21世纪普通高等教育基础课规划教材

大学物理解题方法

——波动与光学、热学、量子物理基础

钟寿仙　张鹏　孙为　陈少华　编

University Physics

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪普通高等教育基础课规划教材

大学物理解题方法

——波动与光学、热学、量子物理基础

钟寿仙 张 鹏 孙 为 陈少华 编

机 械 工 业 出 版 社

本书为“大学物理学”的辅导教材，是中国石油大学（北京）为全校本科生开设的“大学物理解题方法”选修课教材，是“大学物理解题方法课程建设与研究”校级重点教改研究项目成果之一。

全书共7章，包括波动与光学、热学、量子物理基础等内容，每章内容分为7个板块：内容提要、教学基本要求、基本题型、解题方法介绍、典型例题、课堂讨论与练习和专题训练。书末提供了与“大学物理Ⅱ”配套的自测题、期中考试模拟试题和期末考试模拟试题及参考答案。

本书以系统地介绍大学物理解题方法为主线，突出地体现解题方法的归纳总结和指导，突出对大学生学习方法的引导和能力训练。典型例题侧重一题多解，以达到增强学生解题能力、拓展思路、举一反三和事半功倍的作用。本书所选题目大多来自国内具有较高水平的大学物理教材和辅导教材，部分是根据编者多年的教学积累自编的题目，所选题目从易到难，既有侧重基础知识、基本方法训练的基础题，又有侧重知识灵活运用、技巧训练、拓展知识和考查能力的提高题。本书可作为不同层次的工科院校的大学物理课程的辅导书，还可作为大学物理教师教学或其他读者自学的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理解题方法：波动与光学、热学、量子物理基础/钟寿仙等编.—北京：机械工业出版社，2009.8
21世纪普通高等教育基础课规划教材
ISBN 978-7-111-27109-3

Ⅰ.大…　Ⅱ.钟…　Ⅲ.物理学-高等学校-解题　Ⅳ.04-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第103193号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：张金奎　版式设计：霍永明　责任校对：李秋荣
封面设计：鞠　杨　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（兴文装订厂装订）
2009年10月第1版第1次印刷
169mm×239mm·11印张·208千字
标准书号：ISBN 978-7-111-27109-3
定价：16.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销 售 一 部：（010）68326294
销 售 二 部：（010）88379649
读者服务部：（010）68993821

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com

前 言

“大学物理学”是理工科院校学生必修的一门重要基础理论课程，在培养创新人才方面，该课程具有其他学科无法替代的作用。该课程所讲授的基本概念、基本理论和基本方法是构成学生科学素养的重要组成部分，是一个科学工作者和工程技术人员必需的，是创新人才成长所必需掌握的。随着我校大学物理教学改革的深入，从2008年起，我校对全校本科生新增设了“大学物理解题方法”选修课程，该课程结合大学物理习题讨论和讲授，强化重点、突破难点、突出方法指导与训练，旨在较为系统、深入地向学生介绍和传授解决大学物理问题的方法，帮助学生更好地掌握物理学的基本概念、基本理论、基本方法，使理论知识与方法融会贯通，提高学生分析问题和解决问题的能力，为他们今后的学习打下扎实的物理基础。针对“大学物理解题方法”选修课教学内容，我们编写了《大学物理解题方法——力学与电磁学》及《大学物理解题方法——波动与光学、热学、量子物理基础》，并把本套教材作为该门选修课程的教材和“大学物理”的配套辅助教材。

本套书参考了许多国内相关教材，在孙为、邵长金、王爱军、张鹏编写的《大学物理辅导与习题》和钟寿仙、张鹏、冷文秀、陈少华等编写的《大学物理专题训练》校内讲义的基础上，结合编者多年来积累的教学经验和研究成果编写而成。该书从大学物理教学实际出发，以系统地介绍大学物理解题方法为主线，突出地体现解题方法的归纳总结和指导，注重大学生学习方法的引导与训练，以达到强化思维训练、提高学生分析问题和解决问题的能力的目的。本书是近年来编者主持的“大学物理思想与方法教学探索与实践”和“大学物理解题方法课程建设与研究”校级重点教改项目研究成果之一，该书在编写体系上有所创新，体现了综合素质和能力培养及教学改革思想，这也是本书的特色所在之处。

