JIAOXUEYUCESHI

高一数学

教师用书

二〇〇一版

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

教学与测试

苏州大学出版社

高一数学教学与测试

（教师用书）

苏州大学《中学数学月刊》编辑部主编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高一数学教学与测试/苏州大学《中学数学月刊》编辑部主编. 一苏州:苏州大学出版社,2001.7 重印
教师用书
ISBN 7-81037-409-5

Ⅰ. 高… Ⅱ. 苏… Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 23428 号

高一数学教学与测试(教师用书)
苏州大学《中学数学月刊》编辑部主编
责任编辑 管兆宁

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路 200 号 邮编:215021)
江苏省新华书店经销
武进第三印刷厂印装
(地址:武进市村前镇 邮编:213154)

开本 787×1092 1/16 印张 27.25(共两册) 字数 681 千
1998 年 7 月第 1 版 2001 年 7 月第 5 次修订印刷
ISBN 7-81037-409-5/G·183
定价:31.00 元(本册定价:18.00 元)

目　　录

代　　数

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

第二章　三角函数

第三章　两角和与差的三角函数

第四章　反三角函数

立体几何

第一章　直线和平面

第二章　多面体和旋转体

代 数

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

~~1. 集合的概念~~

一、例题

1. 判断下列命题是否正确？说明理由.

(1) 所有的小正数组成一个集合； ×确定性

(2) $1,\frac{3}{2},\frac{6}{4},\left|-\frac{1}{2}\right|,0.5$，这些数组成的集合有五个元素； ×互异性

(3) 集合$\{1,3,5,7\}$与集合$\{3,1,7,5\}$表示同一个集合； ✓

(4) 集合$\{y\mid y=x^2-1\}$与集合$\{(x,y)\mid y=x^2-1\}$是同一个集合. ✓

提示 (1) 错误，小正数不具确定性；(2) 错误，集合中元素必须是互异的；(3) 正确，集合中元素是无序的；(4) 错误，一个是数集，一个是点集.

2. (1) 用列举法表示集合：$\{(x,y)\mid x+y=4,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$；

(2) 用列举法表示不超过 10 的非负偶数的集合，并再用另一种方法表示出来；

(3) 用描述法写出直角坐标平面内坐标轴上的点的坐标所组成的集合.

解 (1) $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$；

(2) $\{0,2,4,6,8,10\}$或$\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{Z}$ 且 $0\leqslant n\leqslant 5\}$；

(3) $\{(x,y)\mid xy=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

3. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$，(1) 若 A 是空集，求 a 的取值范围；(2) 若 A 中只有一个元素，求 a 的值，并把这个元素写出来；(3) 若 A 中至多只有一个元素，求 a 的取值范围. ✓

解 集合 A 是方程 $ax^2-3x+2=0$ 在实数范围内的解集.

(1) A 是空集，即方程 $ax^2-3x+2=0$ 无解，得 $\Delta=(-3)^2-8a<0$，$\therefore a>\frac{9}{8}$.

(2) 当 $a=0$ 时，方程只有一解，为 $x=\frac{2}{3}$；当 $a\neq 0$ 且 $\Delta=0$，即 $a=\frac{9}{8}$ 时，方程有两个相等实根，这时 A 中只有一个元素，为 $x=\frac{4}{3}$. $\therefore$ 当 $a=0$ 或 $a=\frac{9}{8}$ 时，A 中只有一个元素，分别为 $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{4}{3}$.

(3) A 中至多只有一个元素，包括 A 是空集和 A 中只有一个元素两种情形，据(1)，(2)的结果，得 $a=0$ 或 $a\geqslant\frac{9}{8}$.

二、练习题 A

1. 集合 $A=\{x^2,3x+2,5y^3-x\}$，$B=$**{周长等于 20 厘米的三角形}**，$C=\{x\mid x-3<2,x\in\mathbf{Q}^+\}$，$D=\{(x,y)\mid y=x^2-x-1\}$，**其中用描述法表示的集合有** (C)

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

提示　集合 B,C,D 都是用描述法表示的.

2. 给出下列关系：① $\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$；② $\sqrt{2}\notin\mathbf{Q}$；③ $|-3|\in\mathbf{R}^-$；④ $|-\sqrt{3}|\in\mathbf{Q}^+$. **其中正确的个数为** (A)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解　关系式中仅①是正确的.

3. 集合 $\{x\mid 2x^2-3x-2=0\}$ **用列举法表示为** $\underline{\quad\{-\frac{1}{2},2\}\quad}$.

提示　所求集合是一元二次方程的解集，先求解方程，后用列举法表示.

4. 不等式 $3-2x>1$ **的解集是** $\underline{\quad\{x\mid x<1\}\quad}$.

提示　求解后用描述法表示解集.

三、练习题 B

1. 有下列四个命题：① {0} **是空集**；② **集合** $A=\{x\mid x^2-2x+1=0\}$ **有两个元素**；③ **集合** $B=\{x\mid \frac{6}{x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{Q}\}$ **是有限集**；④ **不少难题组成一个集合** M. **其中正确的个数为** (A)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

提示　四个命题都是错误的. {0} 是有一个元素为 0 的集合；集合 A 只有一个元素，因方程 $x^2-2x+1=0$ 有两个相同的实根；$\because x\in\mathbf{Q}$，$\therefore$ 当 x 取 $\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N})$ 的正分数时，$\frac{6}{x}$ 就都是自然数；"难题"是模糊不确定的，不能组成集合.

2. 集合 $M=\{(x,y)\mid xy\leqslant 0,x,y\in\mathbf{R}\}$ **是** (D)

(A) **第二象限内的点集**　　(B) **第四象限内的点集**

(C) **第二、第四象限内的点集**　　(D) **非第一、第三象限内的点集**

提示　$xy\leqslant 0$ 包括两种情形 $xy<0$ 和 $xy=0$. $xy=0$ 时，以 (x,y) 为坐标的点在坐标轴上，不在任何一个象限内；$xy<0$ 又有 $\begin{cases}x<0,\\y>0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x>0,\\y<0\end{cases}$ 两种情形，前者对应的点 (x,y) 在第二象限，后者对应的点 (x,y) 在第四象限，故应选 (D).

