Tongbu Zhuanti Tupo

同步专题突破

Chaoji Ketang

新课标

超级课堂

丛书主编／王后雄　本册主编／田祥高

高中数学 2－2 （选修）

考点分类例析

方法视窗导引

防错档案预警

专题优化测训

华中师范大学出版社

Tongbu Zhuanti Tupo

同步专题突破 超级课堂

Chaoji Ketang

数学

紧扣课标，直击高考，突破难点，解析疑点，化整为零，各个击破，点线面全方位建构“同步专题”攻略平台。

由“母题”发散“子题”，理顺“一个题”与“多个题”的关系，寻找“一类题”在思维方法和解题技巧上的“共性”，通吃“千张纸，万道题”，实现知识“内化”，促成能力“迁移”。

《超级课堂》同步专题系列

- 数学（必修1、2、3、4、5）
- 数学（选修2-1）
- 数学（选修2-2）
- 数学（选修2-3）
- 物理（必修1、2）
- 物理（选修3-1）
- 物理（选修3-2）
- 物理（选修3-3）
- 物理（选修3-4）
- 物理（选修3-5）
- 化学（必修1、2）
- 化学（物质结构与性质）
- 化学（化学反应原理）
- 化学（有机化学基础）
- 化学（实验、技术与生活）
- 生物（必修1、2、3）
- 地理（必修1、2、3）

《重难点手册》同步讲解系列

- 数学（必修1、2、3、4、5/人教A版）
- 数学（选修2-1、2-2、2-3/人教A版）
- 数学（必修1、2、3、4、5/苏教版）
- 数学（选修2-1、2-2、2-3/苏教版）
- 物理（必修1、2/粤教版）
- 物理（必修1、2/人教版）
- 物理（选修3-1、3-2、3-4、3-5人教版）
- 化学（必修1、2/鲁科版）
- 化学（必修1、2/人教版）
- 化学（选修3 物质结构与性质/人教版）
- 化学（选修4 化学反应原理/人教版）
- 化学（选修5 有机化学基础/人教版）
- 化学（必修1、2/苏教版）
- 化学（选修3 物质结构与性质/苏教版）
- 化学（选修4 化学反应原理/苏教版）
- 化学（选修5 有机化学基础/苏教版）
- 生物（必修1、2、3/人教版）

ISBN 978-7-5622-3896-6
9 787562 238966 >
定价：24.80元

责任编辑/王金娥 责任校对/罗艺 封面设计/甘英

新课标

Tongbu Zhuanti Tupo

同步专题突破

丛书主编/王后雄　本册主编/田祥高

超级课堂

高中数学

2-2

(选修)

華中師範大學出版社

新出图证(鄂)字 10 号
图书在版编目(CIP)数据

同步专题突破超级课堂 高中数学2—2(选修)/丛书主编:王后雄,本册主编:田祥高
—武汉:华中师范大学出版社,2009.11
ISBN 978-7-5622-3896-6
Ⅰ.同… Ⅱ.①王… ②田… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 043442 号

同步专题突破超级课堂 高中数学2—2(选修)

丛书主编:王后雄　　本册主编:田祥高
责任编辑:王金娥　　责任校对:罗　艺　　封面设计:甘　英
选题设计:第一编辑室(027—67867361)
出版发行:华中师范大学出版社 ©
社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号
销售电话:027—67863040　027—67867076　027—67867371　027—67861549
邮购:027—67861321
传真:027—67863291
网址:http://www.ccnupress.com
电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn
印刷:湖北省鄂南新华印务有限公司
督印:章光琼
字数:360 千字
开本:889mm×1194mm　1/16
印张:13.75
版次:2009 年 11 月第 1 版
印次:2009 年 11 月第 1 次印刷
定价:24.80 元
欢迎上网查询、购书

《同步专题突破超级课堂》使用图解

课标解读

呈现新课程标准内容要素，锁定不同版本教材要求，指明学习和考试的具体目标。

学法导引

注重学法点拨和考试方法指导，揭示学习重点和难点，探讨考试命题规律。

板块一　导数及其应用

第1讲　变化率与导数的概念

课标解读

1. 了解函数的平均变化率的概念，会根据具体的函数求出函数的平均变化率.

2. 理解瞬时速度的含义，了解并感受当 $\Delta t\to 0$ 时，用平均速度来逼近 t_0 时刻瞬时速度的思想.

