

杆系结构分析

[美] J. M. 盖 尔
W . 韦 孚
边 启 光 译

水利出版社

杆系结构分析

[美] J. M. 盖尔
W. 韦孚
边 启 光 译

水利出版社

本书从结构力学的基本概念出发，系统地介绍了杆系结构的分析方法，着重介绍了矩阵位移法和有限元法，并详细地介绍了杆系结构的计算机程序设计，并给出了较为详细的程序框图。书中还讨论了“温度应力”、“非线性分析”、“杆件中断”等问题。

全书共分六章。(一)结构分析的基本概念；(二)刚度法与矩阵法；(三)有限元法；(四)杆系结构的计算机程序设计；(五)杆系结构的特殊问题；(六)杆系结构的特殊问题。

本书可供水利、电力以及土木、交通等部门从事结构设计计算工作的工程技术人员，有关高等院校师生参考使用。

杆系结构分析

[美] J.M. 盖尔
W. 韦季

边启光译

水利出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

787×1092毫米 16开本 21.5印张 495千字

1980年8月第一版 1980年3月北京第一次印刷

印数 0001—9440册 每册2.70元

书号 15047·4004

序 言

数字计算机的问世,促使结构力学有必要改成矩阵形式。目前,重点放在结构分析的柔度法和刚度法上,因为这些是现行结构理论中最基本的而又是最通用的方法。这两种相辅相成的方法,特别适用于矩阵公式的表达和计算机的运算。

本书是给大学生应用的、用矩阵方法分析杆系结构的教科书。若干年来,作者在课程中使用了这些材料并对它作了发挥。曾用以正规地教过大学生和研究生,他们对此都很感兴趣。由于这些材料对结构工程师也是比较新颖的,而且在前几年的大学教学计划中并无这样的课程,所以作者一直把这些实际工作者的需要铭记在心。深信这本书是足够全面和详细的,通过自学此书,就可学好这些方法。

在学习本书内容之前,需要具备大学生的工程教育计划第一阶段中一般都能学到的那些知识,具体地说,读者应熟悉静力学、材料力学以及代数和微积分。预先学习一下初等结构分析的课程,的确是有好处的,虽然这并不是学习本书内容的必要前提。但是,由于处处用到矩阵代数,所以读者必须具有这方面的入门知识,以为学习的前提条件。由于所需要的矩阵代数知识是初等的,读者自学两三个星期就可以掌握。作者已习惯于用前两星期讲授这部分内容,而学生也能在这段时间内学到这方面的足够知识。有些学生希望单开一门矩阵代数的数学课程,为将来深造作准备,看来无此必要。为了帮助只需要矩阵代数入门知识,而无需学习正式的矩阵代数课程的学生,作者曾写了一本关于这方面的补充读物*。

结构的矩阵分析对于结构分析者之所以重要,是很有理由的。重要理由之一是,此法使得有可能采用统一的和通用的方法(即对任何结构类型都适用的方法),进行结构分析。其二,此法提供了一种有效手段,用来描述结构分析中的各个步骤,从而更便于把这些步骤编成数字计算机程序。用计算机执行运算,很自然地要用到矩阵,因为矩阵可以简便而有效地处理成堆的数据。读者将会看到,本书所发挥的分析方法是高度组织化了的,在不同类型的结构中,如梁、桁架和刚架等,均可按同样的基本步骤进行分析。

不言而喻,本书的最终目的,是在一定程度上为任何杆系结构的分析准备计算机程序。书中虽然没有讨论如何用具体的计算机语言来编制程序的具体细节,但是还是一直讲到了与下一步相衔接的地方。换言之,读者将会学到为其具体计算机编制程序所需的足够知识。第五章提供的分析六种基本类型的杆系结构用的一系列程序框图,就能帮助读者编出自己的程序。然而,本书还是把重点放在结构分析的理论 and 组织方面,而其姊妹篇则将更深入更详细地讲述程序设计**。

* 《Matrix Algebra for Engineers》, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1965.

** W. Weaver, Jr., 《Computer programs for Structural Analysis》, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., (in preparation).

本书大部分篇幅是试图从结构工程师的观点来讲述结构矩阵分析这个问题。因此，本书只讲述与求解结构问题直接有用的那些概念（读者如有更大兴趣，可在书末的参考文献中找到很多的有用的学习材料）。第一章和附录介绍了结构分析的基本概念。这些材料是学习本书主要内容所必须预先掌握的。对于已经学过结构力学的人来说，它们大多属于复习材料；而对结构力学初学者而言，则是必须弄通的基本内容。

第二章初步论述和比较了柔度法和刚度法，并列举了两法的较多例题。第三章和第四章更广泛更详细地分别论述柔度法和刚度法，以便引向计算机程序设计。第五章是刚度法分析杆系结构的计算机程序。为了在前几章内，把重点放在基本内容上，因而有许多专门问题只好放入第六章讲述。这一章的论题包括非等直杆件、温度影响和弹性连接，等等。所有这一章的论题可以作为前几章所述基本内容的补充。