有理数　实数

3. 用符号 $\in,\notin$ **填空：**

$\sin30°\underline{\quad\in\quad}\mathbf{Q}$，$\cos30°\underline{\quad\notin\quad}\mathbf{Q}$，$\sin45°\underline{\quad\in\quad}\mathbf{R}^+$，$\mathrm{tg}45°\underline{\quad\in\quad}\mathbf{N}$.

提示　提示 $\sin30°=\frac{1}{2}\in\mathbf{Q}$，$\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}\notin\mathbf{Q}$，$\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}\in\mathbf{R}^+$，$\mathrm{tg}45°=1\in\mathbf{N}$.

4. 被 2 除余 1 的正整数集合是 $\underline{\quad\{x\mid x=2n-1,n\in\mathbf{N}\}\quad}$；**被 2 除余 1 的整数集合是** $\underline{\quad\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}\quad}$.

提示　注意集合的限定：正整数、整数.

5. 若集合 $\{x\mid ax^2+4x+1=0\}$ **只有一个元素，则** a **的值为** $\underline{\quad 0\text{ 或 }4\quad}$.

提示　题设集合是方程的解集，只有一个元素有两种情形：① $a=0$ 时，原方程为 $4x+1=0$，只有一解 $x=-\frac{1}{4}$；② $a\neq 0$ 时，原方程为二次方程，解集只有一个元素必定是 $\Delta=4^2-4a$

$=0$，这时 $a=4$.

6. **用列举法表示不等式组** $\begin{cases} 2(x+1)-\dfrac{2-x}{3}>\dfrac{7x}{2}-1, \\ \dfrac{x-5}{2}-3x\leqslant -1 \end{cases}$ **的整数解集合.**

解 由 $2(x+1)-\dfrac{2-x}{3}>\dfrac{7x}{2}-1$，解得 $x<2$；由 $\dfrac{x-5}{2}-3x\leqslant -1$，解得 $x\geqslant -\dfrac{3}{5}$.

∴ 不等式组的解为 $-\dfrac{3}{5}\leqslant x<2$. 用列举法表示的整数解集合为 $\{0,1\}$.

7. **已知集合** $A=\{x\,|\,ax^2+2x+1=0, a\in\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}\}$ **至多有一个元素，试求** a **的取值范围.**

解 A 中至多有一个元素包括两种情形：

(1) A 中没有元素，即 A 是空集，由 $\Delta=4-4a<0$ 得 $a>1$. (2) A 中有且只有一个元素，又有两种情形：① $a=0$ 时，方程只有一个根 $x=-\dfrac{1}{2}$；② $a\neq 0$ 时，$\Delta=0$，得 $a=1$，方程有两个相同的实根. 综上可知，a 的取值范围为 $a\geqslant 1$ 或 $a=0$.

四、备用题

1. **数集** $\{0,1,x^2-x\}$ **中的** x **不能取哪些数值？**

解 ∵ 数集中的元素是互异的，∴ $\begin{cases} x^2-x\neq 0, \\ x^2-x\neq 1. \end{cases}$ ∵ $x^2-x=0$ 的解为 $x=0$ 或 $x=1$，∴ $x^2-x\neq 0$ 的解为 $x\neq 0$ 且 $x\neq 1$；∵ $x^2-x=1$ 的解为 $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，∴ $x^2-x\neq 1$ 的解为 $x\neq\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 且 $x\neq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 因此，$x$ 不能取的值是 $0,1,\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

2. **已知** $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{6}{3-x}\in\mathbf{N}, x\in\mathbf{Z}\right\}$，**试用列举法表示集合** A.

解 ∵ $\dfrac{6}{3-x}\in\mathbf{N}$，∴ $3-x=1,2,3,6$. 解得 $x=2,1,0,-3$，故 $A=\{2,1,0,-3\}$.

2. 子 集

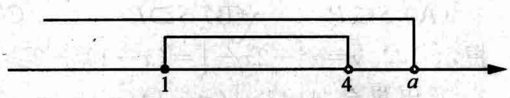
一、例题

1. (1) **已知集合** $A=\{x\,|\,1\leqslant x<4\}$，$B=\{x\,|\,x<a\}$，**若** $A\subset B$，**求实数** a **的取值集合.**

(2) **已知集合** $A=\{x\,|\,x^2+x-6=0\}$，$B=\{x\,|\,ax+1=0\}$，**且** $B\subset A$，**求实数** a **的取值集合.**

2、-3

解 (1) 将数集 A 表示在数轴上（如图），要满足 $A\subset B$，表示数 a 的点必须在 4 或 4 的右边，∴ $a\geqslant 4$. 所求 a 的取值集合为 $\{a\,|\,a\geqslant 4\}$.



(2) 化简集合为 $A=\{-3,2\}$，由 $B\subset A$ 知，B 有两种情形：① $B=\varnothing$，即方程 $ax+1=0$ 无解，得 $a=0$；② $B=\{-3\}$ 或 $B=\{2\}$. 即 $a(-3)+1=0$ 或 $a\times 2+1=0$，∴ 得 $a=\dfrac{1}{3}$ 或 $a=-\dfrac{1}{2}$. 综上可知，a 的取值集合为 $\left\{0,\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{2}\right\}$.

2. **已知** $\{a,b\}\subseteq A\subseteq\{a,b,c,d,e\}$，**求所有满足条件的集合** A.

解 $\because \{a,b\}\subseteq A$，$\therefore$ A 中必须有元素 a,b. 又 $\because$ A 是 $\{a,b,c,d,e\}$ 的真子集，$\therefore$ 满足条件的集合 A 有 $\{a,b\}$，$\{a,b,c\}$，$\{a,b,d\}$，$\{a,b,e\}$，$\{a,b,c,d\}$，$\{a,b,c,e\}$，$\{a,b,d,e\}$ 共 7 个.

3. 已知集合 $P=\{x,y\}$，$Q=\{2x,2\}$，且 $P=Q$，求 x,y 的值.

解 $\because P=Q$，$\therefore$ 集合 P 和 Q 中的元素应当完全相同，应有两种情形：

（Ⅰ）$\begin{cases}x=2x,\\ y=2;\end{cases}$ （Ⅱ）$\begin{cases}x=2,\\ y=2x.\end{cases}$

方程组（Ⅰ）的解为 $\begin{cases}x=0,\\ y=2;\end{cases}$ 方程组（Ⅱ）的解为 $\begin{cases}x=2,\\ y=4.\end{cases}$

综上讨论，得 $x=0,y=2$ 或 $x=2,y=4$.