本套书由钟寿仙、张鹏、孙为总策划。承担本书编写工作的有：钟寿仙、张鹏、孙为、陈少华，本书由钟寿仙和张鹏统稿。

本书的出版得到了中国石油大学（北京）数理系领导和物理教研室的同行以及部分学生的大力帮助和支持，在此向支持我们工作的全体师生表示衷心感谢。

由于我们学识有限，难免会有错误、疏漏和不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

2009年5月于中国石油大学（北京）

目　录

第1章　简谐振动

1.1　内容提要

（1）简谐振动的运动学特征（或振动表达式）：$x = A\cos(\omega t + \varphi)$。

其中三个特征量：振幅 A（取决于振动的能量、初始条件）；

固有角频率 ω（取决于振动系统本身的性质）；

初位相 φ（取决于初始条件）。

$(\omega t + \varphi)$ 为 t 时刻的振动相位。

振幅和初相位可由初始条件确定：

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}},\quad \varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

（2）简谐振动的动力学特征（动力学方程）。

1）简谐振动的运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

在机械振动范围，与上述方程等价的简谐振动特征——系统所受的合力为线性恢复力（或准弹性力）或线性恢复力矩。

2）简谐振动系统的动能

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

3）简谐振动系统的势能

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

4）机械能（守恒）$E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kA^2 =$ 常量

（3）简谐振动的合成。

1）同方向、同频率的简谐振动的合成——仍为简谐振动。

设两个沿 x 方向的分振动为

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$

和

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

则其合振动为

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

其中合振动的振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \quad (\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1)$$

合振动的初相满足 $\tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

合振动加强、减弱条件：

当 $\Delta\varphi = 2k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$A_{max} = A_1 + A_2$；

当 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时，$A_{min} = |A_1 - A_2|$。

2）同方向不同频率的两个简谐振动的合成——拍。

设两个沿 x 方向的分振动为 $x_1 = A\cos\omega_1 t$ 和 $x_2 = A\cos\omega_2 t$，则其合振动为

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t = A(t)\cos\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t$$

由于合振幅 $A(t) = 2A\cos\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}t$ 随时间作周期性变化，故产生了拍现象，定义单位时间内振幅大小变化的次数为拍频：

$$\nu_{拍} = \left|\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}\right| = |\nu_2 - \nu_1| = \Delta\nu$$

3）两个互相垂直的同频率的简谐振动的合成。

设两个分别沿 x 和 y 方向的分振动为 $x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ 和 $y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$，其合振动的运动轨迹方程为

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi$$

合成轨迹形状由

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

决定，除特殊情况外，一般是圆或椭圆。

4）相互垂直的两个不同频率的简谐振动，若其频率之比为整数比，则其合振动轨迹为李萨如图形。

1.2 教学基本要求

（1）掌握简谐振动的基本特征，会判断一个力学系统或简单电路系统是否作简谐振动或简谐振荡。

（2）掌握描述简谐振动的各物理量的意义及其相互关系。

（3）掌握旋转矢量法，并能熟练运用此方法分析计算相关问题。

（4）掌握两个同振动方向、同频率的简谐振动的合成方法和规律。

1.3 基本题型

1.3.1 简谐振动运动学问题的求解

（1）已知描述简谐振动的三个特征量 A、ω、φ 和初始条件，求振动表达式、画振动曲线。

（2）已知振动表达式或振动曲线，求相关物理量（三个特征量 A、ω、φ，速度 v、加速度 a 等）。

1.3.2 简谐振动动力学问题的求解

（1）由简谐振动的运动微分方程求简谐振动的固有频率和固有周期。

（2）与力学定律相结合的振动问题的分析计算。

1.3.3 同方向、同频率的简谐振动的合成问题的分析计算

1.4 解题方法介绍

1.4.1 简谐振动的描述方法

1. 解析法

用函数的形式 $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ 表示简谐振动，求解相关问题的方法。

2. 旋转矢量法

旋转矢量法是表示简谐振动的一种几何描述方法，如图 1-1a 所示，一长度等于简谐振动振幅 A 的矢量 $\boldsymbol{A}$，以恒定角速度 ω 沿逆时针方向转动，则称 $\boldsymbol{A}$ 为旋转矢量，其端点在 x 轴上的投影点的运动就是简谐振动。此法可将描述简谐振动的三个特征量 A、ω 和 φ 就可以用旋转矢量来描述。

