，有时也简称因变量y是自变量x的函数，虽然这种说法并不太确切，但反映了y是依赖于x的变量，在使用上有方便之处，所以我们仍沿用这种说法，但应正确理解，函数的本质是指对应法则f，而不是指因变量y．$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$称为函数的值域，记作$R(f)$．在平面直角坐标系下，集合$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$称为函数$y=f(x)$的图形．

由函数的定义可知，值域被函数的定义域和对应法则完全确定．因此一个函数被它的定义域和对应法则所确定．所以我们说定义域、对应法则是确定函数的二要素，“两个函数相等”，即这两个函数的定义域相同，对应法则也相同．至于变量本身的具体意义及采用什么记号，那是无关紧要的，比如$y=f(x)\quad(x\in D)$与$s=f(t)\quad(t\in D)$代表同一个函数．正因为y的值由x在D上的值通过f就能完全确定，所以常常省略y，而把一个函数简记为：

$$f(x)\ (x\in D).$$

如果同时研究几个不同的函数，即不同的对应规律，就必须用不同的记号加以区别，如f，g，ϕ，ψ，….有时为了简便起见，可用$y=y(x)$表示一个函数，这样y既代表对应规律又代表因变量．

在函数的定义中，当x在D上每取一个值x_0时，y所取的与之对应的值y_0，称为函数f在$x=x_0$处的值，记作$f(x_0)$，即有$y_0=f(x_0)$．若函数$y=f(x)$，$x\in D$，则D是函数的定义域．如果一个函数是由数学表达式给出，而定义域没有具体的规定，那么它的定义域就是使得函数在数学上有意义的自变量所取数值的全体．如果该函数有实际背景，则它的定义域还要根据问题的实际条件来确定．给定一个函数时，除了说明对应法则外，还应指明它的定义域，若提到一个函数而未指明它的定义域时，我们规定它的定义域是：使算式有确定值的实数集合，把这样的定义域称为函数的自然定义域．

例如，函数$y=\dfrac{1}{x}$的定义域是$x\neq 0$的任何实数，记为：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，它表示分式

函数的定义域是使分母不为零的那些实数的集合.

函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域是 $x\geqslant 0$ 的全体实数的集合，记为：$[0,+\infty)$，它表示偶次根式下的开方数非负.

函数 $y=\ln x$ 的定义域是 $x>0$，记为：$(0,+\infty)$，它表示对数函数的定义域是正实数集合.

类似地有 $y=\arcsin x$ 的定义域 $[-1,1]$；$y=\arccos x$ 的定义域 $[-1,1]$；$y=\arctan x$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 等.

上面是一些基本函数的定义域，它们是计算复杂函数定义域的基础.

例 1 求函数 $y=\sqrt{3+2x-x^2}+\lg(x^2-5x+4)$ 的定义域.

解 对于 $\sqrt{3+2x-x^2}$ 要求 $3+2x-x^2\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 3$.

对于 $\lg(x^2-5x+4)$ 要求 $x^2-5x+4>0$，即 $x<1$ 或 $x>4$，

因此，$y=\sqrt{3+2x-x^2}+\lg(x^2-5x+4)$ 的定义域是：$\{x|-1\leqslant x<1\}$ 或 $[-1,1)$.

例 2 确定函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin(2x-1)$ 的定义域.

解 函数的定义域应为满足不等式组 $\begin{cases}1-x^2>0,\\ -1\leqslant 2x-1\leqslant 1\end{cases}$ 的 x 的全体，解此不等式组，得定义域为：$\{x|0\leqslant x<1\}$.

在实际问题中，函数的定义域由实际意义确定.

例如，对于函数 $y=ax^2$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$；而函数 $S=\pi r^2$（圆的面积）的定义域为 $[0,+\infty)$.

例 3 （1）$y=x^2$（$x\in[0,1]$），该函数的定义域是 $[0,1]$；

（2）$y=x^2$，该函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$；

（3）$y=x^2$，x 表示正方形的边长，y 表示正方形的面积，则它的定义域是 $(0,+\infty)$.

例 4 判断下列两组函数是否为同一个函数.

（1）$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$y=x+1$；　　（2）$y=\ln x^2$，$s=2\ln|t|$.

解 （1）$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，$y=x+1$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，由于两个函数的定义域不同，尽管 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$ 两个函数的对应法则相同，但不是同一个函数.

（2）$y=\ln x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；$s=2\ln|t|$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；所以两个函数的定义域相同，又因为 $s=2\ln|t|=\ln|t|^2=\ln t^2$，$y=\ln x^2$，所以两个函数的对应法则也相同，尽管两个函数的自变量、因变量所用的字母不同，但两个函数是同一个函数.

例 5 已知 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，求：$f(3)$，$f(3-a)$，$f(f(x))$.

解 $f(3)=\dfrac{1}{3-1}=\dfrac{1}{2}$； $f(3-a)=\dfrac{1}{(3-a)-1}=\dfrac{1}{2-a}$；

$$f(f(x))=\frac{1}{f(x)-1}=\frac{1}{\dfrac{1}{x-1}-1}=\frac{x-1}{1-(x-1)}=\frac{x-1}{2-x}.$$

三、函数的表示方法

函数的表示方法通常有三种：表格法、图形法和公式法.

1．表格法

例 6 保险丝的熔断电流和直径之间的关系．下表是常见的保险丝在不同直径时的熔断电流，从表中由直径 D 可以读出对应的 I 值.

直径 D（mm）	0.508	0.559	0.61	0.71	0.813	0.915	1.22	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0	7.0	10.00
熔断电流 I（A）	1.63	1.83	2.03	2.34	2.65	2.95	3.26	16.0	19.0	22.0	27.0	32.0	37.0	44.00

表格法的特点是简明方便，缺点是自变量的取值有限.

2．图形法

有些函数自然地产生了图形.

例 7 在自动记录气压计中，有一个匀速转动的圆柱形记录鼓．印有坐标方格的记录纸就裹在这鼓上，记录鼓每 24 h 转动一周．气压计指针的端点装有一支黑水笔，笔尖接触着记录纸．这样经过 24 h 之后，取下的记录纸上就描画了一条曲线，这条曲线表示气压 p 随时间 t 变化的函数关系.

例 8 图 1-1 的心电图(EKG)显示两个人的心率模式，一位正常，另一位不正常．尽管也可以构造一个心电图函数的近似公式，但很少这样做．这种重复出现的图形正是医生需要了解的，从图形上看这些重复图形远比从公式上看要容易得多，而每个心电图都把一个显示电流活动的函数表示为一个时间函数.

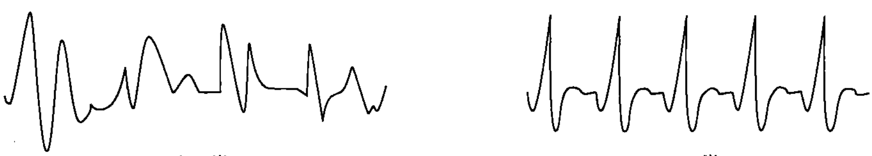

图 1-1

图形法的特点是形象直观，富有启发性，一目了然.

3．公式法(解析法)

公式法是把一个函数通过指明运算的数学式子表示出来，依照它，从自变量的值可以计算出因变量的对应值．其特点是精确、完整，便于理论上分析研究.

在公式法中（用公式法表示的函数中）还有一类函数，称为分段函数．它是一个在其定义域的不同部分用不同数学公式表示的函数．注意分段函数不是由几个函数组成，而是