二、练习题 A

1. 六个关系式：① $\{a,b\}\subseteq\{a,b\}$；② $\{a,b\}=\{b,a\}$；③ $\{0\}\supset\varnothing$；④ $0\in\{0\}$；⑤ $\varnothing\in\{0\}$；⑥ $\varnothing=\{0\}$. 其中正确的个数是 （C）

(A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 小于 4

提示 ①，②，③，④是正确的.

2. 符合条件 $\{a\}\subset P\subseteq\{a,b,c\}$ 的集合 P 的个数是 （B）

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

提示 集合 P 可以为 $\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{a,b,c\}$ 共 3 个.

3. 已知集合 $M=\{0,1,2\}$，则 M 的非空真子集有 <u>6</u> 个，它们分别是 <u>$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0,1\}$，$\{0,2\}$，$\{1,2\}$</u> $\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$ 子集个数为 2^n

提示 注意"非空真子集"的意义.

4. 已知 $A=\{$菱形$\}$，$B=\{$正方形$\}$，$C=\{$平行四边形$\}$，那么 A,B,C 之间的关系是 <u>$B\subset A\subset C$</u>.

提示 利用平面几何中关于菱形、正方形、平行四边形的概念知识.

三、练习题 B

1. 下列四个命题：① 空集没有子集；② 空集是任何一个集合的真子集；③ 空集 $\varnothing=\{0\}$；④ 任何一个集合必有两个或两个以上的子集. 其中正确的有 （A）

(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个

提示 空集是空集的子集，即 $\varnothing\subseteq\varnothing$，但 $\varnothing$ 不是 $\varnothing$ 的真子集，$\{0\}$ 是有一个元素 0 的集合，不等于空集；空集只有一个子集.

2. 已知集合 $S=\{y\mid y=x^2-2x-1,x\in\mathbf{R}\}$，$P=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4\}$，则下列关系正确的是 （B）

(A) $S\subset P$ (B) $S\supset P$ (C) $S=P$ (D) $S\subseteq P$

提示 $\because y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2\geqslant -2$，$\therefore S=\{y\mid y\geqslant -2\}$，故 $S\supset P$.

3. 写出集合 $A=\{x\mid (x-1)(x^2+2x-3)=0,x\in\mathbf{R}\}$ 的所有子集为 <u>$\varnothing$，$\{1\}$，$\{-3\}$，$\{1,-3\}$</u>，共有 <u>4</u> 个.

提示 先将集合 A 化简为 $A=\{1,-3\}$，用元素个数分类写出所有子集.

4. 设 $A=\{x\mid x^2+x-1=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2-x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，则集合 A,B 间的关系是 <u>$B\subset A$</u>.

解 $A=\{x\mid x^2+x-1=0,x\in\mathbf{R}\}=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$，$B=\{x\mid x^2-x+1=0,x\in$

$B \subseteq A$

$\mathbf{R}\} = \varnothing$，$\therefore$ $B \subset A$.

5. 满足 $\{0,2\} \subset M \subseteq \{0,1,2,3,4\}$ **的集合** M **为** $\{0,1,2\}$，$\{0,2,3\}$，$\{0,2,4\}$，$\{0,1,2,3\}$；$\{0,1,2,4\}$，$\{0,2,3,4\}$，$\{0,1,2,3,4\}$，**共有** 7 **个**.

提示 按 M 是含有元素 0，2 的三元素集、四元素集、五元素集逐类写出.

6. 设集合 $A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2-a+1\}$，**且** $A \supseteq B$，**求** a **的值**.

解 $\because$ $A \supseteq B$，$\therefore$ a^2-a+1 有两种可能取值：① $a^2-a+1=3$，解得 $a=-1$ 或 $a=2$，检验适合；② $a^2-a+1=a$，解得 $a=1$，与集合 A 中元素互异矛盾. 故 $a=-1$ 或 $a=2$.

7. 同时满足：① $M \subseteq \{1,2,3,4,5\}$，**②若** $a \in M$，**则** $6-a \in M$ **的非空集合** M **有多少个？写出这些集合来.**

解 按非空集合 M 中元素个数分类，有如下五类：

(1) 集合 M 中只有一个元素时，$\because$ $3 \in M$ 有 $6-3=3 \in M$，$\therefore$ $M=\{3\}$；

(2) 集合 M 中有 2 个元素时，$M=\{1,5\}$，$\{2,4\}$；

(3) 集合 M 中有 3 个元素时，$M=\{1,3,5\}$，$\{2,3,4\}$；

(4) 集合 M 中有 4 个元素时，$M=\{1,2,4,5\}$；

(5) 集合 M 中有 5 个元素时，$M=\{1,2,3,4,5\}$.

因此适合条件的集合 M 共有如上所述的 7 个.

四、备用题

1. 分别写出下列集合所表示的图形（其中 $x \in \mathbf{R}$，$y \in \mathbf{R}$**）.** $A=\{(x,y) \mid xy=0\}$：两条坐标轴；$B=\{(x,y) \mid x^2+y^2=0\}$：原点；$C=\{(x,y) \mid (x-y)^2=0\}$：第一、三象限的平分线及原点；$D=\{(x,y) \mid x^2=y^2\}$：四个象限的平分线及原点. **写出集合** A,B,C,D **中所有具有包含关系的两个集合：** $B \subset A$，$B \subset C$，$B \subset D$，$C \subset D$.

2. 已知集合 $A \subset \{2,3,7\}$，**且** A **中至多只有一个奇数元素，写出所有满足条件的集合** A.

解 A 是 $\{2,3,7\}$ 的真子集，至多只有两个元素，所以 A 中至多只有一个奇数元素时有两种情形：① A 中没有奇数元素，这时 $A=\varnothing$，$A=\{2\}$；② A 中有且只有一个奇数元素，这时 $A=\{3\}$，$A=\{7\}$，$A=\{3,2\}$，$A=\{7,2\}$. 综上可知，满足条件的集合 A 共有上述 6 个.

3. 交 集

一、例题

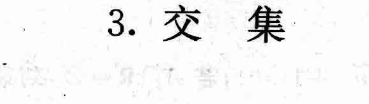
1. 已知集合 $A=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 4\}$，$B=\{x \mid x>a\}$.