本书的某些章的末尾，附有习题，习题是按先易后难来排列的。书末还附有进一步研究的参考文献、习题答案和列有有用图表的附录。

作者感谢Dr. Winfred O. Carter和Mr. Eduardo Carlcño，他们帮助本书编写计算机程序并解题，还要感谢对本书提过有益建议的学生们，以及打印手稿的 Miss Elizabeth Ritchie和Mrs. David Morison。

J.M. 盖尔
W. 韦孚

目 录

第一章 结构分析的基本概念	1
1-1 引言	1
1-2 杆系结构的类型	1
1-3 变形和位移	3
1-4 作用力和位移	5
1-5 平衡	8
1-6 相容条件	9
1-7 超静定和超动定	9
1-8 活动结构	13
1-9 叠加原理	14
1-10 作用力方程和位移方程	16
1-11 柔度矩阵和刚度矩阵	19
1-12 互等关系	22
习题	24
第二章 柔度法和刚度法导论	26
2-1 引言	26
2-2 柔度法	26
2-3 例题	31
2-4 温度、初应变和支座位移的影响	40
2-5 节点位移、杆端力和反作用力	43
2-6 柔度矩阵的逆矩阵	47
2-7 柔度法总结	48
2-8 刚度法	50
2-9 例题	58
2-10 温度、初应变与支座位移的影响	72
2-11 刚度矩阵的逆矩阵	75
2-12 刚度法总结	76
2-13 两种方法的比较	78
2-14 多荷载系统	79
习题	80
第三章 柔度法	88
3-1 引言	88
3-2 等效节点荷载	88
3-3 桁架的节点位移	90
3-4 梁的节点位移	95

3-5 平面刚架的节点位移	107
3-6 格栅结构的节点位移	108
3-7 空间刚架的节点位移	108
3-8 柔度法的方程	107
3-9 例题	110
3-10 温度、初应变和支座位移的影响	110
3-11 对称截面杆件和非对称截面杆件	120
习题	121
第四章 刚度法	125
4-1 引言	125
4-2 刚度法概要	125
4-3 等直杆的杆件刚度	126
4-4 总节点刚度矩阵	133
4-5 荷载	136
4-6 成果计算	138
4-7 任意编号系统	140
4-8 连续梁的分析	142
4-9 例题	149
4-10 平面桁架杆件刚度	154
4-11 平面桁架的分析	157
4-12 例题	163
4-13 二维坐标系的旋转	167
4-14 (坐标系旋转)在平面桁架杆件上的应用	169
4-15 三维坐标系的旋转	172
4-16 平面刚架杆件刚度	173
4-17 平面刚架的分析	176
4-18 例题	180
4-19 格栅结构杆件刚度	183
4-20 格栅结构的分析	186
4-21 空间桁架杆件刚度	188
4-22 空间桁架杆件坐标轴选择	189
4-23 空间桁架的分析	192
4-24 空间刚架杆件刚度	195
4-25 空间刚架的分析	200
习题	202
第五章 杆系结构的计算机程序	207
5-1 引言	207
5-2 计算机程序设计和程序框图	207
5-3 程序要领	211
5-4 连续梁程序	213

5-5 平面桁架程序	225
5-6 平面刚架程序	232
5-7 格栅结构程序	244
5-8 空间桁架程序	251
5-9 空间刚架程序	260
第六章 刚度法的补充论题	282
6-1 引言	282
6-2 温度和初应变	282
6-3 节点间的荷载	282
6-4 节点间的作用力和位移	285
6-5 支座位移	291
6-6 倾斜支座	292
6-7 弹性支座	293
6-8 非等直杆件	295
6-9 杆件的中断	298
6-10 弹性连接	300
6-11 剪切变形	301
6-12 轴力-弯矩相互作用	303
一般参考书	305
附录 A 结构的位移	306
A-1 杆件的应力和变形	306
A-2 单位荷载法	312
A-3 梁的位移	317
附录 B 约束杆件的杆端力	319
附录 C 截面特性	323
习题答案	324
索引	338

第一章 结构分析的基本概念

1-1 引言

本书的主要内容，是结构分析的柔度法和刚度法。这两种方法是结构分析中常用的基本方法，适用于各种类型的结构。但是，本书将仅讨论杆系结构（见下一节所述）。

在开始讨论柔度法和刚度法之前，先要讨论一些预备性的内容，包括所要研究的结构类型和一些概念，如，作用力、位移、超静定、超动定、柔度和刚度等。

1-2 杆系结构的类型

在以后各章中所要分析的结构，统称为杆系结构。杆系结构可分为六种，即，梁、平面桁架、空间桁架、平面刚架、格栅和空间刚架。图1-1中给出了这六种结构，以后还将加以详细讨论。在此所以要选取这六种结构，是由于它们各自代表独具特点的一类结构。况且，柔度法和刚度法的基本原则，虽然对各类结构同样适用，但是，这六种结构的分析，在细节上却有很大差异，因而有必要分别加以讨论。