（1）旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模对应的是简谐振动的振幅 A；

（2）旋转的角速度对应简谐振动的角频率 ω；

（3）t 时刻旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴之间的夹角对应简谐振动的相位 $(\omega t + \varphi)$；

（4）$t=0$ 时刻旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴之间的夹角对应谐振动的初相位 φ。

旋转矢量不但可以表示简谐振动的位移，也可以表示简谐振动速度和加速度，即可以完全描述作简谐振动的物体的运动状态，如图 1-1b 所示。t 时刻旋转矢量作圆周运动的速度和加速度的振幅分别为 $v_m = \omega A$ 和 $a_m = A\omega^2$，而 t 时刻简

谐振动的速度和加速度则分别为$\boldsymbol{v}_m$和$\boldsymbol{a}_m$在x轴上的投影。

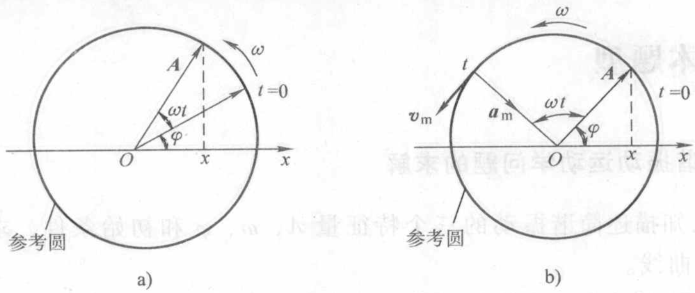


图　1-1

3. 图线法

图线法是描述物体的各种运动的常用方法，即利用各种图线作为辅助手段，将物体的各种运动规律形象、直观地表示出来的方法。图线能直观地表示物理量之间的相互关系，形象地描述运动规律，因此，在分析计算物理问题时，利用图线法有助于知识的记忆和理解，把握物理量之间的数量关系，深刻理解问题的物理意义。为了便于分析和理解简谐振动中谐振子（质点）作直线运动的细节，我们采用各种曲线来描述简谐振动的运动规律：用质点的位置坐标x与时间t的曲线表示质点的运动函数（即运动规律的图象，简称x-t曲线）。还可用v-t曲线和a-t曲线表示质点的运动情况。

1.4.2　简谐振动的动力学判断方法

判断力学系统是否作简谐振动，一般从简谐振动的特征入手，以解决问题方便为原则，可以从三个方面来判断：

（1）从运动学特征来判断。即根据谐振子的坐标与时间的关系是否为余弦（或正弦）函数的形式$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$来判断；

（2）从动力学特征来判断。根据系统（质点或刚体）所受的合力或合力矩是否为线性恢复力$F=-kx$或线性恢复力矩$M=-k\theta$来判断；

（3）从动力学方程是否能表示为$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$予以判断；

（4）对于保守系统，还可以用能量守恒$E=\dfrac{1}{2}mv^2+\dfrac{1}{2}kx^2=C$方法判断。

这三种方法常与能量守恒定律联系在一起，三种方法在逻辑上相互关联，可以互相替代。

1.4.3　简谐振动的角频率ω的动力学求解方法——“隔离体法”

利用“隔离体法”求简谐振动的角频率ω的具体思路与步骤如下：

(1) 对隔离体（即谐振子）进行受力分析；

(2) 建立适当的坐标系；

(3) 根据牛顿定律、转动定律等动力学定理或定律建立方程；

(4) 将建立的动力学微分方程简化成 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ 形式——简谐振动的动力学判据；

(5) 与简谐振动的动力学判据 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ 对比得出 ω^2，从而求得简谐振动的固有角频率 ω。

这种方法一般是从质点受力的角度分析简谐振动规律，因此可归结为动力学问题来处理，理解这一点是非常重要的，它能使我们看到新旧知识和方法的联系，尽快掌握分析和解决简谐振动的问题的方法。

1.4.4 简谐振动的角频率 ω 的能量求解方法——“能量法”

对于保守的简谐振动系统，还可用能量守恒求解简谐振动的角频率 ω。具体思路与步骤如下：

(1) 选取适当的势能零点，根据简谐振动的能量动力学特征——简谐振动系统能量守恒，列出简谐振动系统能量守恒式；

(2) 对能量守恒式进行微分运算，并将所得的微分方程简化成 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ 形式；