(1) **若** $A \cap B \neq \varnothing$，**求实数** a **的取值范围；**

(2) **若** $A \cap B \neq A$，**求实数** a **的取值范围；**

(3) **若** $A \cap B \neq \varnothing$ **且** $A \cap B \neq A$，**求实数** a **的取值范围.**

解 将数集 A 表示在数轴上（如图）.



(1) 要使 $A \cap B \neq \varnothing$，必须满足 $a<4$（注意 $a \neq 4$）；

(2) 要使 $A \cap B \neq A$，必须满足 $a \geqslant -2$（注意 $a=-2$ 是适合的）；

(3) 要使 $A \cap B \neq \varnothing$ 且 $A \cap B \neq A$，必须满足 $-2 \leqslant a < 4$.

2. 已知集合 $P=\{1,2,3,4,5\}$，$M\subset P$，且 $1\in(P\cap M)$，$5\notin(P\cap M)$，求满足上述条件的集合 M.

解　∵ $M\subset P$，∴ $M\cap P=M$. ∵ $1\in(P\cap M)$，$5\notin(P\cap M)$，∴ $1\in M$，$5\notin M$. 即 M 必含有元素 1 而必不含有元素 5，∴ 集合 M 的可能情况按元素个数为 1,2,3,4，得 $\{1\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,3,4\}$，$\{1,2,3,4\}$.

3. 已知集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$. 若 $A\cap B=\{-3\}$，求实数 a 的值.

解　∵ $A\cap B=\{-3\}$，∴ $-3\in B$. ∵ $a^2+1>0$，∴ 集合 B 中等于 -3 的元素有 $a-3$ 或 $2a-1$ 两种情形：(1) $a-3=-3$，即 $a=0$，这时 $A=\{0,1,-3\}$，$B=\{-3,-1,1\}$，得 $A\cap B=\{-3,1\}$，与已知 $A\cap B=\{-3\}$ 矛盾，故舍去 $a=0$；(2) $2a-1=-3$，即 $a=-1$，经检验满足题设条件. ∴ $a=-1$.

二、练习题 A

1. 集合 $A=\{(x,y)\mid x+y=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y=2\}$，则 $A\cap B$ 是　　(C)

(A) $(1,-1)$　　(B) $\begin{cases}x=1,\\ y=-1\end{cases}$

(C) $\{(1,-1)\}$　　(D) $\{x,y\mid x=1,y=-1\}$

提示　$A\cap B$ 应是集合，选择项中只有(C)表示含一个元素 $(1,-1)$ 的集合.

2. 已知集合 $A=\{x\mid x\leqslant 5$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x>1$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$，那么 $A\cap B$ 等于　　(B)

(A) $\{1,2,3,4,5\}$　(B) $\{2,3,4,5\}$　(C) $\{2,3,4\}$　(D) $\{x\mid 1<x\leqslant 5, x\in\mathbf{R}\}$

提示　$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,3,4,5,6,\cdots\}$.

3. 已知集合 $A=\{x\mid 2x-3<0\}$，$B=\{x\mid 2-3x>0\}$，则 $A\cap B=$ $\underline{\{x\mid x<\frac{2}{3}\}}$.

提示　化简集合，$A=\{x\mid x<\frac{3}{2}\}$，$B=\{x\mid x<\frac{2}{3}\}$，借助于数轴，$A\cap B=\{x\mid x<\frac{2}{3}\}$.

4. 已知方程 $x^2-5x+p=0$ 与 $x^2-qx+15=0$ 的解集分别为 A，B，且 $A\cap B=\{3\}$，则 $p+q=$ $\underline{14}$.

提示　∵ $3\in A$，∴ $p=6$，又 ∵ $3\in B$，∴ $q=8$.

三、练习题 B

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+\sqrt{m}x+1=0\}$，若 $A\cap\mathbf{R}=\varnothing$，则实数 m 的取值范围是　　(D)

(A) $m<4$　(B) $m>4$　(C) $0<m<4$　(D) $0\leqslant m<4$

提示　由 $\begin{cases}m\geqslant 0,\\ \Delta=(\sqrt{m})^2-4<0\end{cases}$ 得 $0\leqslant m<4$.

2. 集合 $P=\{s\mid s=x^2+3x+1\}$，$T=\{t\mid t=y^2-3y+1\}$ 之间的关系是　　(D)

(A) $P\cap T=\varnothing$　(B) $P\cap T=\left\{-\frac{5}{4}\right\}$　(C) $P\cap T=\{0\}$　(D) $P=T$

提示　∵ $s=x^2+3x+1=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$，∴ $P=\left\{s\mid s\geqslant-\frac{5}{4}\right\}$，∵ $t=y^2-3y+1=\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\geqslant-\frac{5}{4}$，∴ $T=\left\{t\mid t\geqslant-\frac{5}{4}\right\}$，故 $P=T$.

3. 已知集合 $A=\{x\mid -4\leqslant x<2\}$，$B=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$，$C=\left\{x\mid x\leqslant 0 \text{ 或 } x\geqslant\frac{5}{2}\right\}$，那么 $A\cap B\cap C=$ $\underline{\{x\mid -1<x\leqslant 0\}}$.

提示 借助于数轴求交集.

4. 已知 $A=\{$平行四边形$\}$,$B=\{$对角线相等的四边形$\}$,$C=\{$对角线互相垂直的四边形$\}$,则 $A\cap B=$ <u>{矩形}</u>,**$A\cap C=$** <u>{菱形}</u>,**$A\cap B\cap C=$** <u>{正方形}</u>.

解 $A\cap B=\{$对角线相等的平行四边形$\}=\{$矩形$\}$;$A\cap C=\{$对角线互相垂直的平行四边形$\}=\{$菱形$\}$;$A\cap B\cap C=\{$对角线相等且互相垂直的平行四边形$\}=\{$正方形$\}$.

5. 若 $A=\{1,4,x\}$,$B=\{1,x^2\}$,且 $A\cap B=B$,则 x 的值为 <u>$0,-2,2$</u>.

解 $\because A\cap B=B$,$\therefore B\subseteq A$. 由 $x^2=4$ 得 $x=\pm2$;由 $x^2=x$ 得 $x=0$ 或 $x=1$. 当 $x=1$ 时,与集合中元素的互异性矛盾,应舍去. $\therefore x=0,-2,2$.