学法导引

1. 学习本讲内容时，应先通过具体实例(如气球的平均膨胀率、平均速度等问题)，理解函数的平均变化率这一概念，进而由实例(瞬时速度、瞬时变化率等问题)提炼出导数的概念.

考点分类例析

考点例析

考点分类、核心总结，要点重点各个击破，典例创新引导，首创分类解析导解模式。

考点1　平均变化率

核心总结

设函数 $y=f(x)$，x_1、x_2 是其定义域内不同的两点，那么函数的变化率可用式子 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 表示，我们把这个式子称为函数 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率.

考题1　求 $y=-\frac{6}{x}$ 在区间[1,2]，[−5,−3]上的平均变化率.

【解】　在区间[1,2]上，$\Delta y=f(2)-f(1)=-\frac{6}{2}-\left(-\frac{6}{1}\right)=3$，$\Delta x=2-1=1$，

$\therefore$ 在区间[1,2]上的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=3$.

在区间[−5,−3]上，$\Delta y=f(-3)-f(-5)=-\frac{6}{-3}+\frac{6}{-5}=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$，又 $\Delta x=-3-(-5)=2$，

【模式化】　模型：求函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的平均变化率.

方法：先求增量($\Delta y=f(b)-f(a)$，$\Delta x=b-a$)，再求它们的比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 即可.

【变式1-1】　求函数 $y=2x^2+5$ 在区间 $[2,2+\Delta x]$ 上的平均变化率，并计算当 $\Delta x=\frac{1}{2}$ 时，平均变化率的值.

难点突破

理解函数的平均变化率概念时，应注意以下几点：

方法视窗

1. 求函数 $f(x)$ 平均变化率的步骤是：

防错档案

易错点1

$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$，式子中 Δx，Δf 的值可正可负，但 Δx 的值不

规律清单

利用导数的几何意义可以求二次曲线的切线方程.

变式跟踪

案例学习迁移，母题多向发散，预测高考可考变式题型，层层剖析深入变式训练。

超级链接

最佳导学模式，学案式名师点津。方法视窗、规律清单、防错档案，革新传统学习模式。

专题优化测训

学业水平测试

1. (考点1)设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 由 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的增量 Δy 为(　　).
   A. $f(x_0+\Delta x)$　　B. $f(x_0)+\Delta x$
   C. $f(x_0)\cdot\Delta x$　　D. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
2. (考点1)质点运动规律 $s=t^2+3$，则在时间 $(3,3+\Delta t)$ 中，相应的平均速度等于(　　).
   A. $6+\Delta t$　　B. $6+\Delta t+\frac{9}{\Delta t}$
   C. $3+\Delta t$　　D. $9+\Delta t$
3. (考点1)已知函数 $f(x)=2x^2-4$ 的图象上一点(1,−2)及邻近一点 $(1+\Delta x,-2+\Delta y)$，则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于(　　).
   A. 4　　B. $4x$
   C. $4+2\Delta x$　　D. $4+2(\Delta x)^2$
4. (考点2)如果质点按规律 $s=3t^2$ 运动，则在 $t=3$ 时的瞬时速度为(　　).
   A. 6　　B. 18　　C. 54　　D. 81

高考水平测试

1. (考点1)一物体的运动方程是 $s=3+t^2$，则在一小段时间[2, 2.1]内相应的平均速度为(　　).
   A. 0.41　　B. 3　　C. 4　　D. 4.1
2. (考点2)一木块沿某一斜面自由下滑，测得下滑的水平距离 s 与时间 t 之间的函数关系为 $s=\frac{1}{8}t^2$，则 $t=2$ 秒时，此木块在水平方向的瞬时速度为(　　).
   A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$
3. (考点3)下列各式中正确的是(　　).
   A. $y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
   B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)+f(x_0)}{\Delta x}$
   C. $y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)+f(x_0)}{\Delta x}$
   D. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}$

优化测训

学业水平测试、高考水平测试，习题层级清晰，水平测试立足教材、夯实基础，高考真题再现，提升解题能力。

解题依据

首创解题线索助学模式。当你解题失误或解题缺乏思路时，解题依据教你回归考点知识和例题启示。

答案与提示

板块一　导数及其应用

第1讲　变化率与导数的概念

【变式训练】

[变式1-1]　因为 $\Delta y=2\times(2+\Delta x)^2+5-(2\times 2^2+5)=8\Delta x+2(\Delta x)^2$，所以平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=8+2\Delta x$.