(3) 与简谐振动的动力学判据 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ 对比得出 ω^2，从而求得简谐振动的固有角频率 ω。

1.4.5 同方向、同频率的简谐振动合成问题的处理方法

两个及其以上的同方向、同频率的简谐振动的合成振动仍然是与分振动同频率的简谐振动，其表达式为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \tag{1}$$

因此，求出简谐振动的合振动三个特征量 A、ω、φ，是求解合振动的关键。有关求解方法主要有

1. 公式法求合振动

利用合振动的振幅和初相位公式

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \tag{2}$$

$$\varphi=\arctan\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2} \tag{3}$$

求出合振动的振幅 A 和初相位 φ，将 A、φ 代入式（1）即可求得合振动表达式。

2. 旋转矢量法求同方向同频率的简谐振动的合振动

如图 1-2a 所示，两个同方向同频率的简谐振动的振幅分别为 A_1 和 A_2，其合振动显然是简谐振动。

由旋转矢量的几何关系，根据平行四边形法则和矢量平移不变性，即可求得合振动的振幅和初相位［即公式（2）和公式（3）］，进而较方便地研究多个简谐振动的合成。

对于 n 个同方向、同频率、振幅均等于 a、初相位依次相差一个 δ 的简谐振动：$x_1 = a\cos\omega t; x_2 = a\cos(\omega t + \delta); \cdots; x_n = a\cos[\omega t + (n-1)\delta]$，利用旋转矢量法可作出如图 1-2b 所示相量图，并由相量图较方便地求出合振动的振幅和初相位：

$$A = a\left|\sin\frac{n\delta}{2}/\sin\frac{\delta}{2}\right|$$

$$\varphi = \frac{n-1}{2}\delta$$

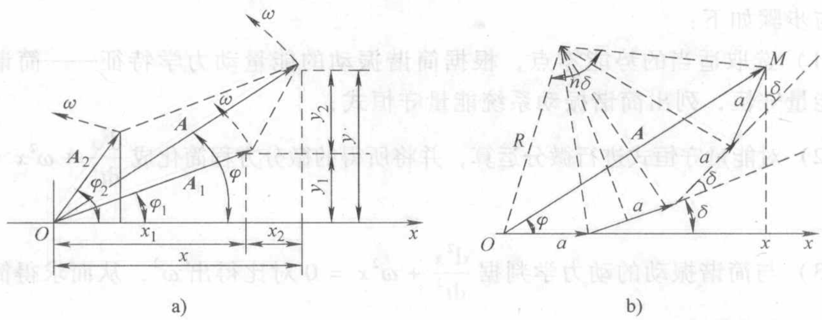


图　1-2

注意如果两个简谐振动的频率不同，则合振动不再是简谐振动，其合振动的特征也可以用旋转矢量法较容易地求解（读者自己研究）。

旋转矢量法是为了直观地描述简谐振动而采用的一种手段和工具，其优点是直观、简便，使抽象的相位和初相位有了形象的表示方法。然而，应当注意的是，旋转矢量本身的运动并非简谐振动，矢量是以一定角速度绕原点作逆时针匀速圆周运动，而矢量的端点在 x 轴上的投影点的运动才是简谐振动。在确定相位、初相位，比较两振动的相位差以及运动合成等问题时，都体现了这种方法的优越性。

1.5　典型例题

例题 1.1　一物体作简谐运动，其振幅为 20cm，周期为 4s。当 $t=0$ 时，位

移为 -10cm，且向 x 轴负方向运动。试求：

（1）此简谐振动的表达式。

（2）在 $x=-10\mathrm{cm}$ 处，且向 x 轴正方向运动时的速度和加速度。

（3）从上述（2）的位置回到平衡位置的最短时间。

选题目的 简谐振动的表达式、速度和加速度的求解。

分析 求物体作简谐振动表达式、速度和加速度的关键是找到描述简谐振动的三个特征量：振幅 A、角频率 ω 和初相位 φ。本题已给出了振幅 A，而由已知周期可以很容易求出角频率 ω，因此求解 φ 变成求解简谐振动表达式以及速度和加速度的关键。以下分别介绍用解析法和旋转矢量法求 φ。