每个杆系结构，都是由长度比其横截面尺度为大的杆件所组成的。杆系结构的节点，是杆件的交点、支承点以及杆件的自由端。例如，图1-1a和1-1d中的A、B、C、D各点就是节点。支座可以是固定的，如图1-1a所示梁的支座A；或是铰接的，如图1-1d所示平面刚架的支座A；或是辊轴的，如图1-1a所示的支座B和C。在特殊情况下，杆件与杆件之间或杆件与支座之间的连接，可以是弹性的（或半刚性的）。对于这种情况，要放在以后再进行讨论（见6-7和6-10两节）。杆系结构的荷载，可以是集中力，也可以是分布荷载，或者是力偶。

下面讨论图1-1所示的各种结构型的特征。梁（图1-1a）是一根直杆，可有一个或多个支承点，如A、B和C。作用于梁上的力，假定是在同一个平面内，而该平面含有此梁横截面的一个对称轴（对称轴就是横截面的主轴）。再者，作用于梁上的全部外力偶，其力矩向量同该平面垂直，而梁就在这个平面（受弯平面）内弯曲，但不扭转（与此规定不尽相符的梁，将在3-11节讨论）。在梁的任何截面上，存在着内应力的合力，一般情况下可包括一个轴力、一个剪力和一个弯曲力偶。

平面桁架（图1-1b）是理想化了的杆件体系，这些杆件都位于一个平面内，并用铰节点连接。所有作用力，假定都作用在这个结构平面内，而所有外力偶的力矩向量均同该平面相垂直，这与梁的情况相同。荷载包括作用于各节点的集中力和作用于杆件本身的力。为了分析起见，可将后一种荷载代之以作用在节点上的等效静力荷载，这样，便可仅就只承受节点荷载的桁架，进行分析。因而，在杆件内便只有轴向拉力或轴向压力。除了这些

轴向力之外，在直接承受荷载的那些杆件内，还有弯矩和剪力。所有这些内力的确定，便构成对桁架杆件力的全面的分析。

空间桁架（见图1-1c）除了杆件在空间可以有任何方向之外，与平面桁架完全相似。作用于空间桁架的力，可以是任意方向的，但作用于杆件上的力偶，其力矩向量则必须与杆轴垂直（由于桁架杆件不能承受扭矩，故此要提出这个要求）。

平面刚架（图1-1d）是由位于同一平面的，并在该平面内有对称轴的杆件所构成的（如梁之情况）。杆件之间的节点（如节点B和C）是刚性连接。作用于刚架的力和该刚架的线位移，都位于这个结构平面内，作用于该刚架的力偶，其力矩向量都与结构平面垂直。作用于平面刚架杆件任何截面的内力，一般包括弯矩、剪力和轴力。

格栅（见图1-1e）是由互相交接或互相交叉的连续杆件所组成的一种平面结构。对后一情况，杆件之间的连接通常视为铰接；而对前一情况，则假定为刚接。在平面刚架上，作用力都位于结构平面内；而在格栅上，所有作用力都垂直于结构平面，所有力偶的向量均在格栅平面之内。这样的加载方位，会使某些杆件既受弯又受扭。但因假定每一杆件的