当 $\Delta x=\frac{1}{2}$ 时，平均变化率的值为 $8+2\times\frac{1}{2}=9$.

【学业水平测试】

1. D　[提示：由公式 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可得. 故选 D.]

2. A　[提示：因为 $\bar{v}=\frac{s(3+\Delta t)-s(3)}{\Delta t}=\frac{6\Delta t+\Delta t^2}{\Delta t}=6+\Delta t$. 故选 A.]

3. C　[提示：$\because$ 点 $(1+\Delta x,-2+\Delta y)$ 在曲线 $f(x)=2x^2-4$ 上，故有

【高考水平测试】

1. D　[提示：$\because v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{3+2.1^2-(3+2^2)}{2.1-2}=4.1$. 故选 D.]

2. C　[提示：$s'|_{t=2}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{8}(2+\Delta t)^2-\frac{1}{8}\times 2^2}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left(\frac{1}{8}\Delta t+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. 故选 C.]

3. D　[提示：由函数 $f(x)$ 在点 x_0 处导数的定义求法可知 $\Delta y=f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)$，自变量的增量为 $(x_0+2\Delta x)-x_0=2\Delta x$，故由定义知 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}$. 故选 D.]

4. A　[提示：$\because f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a\Delta x}{\Delta x}=a$，

答案提示

提示解题思路，突破解析模式，规范标准答案，全程帮助你对照思路、比照答案、减少失误、赢得高分。

编委会

目录 CONTENTS

板块二　推理与证明

板块三　复数

板块一　导数及其应用

第1讲　变化率与导数的概念

课标解读

1. 了解函数的平均变化率的概念，会根据具体的函数求出函数的平均变化率.

2. 理解瞬时速度的含义，了解并感受当 $\Delta t\to 0$ 时，用平均速度来逼近 t_0 时刻瞬时速度的思想.

3. 理解导数的概念，能利用导数的定义求某些函数的导数.

4. 通过导数在实际问题中的应用，初步认识导数的应用价值，树立学好数学的信心.

学法导引

1. 学习本讲内容时，应先通过具体实例(如气球的平均膨胀率、平均速度等问题)，理解函数的平均变化率这一概念，进而由实例(瞬时速度、瞬时变化率等问题)提炼出导数的概念.

2. 要认清导数的实质是“增量(改变量)之比的极限”，即函数值改变量与自变量改变量之比，当自变量改变量趋于0时的极限.

考点分类例析

考点1　平均变化率

核心总结

设函数 $y=f(x)$，x_1、x_2 是其定义域内不同的两点，那么函数的变化率可用式子$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$表示，我们把这个式子称为函数 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率.

习惯上令 $\Delta x=x_2-x_1$，可把 Δx 看做是相对于 x_1 的一个“增量”，可用 $x_1+\Delta x$ 代替 x_2；类似地，$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$. 于是，平均变化率可以表示为$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

所以函数平均变化率可以记作为“函数值之差比上自变量之差”.

考题1　求 $y=-\dfrac{6}{x}$ 在区间$[1,2]$，$[-5,-3]$上的平均变化率.

【解】　在区间$[1,2]$上，$\Delta y=f(2)-f(1)=-\dfrac{6}{2}-\left(-\dfrac{6}{1}\right)=3$，$\Delta x=2-1=1$，

∴ 在区间$[1,2]$上的平均变化率为$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3$.

在区间$[-5,-3]$上，$\Delta y=f(-3)-f(-5)=-\dfrac{6}{-3}+\dfrac{6}{-5}=2-\dfrac{6}{5}=\dfrac{4}{5}$，又 $\Delta x=-3-(-5)=2$，

∴ 在区间$[-5,-3]$上的平均变化率为$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\frac{4}{5}}{2}=\dfrac{2}{5}$.

【模式化】　模型：求函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上的平均变化率.

方法：先求增量($\Delta y=f(b)-f(a)$，$\Delta x=b-a$)，再求它们的比值$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$即可.