解 方法一 解析法求解

（1）设简谐振动的方程为 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$，由已知 $A=0.2\mathrm{m}$，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{2}$。将 $t=0$ 时，$x=-0.10\mathrm{m}$ 代入方程，得

$$\cos\varphi=-\frac{1}{2},\ \varphi=\pm\frac{2\pi}{3}$$

φ 的取舍由 $t=0$ 时刻的运动状态来决定。

$t=0$ 时，速度 $v=\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\left.-A\omega\sin(\omega t+\varphi)\right|_{t=0}=-A\omega\sin\varphi<0$，故舍去 φ 负值，即取 $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$。

故简谐运动方程为

$$x=0.20\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{2\pi}{3}\right)\quad(\mathrm{m})$$

（2）设在 $t=t_1$ 时刻时，物体位于 $x_1=-0.10\mathrm{m}$，且向 x 轴正方向运动，则有

$$x_1=0.20\cos\left(\frac{\pi}{2}t_1+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\frac{\pi}{2}t_1+\frac{2\pi}{3}=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3},k=1,2,3,\cdots$$

再根据 t_1 时刻的运动状态，$v=\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1}>0$，可取

$$\frac{\pi}{2}t_1+\frac{2\pi}{3}=2\pi-\frac{2\pi}{3}$$

故

$$t_1=\frac{4}{3}\mathrm{s}$$

该时刻的速度和加速度分别为

$$v = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1} = -A\omega\sin(\omega t_1 + \varphi) = -A\omega\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$= -0.20 \times \frac{\pi}{2} \times \sin\frac{4\pi}{3}\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 0.272\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a = \left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1} = -A\omega^2\cos(\omega t_1 + \varphi) = -A\omega^2\cos\frac{4\pi}{3}$$

$$= -0.20 \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times \cos\frac{4\pi}{3}\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0.247\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

（3）设在 $t = t_2$ 时刻时，物体到达平衡位置，即 $x_2 = 0$。解方程

$$x_2 = 0.20\cos\left(\frac{\pi}{2}t_2 + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

得

$$\frac{\pi}{2}t_2 + \frac{2\pi}{3} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$t_2 = 2k - \frac{1}{3} \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

取 $k = 1$，可得所求的最短时间为

$$\Delta t_{\min} = t_2 - t_1 = \left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}\right)\mathrm{s} = \frac{1}{3}\mathrm{s}$$

方法二　旋转矢量法求解

（1）作半径为 $A = 0.20\mathrm{m}$ 的参考圆，如图 1-3a 所示。对应于 $t = 0$ 时，$x = -0.10\mathrm{m}$，$v < 0$ 的振动状态，相应的初相位为 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$。

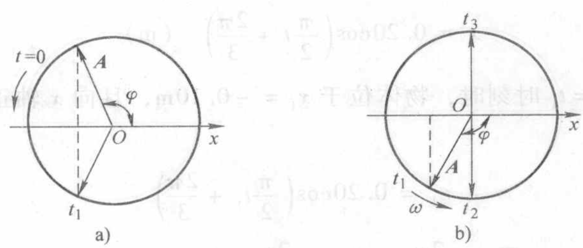


图　1-3

故简谐运动方程为

$$x = 0.20\cos\left(\frac{\pi}{2}t_1 + \frac{2\pi}{3}\right)(\mathrm{m})$$

（2）如图 1-3a 所示，对应于 $t = t_1$ 时，$x = -0.10\mathrm{m}$，$v > 0$ 振动状态，相应的相位为 $\omega t_1 + \varphi = \frac{4\pi}{3}$。则该时刻的速度和加速度分别为

$$v = -A\omega\sin(\omega t_1 + \varphi) = -A\omega\sin\frac{4\pi}{3} = 0.272\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t_1 + \varphi) = -A\omega^2\cos\frac{4\pi}{3} = 0.247\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

（3）如图 1-3b 所示，对应于 $x_2 = 0$ 的振动状态有两个可能，如图中的 $t = t_3$ 和 $t = t_4$。但题目所要求的是从状态 $t = t_2$ 逆时针旋转，所以从 $t = t_2$ 旋转到 $t = t_3$ 所需时间最短，故这两个状态所对应的夹角（相位差）为 $\Delta\varphi = \frac{\pi}{6}$，故

$$\Delta t_{\min} = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}/\frac{\pi}{2}\text{s} = \frac{1}{3}\text{s}$$