6. 设集合 $A=\{2,-1,x^2-x+1\}$,$B=\{2y,-4,x+4\}$,且 $A\cap B=\{-1,7\}$. 求 x,y 的值.

解 $\because A\cap B=\{-1,7\}$,$\therefore 7\in A$,即 $x^2-x-6=0$,$x_1=-2$,$x_2=3$. 当 $x=-2$ 时,$x+4=2\in A$ 与 $2\notin A\cap B$ 矛盾;当 $x=3$ 时,$x+4=7$,这时 $2y=-1$,即 $y=-\frac{1}{2}$. 故得 $x=3,y=-\frac{1}{2}$.

7. 已知 $S=\{x\mid 2x^2-px+q=0\}$,$T=\{x\mid 6x^2+(p+2)x+q+5=0\}$,且 $S\cap T=\left\{\frac{1}{2}\right\}$,求集合 S 和 T.

解 $\because S\cap T=\left\{\frac{1}{2}\right\}$,$\therefore \frac{1}{2}\in S$,即 $p-2q-1=0$,① $\frac{1}{2}\in T$,即 $p+2q+15=0$,②

由①,②得 $p=-7$,$q=-4$. 从而求得 $S=\left\{\frac{1}{2},-4\right\}$,$T=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\}$.

四、备用题

1. 设 $A=\{$等腰三角形$\}$,$B=\{$一条边长为 1,一个内角为 36°的三角形$\}$. 试说出 $A\cap B$ 中的所有元素.

解 一条边长为 1,一个内角为 36°的等腰三角形有 4 种情形:① 底边长为 1,顶角为 36°;② 底边长为 1,底角为 36°;③ 腰长为 1,顶角为 36°;④ 腰长为 1,底角为 36°.

2. 已知集合 X 是方程 $x^2+px+q=0(p^2-4q>0)$ 的解集,$A=\{1,3,5,7,9\}$,$B=\{1,4,7,10\}$,且 $X\cap A=\varnothing$,$X\cap B=X$,试求 p,q 的值.

解 由 $X\cap A=\varnothing$ 知 $1,3,5,7,9\notin X$. 又 $X\cap B=X$,$\therefore X=\{4,10\}$. 由韦达定理知 $p=-(4+10)=-14$,$q=4\cdot10=40$.

4. 并 集

一、例题

1. 设 $A\neq B$,且 A,B 均为非空集合,求满足 $A\cup B=\{a_1,a_2\}$ 的集合 A,B 的一切可能的组成情形.

解 根据并集的意义,满足题设的集合 A,B 的可能情形有

A	$\{a_1\}$	$\{a_1\}$	$\{a_2\}$	$\{a_2\}$	$\{a_1,a_2\}$	$\{a_1,a_2\}$
B	$\{a_2\}$	$\{a_1,a_2\}$	$\{a_1\}$	$\{a_1,a_2\}$	$\{a_1\}$	$\{a_2\}$

共 6 组.

2. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,$B=\{x\mid x^2-ax+2=0\}$,若 $A\cup B=A$,求由 a 的值组成的集合.

解 由 $A\cup B=A$ 可知 $B\subseteq A$,化简集合得 $A=\{1,2\}$,$\therefore B$ 可为$\{1,2\}$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\varnothing$ 四种情形.

当 $B=\{1,2\}=A$ 时,显然有 $a=3$.

当 $B=\{1\},\{2\}$ 或 $\varnothing$ 时，方程 $x^2-ax+2=0$ 有相等实根或无实根，$\therefore \Delta=a^2-8\leqslant 0$，即 $-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$．但 $a=\pm 2\sqrt{2}$ 时，得 $B=\{-\sqrt{2}\}$ 或 $B=\{\sqrt{2}\}$，不满足 $B\subseteq A$；而 $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$ 时，$B=\varnothing\subset A$.

综上讨论，a 的值组成集合为 $\{3\}\cup\{a\mid -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}\}$.

3. 已知 $A=\{2,5\}$，$B=\{x\mid x^2+px+q=0\}$，$A\cup B=A$，$A\cap B=\{5\}$．**求** p,q **的值**.

解 由 $A\cup B=A$，知 $B\subseteq A$，$\because A\cap B=\{5\}$，且 $A=\{2,5\}$，$\therefore 5\in B$ 且 $2\notin B$，$\therefore B=\{5\}$，因此方程 $x^2+px+q=0$ 有两个相等的实根，$\therefore \Delta=p^2-4q=0$.① 又由 $5\in B$，得 $5p+q+25=0$.② 由①，②解得 $p=-10, q=25$.

二、练习题 A

1. 已知集合 M,P **满足** $M\cup P=M$，**则一定有** (C)

(A) $M=P$　(B) $M\supset P$　(C) $M\cap P=P$　(D) $M\subseteq P$

提示 $M\cap P=P$，$M\cup P=M$，$P\subseteq M$ 是集合 M,P 的同一种关系.

2. 设集合 $A=\{x\mid -5\leqslant x<1\}$，$B=\{x\mid x\leqslant 2\}$，**则** $A\cup B$ **等于** (D)

(A) $\{x\mid -5\leqslant x<1\}$　(B) $\{x\mid -5\leqslant x\leqslant 2\}$　(C) $\{x\mid x<1\}$　(D) $\{x\mid x\leqslant 2\}$

提示 借助于数轴求并集.

3. 已知集合 A **中有两个元素，集合** B **中有 5 个元素，则集合** $A\cup B$ **中元素的个数至少有** __5__ **个，最多可以有** __7__.

提示 $A\subset B$ 时，$A\cup B=B$，有 5 个元素；$A\cap B=\varnothing$，这时 $A\cup B$ 中有 7 个元素.

4. 已知 $A=\{x\mid x\geqslant 2\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant 5\}$，**则** $A\cup B=$ __$\{x\mid x>0\}$__.

提示 借助于数轴求并集.

三、练习题 B

1. 设 $A=\{3$ **的倍数**$\}$，$B=\{2$ **的倍数**$\}$，**则** $A\cup B$ **是** (B)

(A) {**偶数**}　(B) {**被 2 或被 3 整除的数**}

(C) {**6 的约数**}　(D) {**2 和 3 的公倍数**}

提示 $A\cup B$ 是 3 的倍数或 2 的倍数组成的集合，也即是被 2 或被 3 整除的数组成的集合.