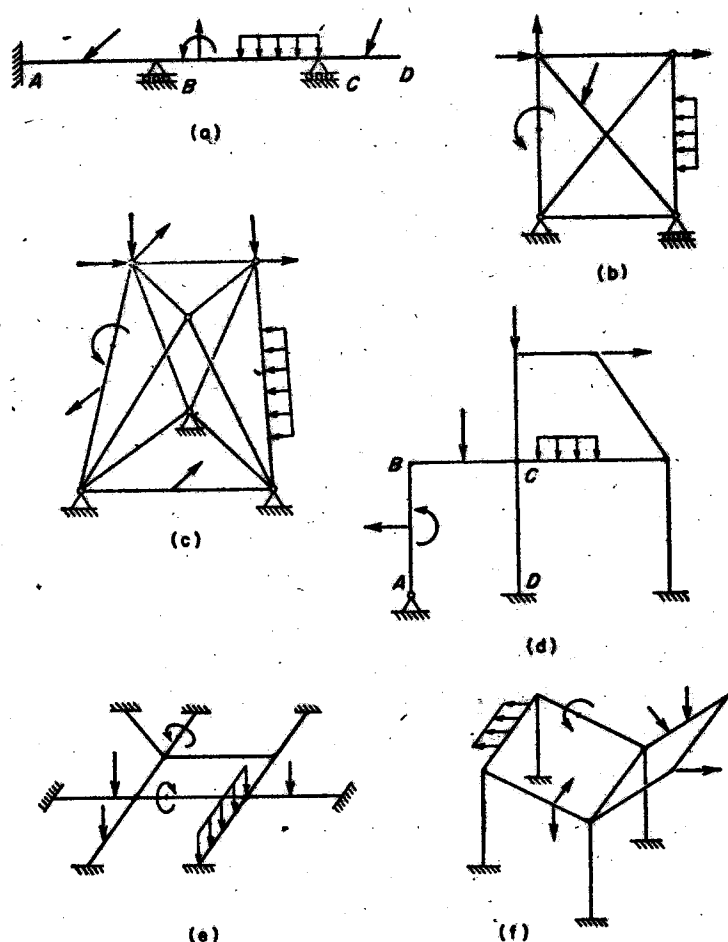


图 1-1 杆系结构类型

(a)梁；(b)平面桁架；(c)空间桁架；(d)平面刚架；(e)格栅；(f)空间刚架

横截面具有两个对称轴，所以弯曲和扭转能够互不影响（见3-11节非对称杆件的讨论）。

最后一种结构型式是空间刚架（图1-1*f*）。这种结构，因其节点位置、杆件方向、荷载方向都不受限制，而成为杆系结构中最一般的型式。空间刚架的单个杆件，可以承受轴力和扭矩，也可以在横截面的两个主方向上承受弯矩和剪力。对空间刚架也假定其杆件的横截面具有两个主轴，其理由同上述格栅一样。

在以后的绝大部分讨论中，都将假定所研究的结构具有棱柱状杆件，即具有直轴线和等截面的杆件（等直杆件）。至于非棱柱状杆件（非等直杆件），将在以后按基本方法稍作改变，予以处理（见6-8节）。

1-3 变形和位移

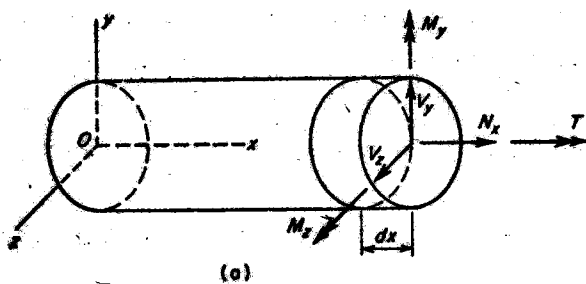
当某一结构受力的作用时，其杆件就产生变形（或形状的微小改变），结果，结构内的各点将移至新的位置。一般，除了固定的支承点之外，结构的所有各点，都要产生这样的位移。这些位移的计算，是结构分析的一个重要部分（在以后的柔度法和刚度法讨论中就会看到）。但在研究位移之前，首先对导致位移的变形，应有所了解。

现在先从杆系结构的一根杆件上，截取任意长度的一段，如图1-2*a*所示，来开始讨论。为简单起见，假定该杆为圆形截面。在任何截面上，如该杆的右端，将会有内力，在一般情况下，内力为三个力和三个力偶。这三个力是轴力 N_x 和剪力 V_y 与 V_z ，这三个力偶是扭转力偶 T 和弯曲力偶 M_y 与 M_z 。请注意，力矩向量在图上是用双箭头表示，以区别于力的向量。为了分析杆件的变形，须从杆件上截取距离为 dx 的两个横截面之间的一小段（见图1-2*a*），作为一个单元，然后再分别考虑并确定各个内力对此单元的作用。

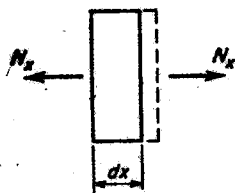
轴力 N_x 对此单元的作用，如图1-2*b*所示。假定这个轴力通过横截面的形心，由图可见，此单元被均匀地拉长了，此单元内的有效应变，是沿 x 方向的法向应变。在有剪力的情况下（图1-2*c*），此杆的一个横截面对另一横截面，产生横向位移，横截面也可能有所变形，但它对位移计算的影响很小，可忽略不计。一个弯曲力偶（图1-2*d*）会形成两个横截面之间的相对转动，致使此两截面不再彼此平行。在此单元上造成的最终应变，是沿杆件的纵长方向的，是由受压侧的缩短和受拉侧的伸长所构成。扭转力偶 T ，能使两个横截面发生绕 x 轴的相对旋转（见图1-2*e*），例如 A 点将移位于 A' 。对于圆形杆件，扭转只产生剪应变，横截面仍保持平面；而其他形状的横截面，则将发生扭曲。

图1-2*b*，1-2*c*，1-2*d*和1-2*e*所示的变形，分别称为轴向变形、剪切变形、弯曲变形和扭转变形。其值取决于杆件横截面形状和材料的力学性质。本书只涉及线弹性材料，亦即符合虎克定律的材料。在附录A的A-1节中，针对这种材料，列出了计算变形的各种公式和计算单元的应力与应变的公式，以资参考。

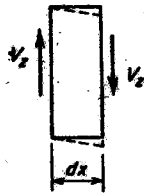
结构的位移，是由所有单元的变形累积而成的。计算杆系结构位移的方法有几种，这要依据所要研究的变形型式和结构型式而定。例如，对于只考虑弯曲变形的梁，其挠度可直接由梁的受弯微分方程，进行积分而求得。另一方法，是单位荷载法，可用于所有型式的杆系结构中，包括梁、桁架、格栅与刚架。在这两种以及其他通用的方法中，都是假定



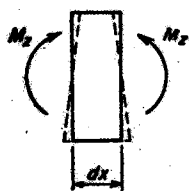
(a)