讨论

（1）由本例题可见，利用旋转矢量法求初相位方便直观。在运用旋转矢量法时，读者应注意矢量的旋转方向规定为逆时针方向。

（2）求出简谐振动的一般表达式后，求质点的速度和加速度只需进行求导计算即可。

（3）根据简谐振动表达式的物理意义，物体在作简谐振动时不同时刻对应不同的振动状态，而振动状态完全取决于相位。所以，求时间间隔就是求不同相位之间的时间差，或者是求旋转矢量从一个相位旋转到另一个相位所用的时间。对这类问题，用旋转矢量法求解更简捷和直观。

例题 1.2 已知一质点作振动曲线为如图 1-4a 所示的简谐运动，求振动表达式。

选题目的 由简谐振动曲线求简谐振动表达式。

分析 本题是由振动曲线确定简谐振动表达式。由曲线求出描述物体作简谐振动的三个特征量（振幅 A、角频率 ω 和初相位 φ）是解题的关键。振幅 A 可直接从图线 1-4a 中读出，ω 和 φ 可用解析法和旋转矢量法求得。

解 设所求的简谐振动表达式为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

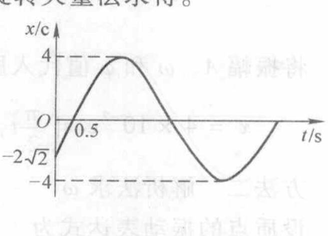
由图 1-4a 可得

$$A = 4\text{cm}$$

（1）初相位 φ 的计算

方法一 解析法

由所设的振动表达式和初始条件：$t = 0$ 时，$x_0 = -2\sqrt{2}\text{cm}$，可得



a)

图 1-4

$$-2\sqrt{2} = A\cos\varphi$$

在 $-\pi$ 到 π 之间取值，得

$$\varphi = \pm \frac{3\pi}{4}$$

根据初始条件，由

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

得

$$v_0 = -\omega A\sin\varphi$$

由图 1-4a 曲线可知，$t=0$ 时质点向 x 正方向运动，所以 $v_0>0$，因此，要求

$$\sin\varphi < 0$$

故，应取

$$\varphi = -\frac{3\pi}{4}$$

方法二　旋转矢量法

根据初始条件：在 $t=0$ 时，$x_0=-\sqrt{2}A/2$ 和 $v_0>0$。很容易画出如图 1-4b 所示相量图，根据图中旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 所在的位置可知，初相位为

$$\varphi = -\frac{3\pi}{4} \text{ 或 } \varphi = \frac{5\pi}{4}$$

通常取 $|\varphi|<\pi$，故

$$\varphi = -\frac{3\pi}{4}$$

（2）角频率 ω 的计算

方法一　利用旋转矢量法求角频率 ω

从旋转矢量图 1-4b 所示可知，旋转矢量 $\boldsymbol{A}$ 从 $t=0$ 到 $t=0.5\text{s}$ 所转过的角度为 $\pi/4$，所以

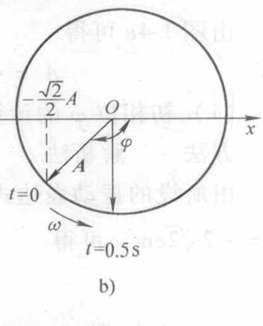
$$\Delta\varphi = \omega t = \frac{\pi}{4}$$

故

$$\omega = \frac{\pi}{2}$$

将振幅 A、ω 和 φ 值代入所设的简谐振动的表达式，则物体的振动表达式为

$$x = 4\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{3\pi}{4}\right) \quad (\text{m})$$



b)

图　1-4

方法二　解析法求 ω

设质点的振动表达式为

$$x = 4\times10^{-2}\cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right) \quad (\text{m})$$

将 $t=0.5\text{s}$ 时，$x=0$ 代入得到

$$\cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

即
$$\frac{\omega}{2}-\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}\text{或}-\frac{\pi}{2}$$
通常取$|\varphi|<\pi$，则有
$$\frac{\omega}{2}-\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$$
同样可以得到
$$\omega=\frac{\pi}{2}$$
则简谐振动的表达式
$$x=4\times10^{-2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{3\pi}{4}\right)\quad(\mathrm{m})$$