2. 下列四个推理：① $a\in(A\cup B)\Rightarrow a\in A$；② $a\in(A\cap B)\Rightarrow a\in(A\cup B)$；③ $A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B$；④ $A\cup B=A\Rightarrow A\cap B=B$．**其中正确的个数为** (C)

(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4

提示 ①是错误的，$a\in(A\cup B)$ 时推得 $a\in A$ 或 $A\in B$，不一定能推得 $a\in A$.

3. 集合 A **含有 10 个元素，集合** B **含有 8 个元素，集合** $A\cap B$ **含有 3 个元素，则集合** $A\cup B$ **含有** __15__ **个元素**.

解 由 $A\cap B$ 含有 3 个元素知 A,B 有且仅有 3 个相同元素，根据集合元素的互异性，集合 $A\cup B$ 的元素个数为 $10+8-3=15$.

4. 已知集合 $A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant 2\}$，**若** $A\cup \mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$，**则实数** a **的取值范围是** __$0<a\leqslant 2$__.

解 $\because A\cup\mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$，$\therefore A\subseteq\mathbf{R}^+$，$\therefore a>0$，又由 $a\leqslant x\leqslant 2$ 知 $a\leqslant 2$，$\therefore 0<a\leqslant 2$.

5. 设集合 $A=\{x\mid -4\leqslant x<2\}$，$B=\{x\mid -1<x\leqslant 3\}$，$C=\left\{x\mid x\leqslant 0 \text{ 或 } x\geqslant \frac{5}{2}\right\}$，**则** $A\cup B\cap C=$ __$\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 0 \text{ 或 } \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 3\}$__.

提示 借助于数轴得 $A\cup B=\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 3\}$，再求与 C 的交集.

6. 写出所有满足条件 $\{a\}\cup A\subseteq\{a,b,c\}$ 的集合 A.

解法 1 $\{a\}\cup A$ 是 $\{a,b,c\}$ 含元素 a 的子集：$\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}$.

由 $\{a\}\cup A=\{a\}$，得 $A=\varnothing$，$A=\{a\}$.

由 $\{a\}\cup A=\{a,b\}$，得 $A=\{b\}$，$A=\{a,b\}$.

由 $\{a\}\cup A=\{a,c\}$，得 $A=\{c\}$，$A=\{a,c\}$.

由 $\{a\}\cup A=\{a,b,c\}$，得 $A=\{b,c\}$，$A=\{a,b,c\}$.

解法 2 由已知条件知 $A\subseteq\{a,b,c\}$，然后写出满足条件的集合 A，同解法 1 结果.

7. 若集合 $P=\{1,2,4,m\}$ 与 $Q=\{2,m^2\}$，满足 $P\cup Q=\{1,2,4,m\}$，求实数 m 的值组成的集合.

解 $\because$ $P\cup Q=\{1,2,4,m\}=P$，$\therefore$ $Q\subset P$. 由 $m^2=1$ 得 $m=\pm 1$，$\because$ $m=1$ 与集合元素互异性矛盾，$\therefore$ $m=-1$；由 $m^2=4$ 得 $m=\pm 2$，同样舍去 $m=2$，$\therefore$ $m=-2$；由 $m^2=m$ 得 $m=0$ 或 1，舍去 $m=1$，$\therefore$ $m=0$. 综合上述，知 m 值的集合为 $\{-1,-2,0\}$.

四、备用题

1. 集合 $A=\{x\mid x^2+px-2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-x+q=0\}$，若 $A\cup B=\{-2,0,1\}$，求 p,q 的值.

解 易知 $x=0$ 不满足 $x^2+px-2=0$，故 $x=0$ 只能是方程 $x^2-x+q=0$ 的根，因此 $q=0$，这时方程为 $x^2-x=0$，它的另一根为 $x=1$. 故 $x=-2$ 只能是方程 $x^2+px-2=0$ 的根，$\therefore$ $p=1$，$q=0$.

2. 已知 $x\in\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$，若 $A\cap B=B$，求实数 m 的取值范围.

解 化简集合 A，得 $A=\{1,2\}$. $\because$ $A\cap B=B$，$\therefore$ $B\subseteq A$. 若 $B=\{1,2\}$，则 $m=3$；若 B 为单元素集合时，$\Delta=m^2-8=0$，即 $m=\pm 2\sqrt{2}$，则 $B=\{\sqrt{2}\}$ 或 $\{-\sqrt{2}\}$ 均不合要求，$\therefore$ B 不能为单元素集；若 $B=\varnothing$，则 $\Delta=m^2-8<0$，得 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. 综上讨论，m 的取值范围是 $m=3$ 或 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

5. 补 集

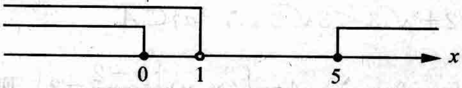
一、例题

1. 已知全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{2,|a+7|\}$，$\overline{A}=\{5\}$，求 a 的值.

解 $\because$ $\overline{A}=\{5\}$，$\therefore$ $5\in I$ 且 $5\notin A$，即有 $\begin{cases}a^2+2a-3=5, & ①\\ |a+7|\neq 5. & ②\end{cases}$ 由①得 $a=-4$ 或 $a=2$，它们都适合②，但 $a=2$ 时，$|a+7|=9\notin I$. $\therefore$ 舍去 $a=2$，得 $a=-4$.

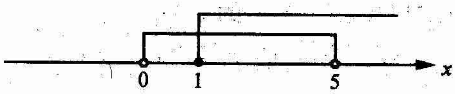
2. 设 $I=\mathbf{R}$，$P=\{x\mid x\geqslant 1\}$，$Q=\{x\mid 0<x<5\}$，求 $\overline{P}\cup\overline{Q}$，$\overline{P}\cap\overline{Q}$，$\overline{P\cup Q}$，$\overline{P\cap Q}$.

解 $\because$ $P=\{x\mid x\geqslant 1\}$，$Q=\{x\mid 0<x<5\}$，$\therefore$ $\overline{P}=\{x\mid x<1\}$，$\overline{Q}=\{x\mid x\leqslant 0$ 或 $x\geqslant 5\}$，将它们都表示在数轴上（如图），



得 $\overline{P}\cup\overline{Q}=\{x\mid x<1$ 或 $x\geqslant 5\}$；$\overline{P}\cap\overline{Q}=\{x\mid x\leqslant 0\}$.