【变式 1-1】　求函数 $y=2x^2+5$ 在区间$[2,2+\Delta x]$上的平均变化率，并计算

难点突破

理解函数的平均变化率概念时，应注意以下几点：

(1)$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$中，$\Delta x$、$\Delta y$ 的值可正可负，但 Δx 不能为 0. 若 Δy 恒为 0，则 $f(x)$ 为常数函数.

(2)若 $x_1=x_0$，$x_2=x_0+\Delta x$，则平均变化率可表示为$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

当 $\Delta x=\frac{1}{2}$时,平均变化率的值.

考题 2 已知函数 $f(x)=|x|(1+x)$,求$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$的值.

【解】 $\because f(x)=\begin{cases}x+x^2 & (x\geqslant 0),\\ -x-x^2 & (x<0),\end{cases}$

$\therefore \Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=f(\Delta x)=\begin{cases}\Delta x+\Delta x^2 & (\Delta x\geqslant 0),\\ -\Delta x-\Delta x^2 & (\Delta x<0).\end{cases}$

$\because \Delta x$ 作为分母, $\therefore \Delta x\neq 0$.

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}1+\Delta x & (\Delta x>0),\\ -1-\Delta x & (\Delta x<0).\end{cases}$

【模式化】 模型:求分段函数在分段点处的平均变化率.

方法:对自变量在分段点处的增量进行分段讨论.

【变式 1-2】 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & (x\leqslant 0),\\ x+1 & (x>0)\end{cases}$在 $x=0$ 处附近的平均变化率.

考题 3 试比较正弦函数 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$附近的平均变化率哪个大?

【分析】 先将正弦函数在每个自变量附近的平均变化率求出,然后进行大小比较,可以考虑用作差法比较大小.

【解】 当自变量从 0 变到 Δx 时,函数的平均变化率为

$$k_1=\frac{\sin\Delta x-\sin 0}{\Delta x}=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}.$$

当自变量从$\frac{\pi}{2}$变到$\frac{\pi}{2}+\Delta x$时,函数的平均变化率为

$$k_2=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\sin\frac{\pi}{2}}{\Delta x}=\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}.$$

其中 Δx 无限靠近 0,可正可负.

(3)平均变化率的几何意义是函数曲线上过两点割线的斜率,函数 $y=f(x)$图象上两点 $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2))$,则$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=k_{AB}$.

(4)由图 1-1 可知,平均变化率是曲线陡峭程度的"数量化",或者说,曲线陡峭程度是平均变化率的"视觉化".

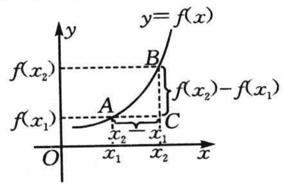


图 1-1

当 $\Delta x>0$ 时，$k_1>0$，$k_2<0$，此时 $k_1>k_2$；

当 $\Delta x<0$ 时，$k_1-k_2=\dfrac{\sin\Delta x-\cos\Delta x+1}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\frac{\pi}{4}\right)+1}{\Delta x}$，

$\because$ $\Delta x<0$，$\therefore$ $\Delta x-\dfrac{\pi}{4}<-\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore$ $\sin\left(\Delta x-\dfrac{\pi}{2}\right)<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$ $\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1<0$.

所以 $k_1-k_2>0$，即 $k_1>k_2$.

综上，$k_1>k_2$.

【模式化】 模型：比较同一函数在几点处附近的平均变化率的大小.

方法：先求其平均变化率，若其平均变化率是具体数值，则直接比较其大小；若不是具体数值，则使用比较两个实数大小的一般方法(特别是作差法)比较其大小.

【变式 1-3】 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1,2$ 附近的平均变化率，取 $\Delta x=\dfrac{1}{3}$ 时，哪一点附近平均变化率最大？

考题 4 物体从某一时刻开始作直线运动，设 s 表示此物体经过时间 t 走过的路程，显然 s 是时间 t 的函数，表示为 $s=s(t)$，在运动中测得了一些数据，如下表：

t(s)	0	2	5	10	13	15
s(m)	0	6	9	20	32	44

(1)试判断物体在 0～2s 和 13～15s 两段时间内，哪一段时间运动得快？

(2)研究物体运动速度变化的趋势.

【解】 (1)记 Δt_1 为在 0～2s 这段时间内的时间变化量，Δs_1 为这段时间内的路程的变化量，则这段时间内的平均速度为 $\dfrac{\Delta s_1}{\Delta t_1}=3\text{m/s}$.