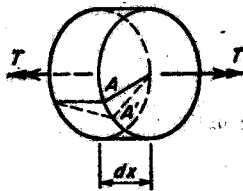
(b)



(c)



(d)



(e)

图 1-2 变形的型式

(b)轴向变形; (c)剪切变形; (d)弯曲变形; (e)扭转变形

作用在节点上,那么,分析就只涉及杆件的轴向变形。分析的第二部分,是研究节点之间杆件上的荷载作用,实质上,这部分是简支梁的分析。但是,桁架结构的节点在实际上,如果是刚性的,则即使所有荷载都作用于节点上,杆件仍要发生弯曲。在此情况下,弯曲变形就可能是很重要的,这时,结构应按平面刚架或空间刚架加以分析。

在平面刚架中(见图1-1d),重要的变形是弯曲变形和轴向变形。如其杆件细长且不构成三角桁架式样,则弯曲变形比轴向变形更为重要。但是,假若分不清两种变形中何者重要,则在平面刚架分析中,就须考虑轴向变形。

在格栅结构中(图1-1e),弯曲变形总是重要的。但是杆件的横截面特性和节点制作的方法,将决定是否需要考虑扭转变形。若杆件是薄壁开口的,比如工字梁,这样的杆件在抗扭方面大多是很柔弱的,因而杆内不会产生大的扭矩。再者,若格栅的杆件在交叉点上不是刚性连接,则在弯矩与扭矩之间就不会产生相互作用。不论哪种情况,在分析中只须考虑弯曲变形。相反,若格栅的杆件在抗扭方面是强劲的,并且在交叉点上又是刚性连接,则在分析中对扭转变形与弯曲变形都应予以考虑。在正常情况下,格栅内不出现轴向力,因为外力是与格栅平面相垂直的。这种情形与承受垂直荷载的梁颇为相似。当所有荷载都垂直于梁轴线时,在梁内便没有轴向力,所以在格栅的分析中也不考虑轴向变形。

空间刚架(图1-1f),无论从几何方面还是从荷载方面来看,都是代表杆系结构的最

结构的位移不大。为了复习和查阅方便,在附录A的A-2节中,对单位荷载法计算位移,进行了扼要的讨论。此外,在A-3节中,列出了一张在某些常见荷载下的梁的位移表。读者应熟悉这些内容,以便解算以后的例题和习题。

在所研究的任一具体结构中,对于位移计算而言,并非所有型式的变形都是重要的。例如,对梁来说,通常只有弯曲变形才是最重要的,轴向变形则往往忽略不计。当然也有例外,比如,当梁需要承受大的轴向力时,则在结构分析中必须考虑轴向变形。此外,轴向力也可能产生“梁-柱”作用,这种“梁-柱”作用,对位移的影响是非线性的(见6-12节)。

如图1-1b和1-1c所示的桁架,对其分析可分为两部分。假设桁架节点是理想化的铰,并且所有荷载都

一般型式。所以，在空间刚架的分析中，依据其结构与荷载的具体情况，轴向变形、弯曲变形和扭转变形都可能出现。

在杆系结构中，剪切变形通常是很小的，因而在分析中很少考虑。然而，在梁、平面刚架、格架和空间刚架的分析中（见3-4和6-11两节），如有必要，也应考虑剪切变形的影响。

还有一些其它变形的影响，比如温度变化和初应变，在结构分析中也可能是重要的。这些变形影响，将结合柔度分析法和刚度分析法，在以后各章中讨论。

1-4 作用力和位移

“作用力”和“位移”这两个术语，是用来描述结构分析中的某些基本概念的。一个作用力（有时称为广义力），最普通的是一个力或一个力偶。不过，一个作用力也可以是几个力和几个力偶的组合，可以是一个分布荷载或这些作用力的组合。但在组合时，必须把所有的力、力偶和分布荷载，按某种特定方式关联起来，以使用一个简单的符号来表示整个的这个组合。例如，图1-3所示的简支梁，其荷载为两个相同的力 P ，可以把这两个荷载组合起来，当作一个作用力，并用一个符号 F 来表示；也可以设想，把两个荷载加上两个支座反力 R_A 和 R_B ，当作一个作用力。这是由于这四个力彼此之间具有特定的关系。一般地还可以把结构上一个很复杂的荷载系统，当作一个作用力来处理，只要这个系统的所有荷载，是按某一特定方式组合起来的。

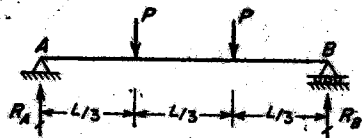


图 1-3

除结构的外部作用力之外，还需要讨论内部作用力。内部作用力是内部分布应力的合力，包括了弯矩、剪力、轴力和扭转力偶。根据具体分析，这样的作用力可能是一个力、一个力偶、两个力或两个力偶。例如，在结构静力平衡分析时，这些作用力通常表示为一些单个的力和力偶，如图1-4a所示。图中所示的悬臂梁，在B端承受的荷载是用 P_B 和 M_B 符号表示的作用力，在固定端A是分别用 R_A 和 M_A 符号表示的反作用力和反作用力偶。为了把这些反作用力区别于结构上的荷载，兹将其画成带有斜线的箭头。这本教科书全部用这种画法来表示反作用力（图1-3也是用了这种习惯画法）*。为了计算图1-4a梁上任何截面的，比如跨中截面的轴向力 N 、弯矩 M 和剪力 V ，则必须考虑这部分梁的静力平衡。一种可能的方法是将该梁的右半部，取作隔离体，如图1-4b所示。显然，这样作时，图中的各个内部作用力都表示成单个的力或单个的力偶。