将 P,Q 表示在数轴,(如图)



得 $P\cup Q=\{x|x>0\}$,$\therefore\overline{P\cup Q}=\{x|x\leqslant 0\}$;

$P\cap Q=\{x|1\leqslant x<5\}$,$\therefore\overline{P\cap Q}=\{x|x<1$ 或 $x\geqslant 5\}$.

注 由本题结论得:$\overline{P\cup Q}=\overline{P}\cap\overline{Q}$,$\overline{P\cap Q}=\overline{P}\cup\overline{Q}$ (德·摩根律).

3. 设 $I=\left\{-3,-\frac{1}{3},5\right\}$,$A=\{x|3x^2+px-5=0\}$,$B=\{x|3x^2+10x+q=0\}$,且 $A\cap B=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$,求 $\overline{A}$,$\overline{B}$.

解 $\because A\cap B=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$,$\therefore$ 将 $x=-\frac{1}{3}$分别代入 A,B 中的方程,得

$$\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}p-5=0,\\ \frac{1}{3}-\frac{10}{3}+q=0,\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}p=-14\\ q=3\end{cases}.$$

从而 $A=\{x|3x^2-14x-5=0\}=\{-\frac{1}{3},5\}$,$B=\{x|3x^2+10x+3=0\}=\{-\frac{1}{3},-3\}$.

$\therefore\ \overline{A}=\{-3\}$,$\overline{B}=\{5\}$.

二、练习题 A

1. 设 I 为全集,非空集合 A,B 有关系 $A\subset B$,则下列集合中表示空集的是 (D)

(A) $A\cap B$ (B) $\overline{A}\cap B$ (C) $\overline{A}\cap\overline{B}$ (D) $A\cap\overline{B}$

提示 画出集合关系的图形.

2. 设全集 $I(I\neq\varnothing)$和集合 M,N,P,且 $M=\overline{N}$,$N=\overline{P}$,则 M 与 P 的关系是 (B)

(A) $M=\overline{P}$ (B) $M=P$ (C) $M\supset P$ (D) $M\subset P$

提示 注意由 $M=\overline{N}$ 得 $N=\overline{M}$,$\therefore\ \overline{M}=\overline{P}$,即 $M=P$.

3. 已知全集 $I=\{x|x\geqslant -2\}$,集合 $A=\{x|x>2\}$,则 $\overline{A}=$ $\underline{\ \{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}\ }$.

提示 将 I 和集合 A 表示在同一数轴上.

4. 已知全集 $I=\mathbf{N}$,集合 $A=\{x|x<5$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$,$B=\{x|x<9$ 且 x 为正偶数$\}$,则 $\overline{A}\cap B=$ $\underline{\ \{6,8\}\ }$.

提示 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{2,4,6,8\}$,$\overline{A}\cap B$ 为 B 中大于等于 5 的元素组成的集合.

三、练习题 B

1. 设集合 $A=\{x|x<3,x\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x|x\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$,全集 $I=\mathbf{Z}$,则 $\overline{A}\cap B$ 等于 (B)

(A) $\{x|x\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$ (B) $\varnothing$ (C) $\{x|2<x<3\}$ (D) $\{2\}$

提示 $\overline{A}\cap B$ 表示既大于 2 又小于等于 2 的整数集合.

2. 已知 $I=\mathbf{R}$,$A=\{x|x>3\sqrt{2}\}$,$a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$,则 (D)

(A) $a\subseteq\overline{A}$ (B) $a\nsubseteq\overline{A}$ (C) $\{a\}\in\overline{A}$ (D) $\{a\}\subset\overline{A}$

提示 $a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}<3\sqrt{2}$,$\therefore\ \{a\}\subset\overline{A}$.

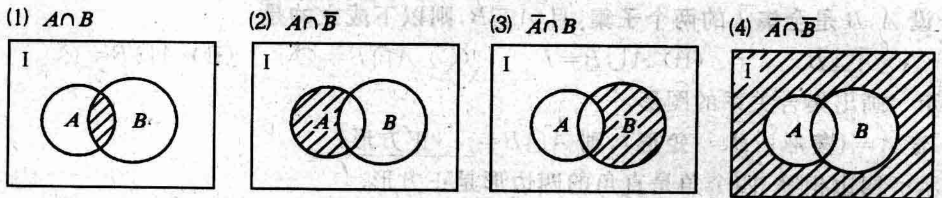
3. 设全集 $I=\{(x,y)|y=3x-1\}$,$A=\left\{(x,y)\left|\frac{y-2}{x-1}=3\right.\right\}$,则 $\overline{A}=$ $\underline{\ \{(1,2)\}\ }$.

提示　全集 I 是直线 $y=3x-1$ 上的点的集合，集合 A 中方程化为 $y=3x-1$ 但 $x\neq1$，所以 A 是直线 $y=3x-1$ 上除点$(1,2)$外的点的集合. ∴ $\overline{A}=\{(1,2)\}$.

4. 设全集 $I=\{x|x\leqslant30,x\in\mathbf{N}\}$，集合 $P=\{$能被 2 或 3 整除的自然数$\}$，用列举法表示集合 $\overline{P}$ 为 $\{1,5,7,11,13,17,19,23,25,29\}$.

解　因 $\overline{P}$ 表示小于等于 30 的自然数中既不能被 2 又不能被 3 整除的数的集合，即 $\overline{P}=\{1,5,7,11,13,17,19,23,25,29\}$.

5. 在下列各图形中，分别用阴影表示相应的集合：



提示　$A\cap\overline{B}$ 中的元素属于 A 且不属于 B；$\overline{A}\cap B$ 中元素属于 B 且不属于 A.

6. 已知 $A=\{x|x^2+px+12=0,x\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x|x^2-5x+q=0,x\in\mathbf{N}\}$，全集 $I=\mathbf{N}$，$\overline{A}\cap B=\{2\}$，$A\cap\overline{B}=\{4\}$，求 $p+q$ 的值.