同理，在 13～15s 内的平均速度为 $\dfrac{\Delta s_2}{\Delta t_2}=6\text{m/s}$.

可见，物体运动在 13～15s 内的平均速度比在 0～2s 内的平均速度快.

(2)可算出物体在各段相应时间内的平均速度，如下表：

时间段改变量 Δt	$\Delta t_1=2$	$\Delta t_2=3$	$\Delta t_3=5$	$\Delta t_4=3$	$\Delta t_5=2$
路程改变量 Δs	$\Delta s_1=6$	$\Delta s_2=3$	$\Delta s_3=11$	$\Delta s_4=12$	$\Delta s_5=12$
平均速度 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$	3	1	2.2	4	6

由表可见，物体在第二段时间内的平均速度比在第一段时间内的平均速度慢，在第二、三、四、五时间段内的平均速度依次递增.

【模式化】 模型：函数平均变化率的实际应用.

方法：先在实际问题中依据相关知识(如物理知识、化学知识以及函数平均变化率的几何意义等)建立平均变化率模型，再利用求函数平均变化率的算法求解即可.

方法视窗

1. 求函数 $f(x)$ 平均变化率的步骤是：

(1)求函数值的增量：$\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$；

(2)求自变量的增量：$\Delta x=x_2-x_1$；

(3)作商：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

2. 求分段函数在分段点处附近的平均变化率，关键在于分段讨论.

3. 一般地，平均速度是路程函数的平均变化率；加速度是速度函数的平均变化率；平均膨胀率则是物体的长度函数(或面积函数、体积函数等)对温度的平均变化率；……，利用这些可以在某些实际问题中建立函数的平均变化率模型.

防错档案

易错点 1

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$，

式子中 Δx，Δf 的值可正可负，但 Δx 的值不能为 0，Δf 的值可以为 0. 当函数 $f(x)$ 为常函数时，$\Delta f=0$.

易错点 2

在式子 $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ 中，当 x_1 取定值，Δx 取不同的数值时，函数的平均变化率可能不同，当 Δx 取定值，x_1 取不同的数值时，函数的平均变化率也可能不同.

【变式 1-4】 一正方体铁板在 0℃时，边长为 10cm，加热后膨胀，当温度为 t℃时，边长变为 $10(1+at)$cm，a 为常数，试求铁板面积对温度的膨胀率.

【变式 1-5】 过曲线 $y=f(x)=x^3$ 上两点 $P(1,1)$ 和 $Q(1+\Delta x,1+\Delta y)$ 作割线，求出当 $\Delta x=0.1$ 时割线的斜率.

考点 2 瞬时速度

核心总结

作变速直线运动的物体在不同时刻的速度是不同的，把物体在某一时刻的速度称为瞬时速度.

用数学语言描述为：设物体运动的位移与时间的关系是 $s=s(t)$，当 Δt 趋近于 0 时，$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ 趋近于常数，我们把这个常数称为 t_0 时刻的瞬时速度.

考题 5 一作直线运动的物体，其位移 s 与时间 t 的关系是 $s=3t-t^3$，求此物体在 $t=2$ 时的瞬时加速度.

【解】 因为 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{3(t+\Delta t)-(t+\Delta t)^3-3t+t^3}{\Delta t}$

$=\frac{-(\Delta t)^3+3\Delta t-3t^2\Delta t-3t(\Delta t)^2}{\Delta t}$

$=-(\Delta t)^2+3-3t^2-3t\Delta t$,

当 Δt 无限趋近于 0 时，$\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$ 无限趋近于 $3-3t^2$.

$\therefore v(t)=3-3t^2$.

又 $\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\frac{3-3(t+\Delta t)^2-3+3t^2}{\Delta t}=-6t-3\Delta t$,

当 Δt 无限趋近于 0 时，$\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$ 无限趋近于 $-6t$,

$\therefore a(t)=-6t$.

$\therefore$ 当 $t=2$ 时，$a(2)=(-6)\times 2=-12$.

即物体在 $t=2$ 时的瞬时加速度为 -12.

【模式化】 模型：求在某一时刻的瞬时速度.

方法：先求在增量 Δt 下的平均速度 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$，再求当 $\Delta t\to 0$ 时，$\bar{v}$ 所趋近的常数.