但是，在某些情况下，内部作用力是两个力或两个力偶。这种情况也经常在结构分析中出现，如图1-5所示的连续梁，当“放松”结构的某些节点时，即出现这种情况。如将梁上节点B处的弯矩放出，其结果则如同在节点B处安置一个铰（见图1-5b）。因此，为

* 著名的教科书“Elementary Structural Analysis”第二版，C.H.Norris和J.B.Wilbur，McGraw-Hill Book Co, Inc., New York, 1960, P.63.也用了这种习惯画法。

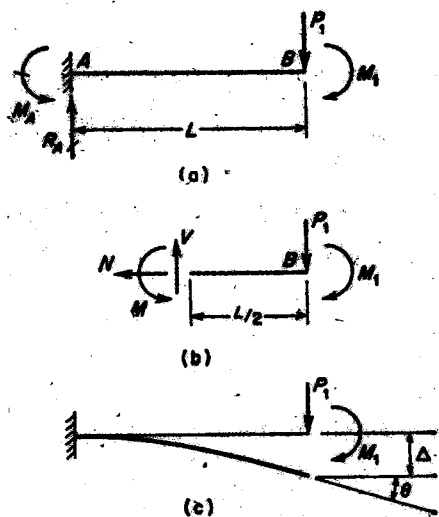


图 1-4

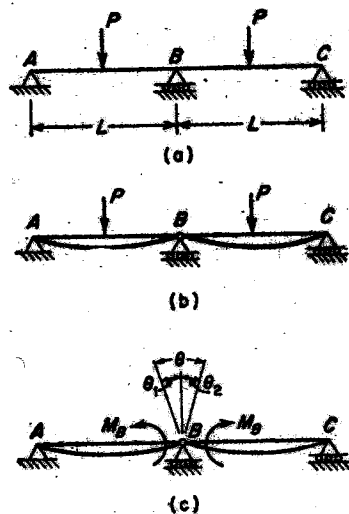


图 1-5

了计算梁的弯矩 M_B ，就须按照铰的左右两边作用着两个相等相反的力偶 M_B 来考虑，如图 1-5c 所示。在此图中，假定力矩 M_B 的图示方向，即作用在左边梁上的力偶为逆时针方向，而作用在右边梁上的力偶为顺时针方向为正向。因而，在图 1-5c 的梁的分析中，就可以把 B 点处的弯矩，当作由两个力偶构成的单一作用力。轴力、剪力和扭转力偶也有类似的情况，这将在以后的柔度分析法中予以讨论。

第二个基本概念是关于位移，它通常是指结构某些点的线位移或角位移。线位移是指结构某点所移动的距离；角位移是指弹性曲线某点切线的转角。例如图 1-4c 所示的悬臂梁，梁端的线位移 Δ 和梁端的转角 θ ，都叫作位移。再者，如同作用力的情况那样，一个位移也可按其广义而言，被看作是几个线位移和几个角位移的组合。例如，我们以图 1-5c 为例，考虑这个双跨梁的 B 点铰链处的角位移。杆 AB 右端的角位移用 θ_1 表示，杆 BC 左端的角位移用 θ_2 表示。每一个角位移都被看作是一个位移。进一步说，这两个角位移之和，用 θ 表示之，也是一个位移。这个 θ 角可看作是杆件 AB 与 BC 在 B 点处的相对角位移。

另一个例子如图 1-6 所示，是平面刚架在承受某些荷载下的位移。节点 A、B、C 的

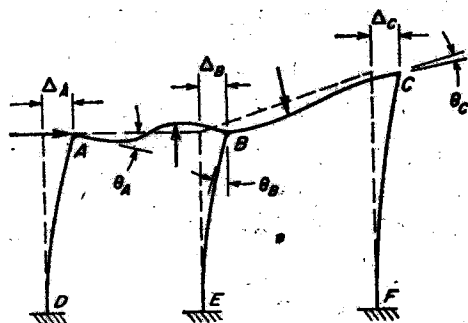


图 1-6

水平线位移 Δ_A 、 Δ_B 、 Δ_C 都是位移；同样，这些节点的角位移 θ_A 、 θ_B 、 θ_C 也都是位移。这些类型的节点位移，在杆系结构分析中的作用，是非常重要的。

在结构分析中，常常涉及彼此对应的作用力与位移。即当作用力与位移属于相似类型，并且位于结构的同一点的情况下，称为对应的。比如，对应于一个集中力的位移，就是这个集中力作用点处的一个线位移（虽然这个