解　∵ $A\cap\overline{B}=\{4\}$，∴ $4\in A$，以 $x=4$ 代入方程 $x^2+px+12=0$，得 $4^2+4p+12=0$，∴ $p=-7$. ∵ $\overline{A}\cap B=\{2\}$，∴ $2\in B$，以 $x=2$ 代入方程 $x^2-5x+q=0$，得 $2^2-10+q=0$，∴ $q=6$. 检验适合，因此 $p+q=-7+6=-1$.

7. 设全集 $I=\{2,4,1-a\}$，$A=\{2,a^2-a+2\}$，若 $\overline{A}=\{-1\}$，求 a 的值.

解　∵ $\overline{A}=\{-1\}$，∴ $\begin{cases}1-a=-1,\\a^2-a+2\neq-1,\end{cases}$ 解得 $a=2$，这时 $I=\{2,4,-1\}$，$A=\{2,4\}$，$\overline{A}=\{-1\}$，符合条件. ∴ $a=2$.

四、备用题

1. 设全集 $I=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x=-t^2,t\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x=3+|t|,t\in\mathbf{R}\}$，求 $\overline{A\cup B}$.

解　化简集合得 $A=\{x|x\leqslant0\}$，$B=\{x|x\geqslant3\}$，于是 $A\cup B=\{x|x\leqslant0$ 或 $x\geqslant3\}$，∴ $\overline{A\cup B}=\{x|0<x<3\}$.

2. 已知集合 $A=\{x|x^2+tx+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^-=\varnothing$，求实数 t 的取值范围.

解　∵ $A\cap\mathbf{R}^-=\varnothing$，∴ 有两种情形. (1) $A=\varnothing$，这时 $t^2-4<0$，即 $-2<t<2$；(2) A 中元素是非负实数. 设方程 $x^2+tx+1=0$ 的两根为 $x_1\geqslant0,x_2\geqslant0$，则 $\begin{cases}\Delta=t^2-4\geqslant0,\\t=-(x_1+x_2)\leqslant0,\end{cases}$ ∴ $t\leqslant-2$. 综合(1)，(2)可得 $t<2$.

3. 若 $I=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)|y=3x-2\}$，$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-4}{x-2}=3\right\}$，求 $A\cap B$ 及 $\overline{A}\cup B$.

解　∵ $\dfrac{y-4}{x-2}=3$，∴ $y=3x-2(x\neq2)$，∴ $B\subset A$，于是 $A\cap B=B$，且 $\overline{A}\cup B=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R},(x,y)\neq(2,4)\}$.

6. 习 题 课(1)

一、基础训练题

1. 若集合 A,B,C 满足 $A\cap B=A$，$B\cup C=C$，则 A,C 之间的关系必定是 (C)

(A) $A\subset C$　(B) $C\subset A$　(C) $A\subseteq C$　(D) $C\subseteq A$

提示　$\because A\cap B=A$，$\therefore A\subseteq B$；$\because B\cup C=C$，$\therefore B\subseteq C$，$\therefore A\subseteq C$.

2. 设 A,B 是全集 I 的两个子集，且 $A\subsetneqq B$，则以下成立的是 (C)

(A) $\overline{A}\subseteq\overline{B}$　(B) $\overline{A}\cup\overline{B}=I$　(C) $A\cap\overline{B}=\varnothing$　(D) $\overline{A}\cap B=\varnothing$

提示　画出集合关系的图形.

3. 若 $A=\{$菱形$\}$，$B=\{$矩形$\}$，则 $A\cap B=$ ___$\{$正方形$\}$___.

提示　四边相等，四个角是直角的四边形是正方形.

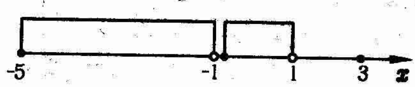
4. 若 $A=\{x\,|\,|x|\leqslant 1,x\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\,|\,\sqrt{x}\leqslant 1,x\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$ ___$\{0,1\}$___.

解　化简集合得 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{0,1\}$，$\therefore A\cap B=\{0,1\}$.

二、例题

1. 已知全集 $I=\{x\,|\,-5\leqslant x\leqslant 3\}$，$A=\{x\,|\,-5\leqslant x<-1\}$，$B=\{x\,|\,-1\leqslant x<1\}$，求 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cap B}$，$\overline{A\cup B}$，并指出其中相等的集合.

解　将集合 I,A,B 表示在数轴上(如图)，



$\overline{A}=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 3\}$；

$\overline{B}=\{x\,|\,-5\leqslant x<-1$ 或 $1\leqslant x<3\}$；

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 3\}$；$\overline{A}\cup\overline{B}=\{x\,|\,-5\leqslant x\leqslant 3\}=I$；

$\overline{A\cap B}=I(\because A\cap B=\varnothing)$；

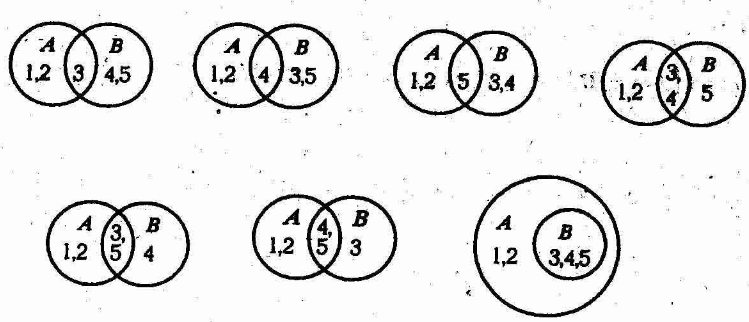
$\overline{A\cup B}=\{x\,|\,1\leqslant x\leqslant 3\}$.

相等集合有 $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$.

注　求补集时要特别注意不等式中等号是否需要. 从本题的相等集合中再一次验证了德·摩根律.

2. 已知全集 $I=\{1,2,3,4,5\}$，若 $A\cup B=I$，$A\cap B\neq\varnothing$，且 $A\cap\overline{B}=\{1,2\}$，试用文氏图表示所有满足上述条件的集合 A,B.

解　$\because A\cap\overline{B}=\{1,2\}$，$\therefore 1\in A,2\in A$，但 $1\notin B,2\notin B$，可得如下 7 种情形：



3. 设 $A=\{x\,|\,x^2+px-12=0\}$，$B=\{x\,|\,x^2+qx+r=0\}$，且 $A\neq B$，$A\cup B=\{-3,4\}$，$A\cap B=\{-3\}$，求 p,q,r 的值.