难点突破

理解瞬时速度的概念时，应注意以下两点：

(1) Δt 趋近于 0，是指时间间隔 Δt 越来越短，能越过任意小的时间段，但始终不能为 0.

(2) Δt、Δs 在变化中都趋近于 0，但它们的比值趋近于一个确定的常数.

【变式 2-1】 以初速度为 v_0（$v_0>0$）作竖直上抛运动的物体，t 秒时的高度为 $s(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$，求物体在时刻 t_0 处的瞬时速度.

【变式 2-2】 物体运动方程如下：

$s=\begin{cases}3t^2+1 & (0\leqslant t<3),\\ 2+3(t-3)^2 & (t\geqslant 3).\end{cases}$求此物体在 $t=1$ 和 $t=4$ 时的瞬时速度.

方法视窗

1. 求瞬时速度的步骤：

(1)设非匀速直线运动的规律 $s=s(t)$；

(2)时间改变量 Δt，位移改变量 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$；

(3)求平均速度：$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$；

(4)求瞬时速度：当 $\Delta t\to 0$ 时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的极限.

2. 求分段函数的瞬时速度时，应考虑"间断点"和"分段"的条件.

考点 3　导数的概念

核心总结

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 附近有定义，当自变量在 $x=x_0$ 附近改变量为 Δx 时，函数值相应地改变 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

如果当 Δx 趋近于 0 时，平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 趋近于一个常数 l，那么常数 l 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的瞬间变化率. 函数在 x_0 处的瞬间变化率，通常称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

考题 6 求函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的导数.

【解】 $\because \Delta y=(1+\Delta x)+\frac{1}{1+\Delta x}-\left(1+\frac{1}{1}\right)=\Delta x-1+\frac{1}{1+\Delta x}$

$=\frac{(\Delta x-1)(\Delta x+1)+1}{1+\Delta x}=\frac{(\Delta x)^2}{1+\Delta x}$，

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{1+\Delta x}$.

故当 Δx 无限趋近于 0 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于 0，即 $y'|_{x=1}=0$.

【模式化】 模型：求函数在某一点处的导数.

方法：先求平均变化率，再求当 $\Delta x\to 0$ 时，平均变化率的极限即可.

【变式 3-1】 求函数 $y=f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $x=1$ 处的导数.

难点突破

理解导数的概念时，应注意以下几点：

(1)函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，是指 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限. 如果 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在极限，就说函数在点 x_0 处不可导，或说无导数.

(2)Δx 是自变量 x 在 x_0 处的改变量，$\Delta x\neq 0$，而 Δy 是函数值的改变量，可以是零.

(3)对于导函数的定义的几种形式表示如下：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x+\Delta x)}{-\Delta x};$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x};$$

$$y'=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

考题 7 (2004，山东)若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数为 A，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$.

【解】 由 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数为 A，知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=A$，

又以 $-\Delta x$ 代 Δx， ∴ $\lim\limits_{-\Delta x\to 0}\dfrac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}=A$.

故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)+f(a)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[A+\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(a-\Delta x)-f(a)}{-\Delta x}\right]$$
$$=\frac{1}{2}(A+A)=A.$$

【模式化】 模型：利用导数的定义求有关极限.

方法：先把所求的极限转化为导数定义的极限式，再利用导数定义转化为求函数在某点处的极限问题.

【变式 3-2】 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，试求下列各极限的值.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$______；

(2)若 $f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(x_0-k)-f(x_0)}{2k}=$______.

方法视窗

求函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的步骤为：

(1)求函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

(2)求平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3)取极限，得导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

防错档案

概念是分析解决问题的重要依据，只有熟练掌握概念的本质属性，把握其内涵与外延，才能灵活地应用概念进行解题，才能准确分析和把握给定的极限式与导数的关系，盲目套用导数的定义是解决某些极限问题时思维受阻的主要原因. 解决这类问题的关键就是等价变形，使问题转化.

考点 4 导函数

核心总结

如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点 x 都是可导的，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导. 在区间 (a,b) 内，$f'(x)$ 构成一个新的函数，我们把这个函数称为函数 $f(x)$ 的导函数，简称导数. $y=f(x)$ 的导函数有时也记作 y'，即 $f'(x)=y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

考题 8 求函数 $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$ 的导数.