位移并不一定是由此力所引起的)。进一步说,对应的位移,必须是沿着此力的作用线来量取,并须取此力的正方向为其正方向。又如对于力偶来说,其对应位移是力偶作用点处的一个角位移,并取力偶的相同方向为其正方向。现在以图1-4a所示的悬臂梁为例加以说明。作用力 P_1 是向下作用于梁端的一个集中力,则梁端向下的线位移 Δ (见图1-4c)就是对应于这个作用力的位移。与此相同,力偶 M_1 与角位移 θ ,是相互对应的作用力与位移。但是必须指出,对应于荷载 P_1 的位移 Δ ,并不一定是由力 P_1 单独引起的。同样,对应于 M_1 的位移 θ ,也不一定是由 M_1 单独引起的。相反,在此例中, Δ 和 θ 这两者都是由于 P_1 和 M_1 同时作用于梁上而形成的位移。一般地说,如果给定一个具体作用力,那么对应位移的概念仅仅涉及位移的定义,而不涉及形成这个位移的实际原因。同样,如果给定一个位移,对应作用力这个概念,就是指作用于结构上的某一种具体的作用力,而给定的那个位移并不一定要由这个作用力来形成。

我们再以图1-5c所示作用力为例,来说明对应的作用力和位移。图中的梁,在中间支座处有一个铰,其上作用着两个力偶 M_B ,这两个力偶作为一个作用力看待。对应于作用力 M_B 的位移,一般是由左端梁反时针转角 θ_1 和右端梁顺时针转角 θ_2 之和所构成的。所以,角 θ (等于 θ_1 与 θ_2 之和)就是对应于作用力 M_B 的位移。这个位移是两梁之间在铰链处的相对转角,并与 M_B 具有同一的正方向。如果转角 θ 仅由力偶 M_B 所引起,那么转角 θ 可说成是对应于 M_B 的且由 M_B 所形成的位移。这个位移可以利用附录4的梁位移表(见表A-3情况5)而求得,其值为:

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{M_B L}{3EI} + \frac{M_B L}{3EI} = \frac{2M_B L}{3EI}$$

式中 L 是每跨的长度, EI 是该梁的抗弯刚度。

可是,还需要考虑另外情况,比如,有时对应于某一作用力的位移,却是由其他作用力所引起的,图1-5b的梁就是一例。这个梁同图1-5c的梁是一样的,只是它所承受的是两个力 P ,而不是两个力偶 M_B ,在此梁上,对应于 M_B 的位移,是节点 B 处两梁间的相对转角,并以 M_B 的相同方向为正向。可是这个位移却是由荷载 P 所引起的。再一次使用位移表(表A-3情况2),并假定力 P 作用于杆件 midpoint,即可求出对应于 M_B 而由荷载 P 所引起的位移 θ :

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{PL^2}{16EI} = \frac{PL^2}{8EI}$$

在以后各章的补充算例中,作用力与位移之间的对应概念,将为读者愈来愈熟悉。此外,还应指出,这个概念还可以引伸,使之包括分布作用力以及各种作用力的组合。可是,这些更为广义的概念,在以后各章中并没有什么特别用处。

为了简化作用力和位移的表示法,在多数情况下最好是用符号 A 表示作用力,包括集中力与力偶,而用符号 D 表示位移,包括线位移和角位移。在具体分析中,为了区别各种作用力与位移,可以使用脚标,以引起注意。这种符号的用法,见图1-7,图中画出一个承受作用力 A_1 、 A_2 和 A_3 的悬臂梁。对应于 A_1 的位移,即由所有荷载同时作用而产生的位移,用 D_1 表示(见图1-7a)。同样,对应于 A_2 和 A_3 的位移,用 D_2 和 D_3 表示。

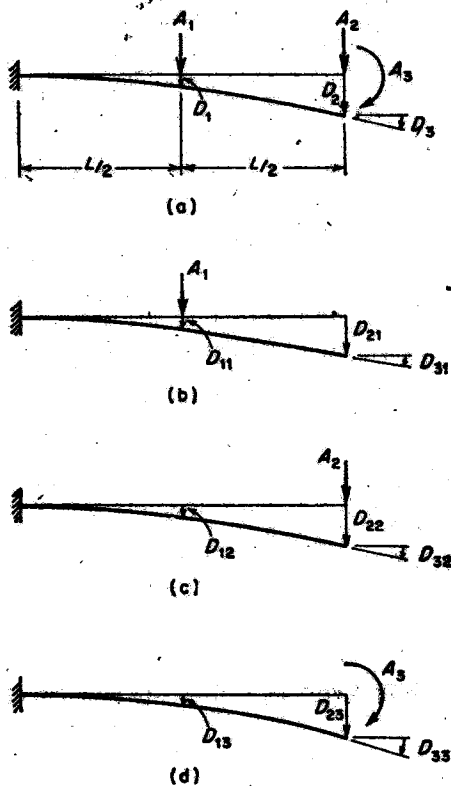


图 1-7

首先研究只承受作用力 A_1 的悬臂梁 (见图 1-7b), 此梁上, 对应于 A_1 的位移, 表示为 D_{11} 。这两个脚标的意义如下: 第一个脚标表示这个位移是对应于 A_1 的, 第二个脚标指出产生这个位移的原因, 是作用力 A_1 。同样, 在此梁上, 对应于 A_2 的位移用 D_{21} 表示, 这里第一个脚标表示该位移系与 A_2 相对应, 而第二个脚标系指出该位移是由 A_1 所引起。在图 1-7b 上, 还绘出了对应于力偶 A_3 的位移 D_{31} 。