讨论

（1）本题由振动曲线求简谐振动表达式。由曲线判断出质点在任意时刻的运动方向，从而求出初相位φ，这是解题的关键。

（2）由本例题可见，利用旋转矢量法正确画相量图是求解初相位φ和角频率ω的关键。注意初相位规定为$|\varphi|<\pi$。

（3）解析法和旋转矢量法交叉使用，可提高解题效率。

例题 1.3 劲度系数分别为k_1和k_2的两根弹簧和质量为m的物体相连，如图1-5所示，证明在弹簧的弹性限度内，物体的运动为简谐振动，并求出振动系统的周期。

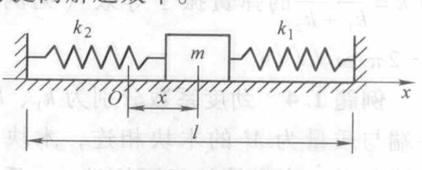


图 1-5

选题目的 弹簧并联的简谐振动的求解。

分析 判断m是否作简谐振动，有三种方式可供选择。其中最直接的方式就是求合力的表达式，看其是否可表示为$F=-kx$的形式，其中x是以平衡位置为坐标原点的坐标，“$-$”号表示其方向与位移方向相反。一旦求出系统所受的合外力为$F=-kx$，我们就可以得到两弹簧并联时系统的总劲度系数k，而由弹簧振子的角频率$\omega=\sqrt{k/m}$即可求得ω，从而求得系统的固有周期。

证明 为不失一般性，设两弹簧原长分别为l_1和l_2，其支架长$l>l_1+l_2$，平衡时，两弹簧的形变分别为Δl_1和Δl_2，则有
$$k_1\Delta l_1=k_2\Delta l_2\tag{1}$$
设t时刻m的坐标为x，则有
$$x_1=x_2=x$$
m所受的力为
$$F=-k_1(x-\Delta l_1)-k_2(\Delta l_2+x)\tag{2}$$

联立（1）、（2）两式，可得

$$F = -(k_1 + k_2)x = -kx \tag{3}$$

其中 $k = k_1 + k_2$，可见物体受到的力为线性恢复力，故物体作简谐振动，其角频率为

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$$

系统的固有周期为

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/(k_1 + k_2)}$$

讨论

（1）本题计算表明 ω 和 T 仍只由 k_1、k_2 和 m 决定，而与两弹簧的形变 Δl_1 和 Δl_2 无关，所以，两个弹簧并联系统的角频率和周期仍分别为 $\omega = \sqrt{k/m}$ 和 $T = 2\pi/\omega$。且两个弹簧（劲度系数分别为 k_1 和 k_2）并联的系统，与一个劲度系数为 $k = k_1 + k_2$ 的弹簧等效，故可将 k 称为并联弹簧的等效劲度系数。

（2）运用同样的方法，读者可以证明两个弹簧（劲度系数分别为 k_1 和 k_2）串联时系统的振动为简谐振动，而且两个弹簧串联的振动系统与一个劲度系数为 $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ 的弹簧振子等效（见例题 1.4），角频率和周期仍为 $\omega = \sqrt{k/m}$ 和 $T = 2\pi/\omega$。

例题 1.4　劲度系数分别为 k_1、k_2 的两个轻弹簧串联后一端与墙壁相连，另一端与质量为 M 的木块相连，木块放在光滑的水平面上。当弹簧处于原长时，一质量为 m 的子弹以初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 射入木块，并与木块一起运动，如图 1-6 所示。

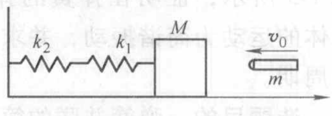


图　1-6

（1）证明系统作简谐振动，并求系统的振动角频率。

（2）求振动表达式。

选题目的　弹簧串联的简谐振动的求解。

分析　此系统属于两个弹簧串联的情形，由于不同劲度系数的弹簧在相同的外力作用下，其形变量不同，所以当物体 M 产生位移 x 时，弹簧 k_1 和 k_2 发生的形变分别为 x_1 和 x_2，且 $x = x_1 + x_2$。

证明　（1）取平衡位置为原点，建立如图 1-6 所示坐标，当木块和子弹处于坐标 x 处（未画出来）时所受的力为

$$F = -kx = -k(x_1 + x_2) \tag{1}$$

式中，x_1、x_2 分别为弹簧 1、2 的伸长量。又 $F_1 = F_2 = F$，于是有

$$x_1 = -\frac{F_1}{k_1} = -\frac{F}{k_1} \tag{2}$$