【解】 ∵ $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^3+\dfrac{1}{x+\Delta x}-x^3-\dfrac{1}{x}$

$$=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-\frac{\Delta x}{(x+\Delta x)x},$$

∴ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2-\dfrac{1}{(x+\Delta x)x}$.

∴ $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2-\dfrac{1}{(x+\Delta x)x}\right]=3x^2-\dfrac{1}{x^2}$.

【模式化】 模型：求函数的导数(即导函数).

方法：把自变量 x 看做是常数 x_0，按求函数在某一点 x_0 处的导数的算法求解即可.

【变式 4-1】 求函数 $y=\dfrac{4}{x^2}$ 在 $x=2$ 处的导数.

难点突破

注意理解"函数在一点处的导数"和"导函数"的区别：

(1)函数在一点处的导数，就是该点附近的函数值的改变量与自变量的改变量的比值的极限，它是一个数值，不是变数.

(2)导函数是对某一区间内任意一点 x 而言的. 函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导，是指对于区间 (a,b) 内每一个确定的值 x_0，都对应着一个确定的导数 $f'(x_0)$. 当 x 变化时，$f'(x)$ 随之改变，所以 $f'(x)$ 是 x 的一个函数.

(3)函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值，即 $f'(x_0)=f'(x)|_{x=x_0}$. 所以，$f(x)$ 在一点处的导数与导函数是个别与一般的关系.

考题 9　求函数 $y=\sqrt{x^2+1}$ 的导数.

【分析】　根据导数的定义，第一步求函数的增量 Δy；第二步求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$；第三步取极限得导数.

【解】　$\because \Delta y=\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}-\sqrt{x^2+1}=\frac{(x+\Delta x)^2+1-x^2-1}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$

$=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$,

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x+\Delta x}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$.

$\therefore f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

【模式化】　模型：求含有根式函数的导函数.

方法：在求增量 Δy 时，利用有理化因式在 Δy 中“分离”出 Δx，再求出 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 及其极限即可.

【变式 4-2】　已知函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，求证：$y'=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

方法视窗

函数的导数是一个函数，求函数的导数的一般步骤是：

(1) 求函数的增量 Δy；

(2) 求函数的平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$；

(3) 求极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，即得到函数的导数 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

防错档案

在求函数的导数的过程中，注意自变量 x 必须看做是定值，而不能看做是变量，只有 Δx 才是变化的量. 求出极限得到 $f'(x)$ 后，才能把“x”看做是导函数的自变量.

专题优化测训

学业水平测试

1. (考点 1) 设函数 $y=f(x)$，当自变量 x 由 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的增量 Δy 为(　　).

A. $f(x_0+\Delta x)$　　B. $f(x_0)+\Delta x$

C. $f(x_0)\cdot\Delta x$　　D. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

2. (考点 1) 质点运动规律 $s=t^2+3$，则在时间 $(3,3+\Delta t)$ 中，相应的平均速度等于(　　).

A. $6+\Delta t$　　B. $6+\Delta t+\frac{9}{\Delta t}$

C. $3+\Delta t$　　D. $9+\Delta t$

3. (考点 1) 已知函数 $f(x)=2x^2-4$ 的图象上一点 $(1,-2)$ 及邻近一点 $(1+\Delta x,-2+\Delta y)$，则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于(　　).

A. 4　　B. $4x$

C. $4+2\Delta x$　　D. $4+2(\Delta x)^2$

4. (考点 2) 如果质点按规律 $s=3t^2$ 运动，则在 $t=3$ 时的瞬时速度为(　　).

A. 6　　B. 18　　C. 54　　D. 81

5. (考点 3) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $h\to 0$ 时，$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 趋近值(　　).

A. 与 h,x_0 都有关　　B. 仅与 x_0 有关而与 h 无关

C. 仅与 h 有关而与 x_0 无关　　D. 与 x_0,h 均无关

6. (考点 3) 在 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 中，Δx 不可能(　　).

A. 大于 0　　B. 小于 0

C. 等于 0　　D. 大于 0 或小于 0

7. (考点 3) 已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数为 11，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$______.

8. (考点 4) 求函数 $y=x^3+2x$ 的导数.

高考水平测试

1.(考点1)一物体的运动方程是 $s=3+t^2$,则在一小段时间[2,2.1]内相应的平均速度为(　　).