单独由于作用力 A_2 所引起的位移见图 1-7c; 单独由于作用力 A_1 所引起的位移见图 1-7d。在各种情况下, 位移符号的脚标都按惯例表示, 第一脚标表示位移本身, 第二脚标指示产生位移的原因。一般地讲, 产生位移的原因可以是一个单一力, 是一个力偶, 或者是整个的荷载系统。除非另加说明, 否则在以后的讨论中, 总是应用这样的惯用脚标。

对于图 1-7 上的各梁, 计算其各种位移是没有什么困难的 (见附录 A, 计算梁位移的方法)。假定梁的抗弯刚度为 EI , 长度为 L , 则可求得图 1-7b 上梁的诸位移为:

$$D_{11} = \frac{A_1 L^3}{24EI} \quad D_{21} = \frac{5A_1 L^3}{48EI} \quad D_{31} = \frac{A_1 L^2}{8EI}$$

同理, 可以求出图 1-7c 和 1-7d 上的其余 6 个位移 ($D_{12}, D_{22}, \dots, D_{33}$), 于是, 在所有荷载同时作用下 (见图 1-7a), 在此梁上的诸位移, 可通过叠加而求得:

$$D_1 = D_{11} + D_{12} + D_{13}$$

$$D_2 = D_{21} + D_{22} + D_{23}$$

$$D_3 = D_{31} + D_{32} + D_{33}$$

这几个叠加式子就是叠加原理的表达式, 在 1-9 节中将更详尽地加以论述。

1-5 平 衡

分析任何结构的目的一, 是确定作用于结构的各种作用力, 诸如支座反力和内力 (弯矩、剪力等等)。这些量的正确解, 必须满足静力平衡的全部条件, 不仅对整个结构是这样, 而且对结构的任一部分取为隔离体时, 也是这样。

现在研究承受几个作用力的任一隔离体, 所有这些作用力的合力, 可以是一个力、一

个力偶或两者兼有。若隔离体处于平衡状态，则合力为零，就是说合力向量和合力力矩向量两者均等于零。而三维空间的任一向量，总可被分解为彼此垂直的三个分量，如 x 、 y 、 z 方向的分量。设其合力向量等于零，则其分量也一定等于零，因而静力平衡方程如下：

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (1-1a)$$

式中的 ΣF_x 、 ΣF_y 和 ΣF_z 分别表示作用于隔离体上所有作用力，在 x 、 y 和 z 方向上的分量之代数之和。同理，若力矩向量之和为零，则静力平衡的力矩方程为：

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (1-1b)$$

式中 ΣM_x 、 ΣM_y 和 ΣM_z 分别为作用于隔离体上的所有力偶与所有的力对 x 、 y 、 z 轴的力矩之代数之和。方程 (1-1) 中的六个关系式是表示在三维空间中的作用力平衡方程。这六个关系式可用在任何隔离体上，不论是整个结构，或者是结构的一部分，或者是一个单独杆件，以及结构的一个节点等等。

如果作用于某一隔离体上的所有的力都位于一个平面之内，且所有的力偶的向量都同该平面垂直，则这六个平衡方程中只有三个有用。假若力都在 $x-y$ 平面内，则显然这三个方程： $\Sigma F_z = 0$ 、 $\Sigma M_x = 0$ 和 $\Sigma M_y = 0$ 自动取消，而剩下其余的三个方程：

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (1-2)$$

这三个方程成为作用于 $x-y$ 平面内的作用力静力平衡条件。

在刚度分析法中，要求求解的基本方程，就是在以后的第二章里，所要阐述的结构节点平衡条件的方程。

1-6 相 容 条 件

除了静力平衡条件之外，在任何结构分析中，还需要满足全部相容条件。相容条件就是整个结构处处连续的条件，有的也称为几何条件。例如，在所有支座处就必须满足相容条件，亦即结构在支座处的位移必须同支座情况相一致，如在固定支座上，杆件轴线就不能有角位移。

同样，在结构内部的所有点，也必须满足相容条件。通常，令人们注意的是结构节点处的相容条件。例如，在两杆的刚性连接处，这两杆的位移（线位移和角位移）必须相同。

在柔度法中，所要求求解的基本方程，就是在以后的第二章里，所要阐述的位移相容条件方程。

1-7 超静定和超动定

在结构分析中，必须考虑超静定或超动定，这要看所取的未知量是作用力或是位移。如在柔度法中，作用力是未知量，则必须考虑超静定。这里超静定指的是，未知作用力的数目超过能用的静力平衡方程的数目。将平衡方程用于整个结构或其各个部分，可用以计