A. 0.41　　B. 3　　C. 4　　D. 4.1

2.(考点2)一木块沿某一斜面自由下滑,测得下滑的水平距离 s 与时间 t 之间的函数关系为 $s=\frac{1}{8}t^2$,则 $t=2$ 秒时,此木块在水平方向的瞬时速度为(　　).

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

3.(考点3)下列各式中正确的是(　　).

A. $y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

B. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)+f(x_0)}{\Delta x}$

C. $y'|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)+f(x_0)}{\Delta x}$

D. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}$

4.(考点3)设 $f(x)=ax+4$,若 $f'(1)=2$,则 $a=$(　　).

A. 2　　B. -2　　C. 3　　D. 不确定

5.(考点3)如果函数 $f(x)$ 可导,那么 $\Delta x\to 0$ 时,$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{3\Delta x}$趋近值等于(　　).

A. $f'(1)$　　B. $3f'(1)$　　C. $\frac{1}{3}f'(1)$　　D. $f'(3)$

6.(考点3)已知 $f(x)$在 $x=x_0$ 处可导,$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{[f(x)]^2-[f(x_0)]^2}{x-x_0}$等于(　　).

A. $f'(x_0)$　　B. $f(x_0)$

C. $[f'(x_0)]^2$　　D. $2f'(x_0)f(x_0)$

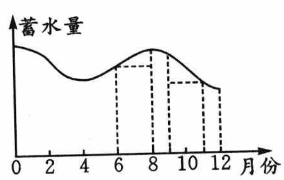
7.(考点1)函数 $y=2x^3-x$ 在区间[1,3]上的平均变化率为______.

8.(考点1)已知函数 $y=x^3-2$,当 $x=2$ 时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$______.

9.(考点3)质量为 10kg 的物体按照 $s(t)=3t^2+t+4$ 的规律作直线运动,运动开始后 4s 时物体的动能为______.

10.(考点3)函数 $y=x+\frac{1}{x}$在 $x=1$ 处的导数是______.

11.(考点1)一水库的蓄水量与时间关系图象如图所示,试指出哪一段时间(以两个月计)蓄水效果最好?哪一段时间蓄水效果最差?



第 11 题图

12.(考点4)求下列函数的导数:

(1) $f(x)=x^2+ax+b$;　　(2) $f(x)=x^4$.

13.(考点3)设一物体在 t s 内所经过的路程为 s m,并且 $s=4t^2+2t-3$,试求物体分别在运动开始时及第五秒末时的速度.

14.(考点3)已知成本 c 与产量 q 的函数关系式为 $c=3q^2+1$,求当产量 $q=30$ 时的边际成本.

第2讲　导数的几何意义

课标解读

1. 理解导数的几何意义，会求曲线的切线方程.

2. 经历导数几何意义的学习过程，感受极限思想，体会用导数的几何意义求曲线的切线方程的方法，体会用导数的几何意义分析图象上点的变化情况的方法.

3. 通过本讲的学习，体会导数与曲线的联系，初步认识数学的科学价值，发展理性思维能力.

学法导引

1. 学习曲线在某点处的切线定义时，应通过画图演示割线的动态变化趋势，从本质上把握切线的定义.

2. 在学习导数的几何意义时，应充分利用数形结合的思想方法，将切线斜率和导数相联系.

3. 应通过典型例题的学习和适当练习，熟练掌握求曲线的切线方程的基本方法.

考点分类例析

考点1　导数的几何意义

核心总结

1. 曲线的切线

如图2-1，设曲线C是函数$y=f(x)$的图象，点$P(x_0,y_0)$是曲线C上一点，点$Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$是曲线$C$上与点$P$邻近的任一点. 作割线$PQ$，当点$Q$沿着曲线$C$无限地趋近于点$P$，割线$PQ$便无限地趋近于某一极限位置$PT$. 我们就把极限位置上的直线$PT$，叫做曲线$C$在点$P$处的切线.

2. 导数的几何含义

设切线PT的倾斜角为$\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$，那么当$\Delta x\to 0$时，割线$PQ$的斜率的极限，就是曲线在点$P$处的切线的斜率，即割线$PQ$斜率的极限就是切线$PT$的斜率$\tan\alpha$，即$\tan\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.（其中$x_0$为$P$的横坐标）

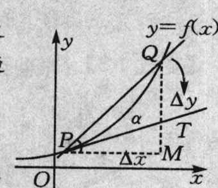


图2-1

考题1　求曲线$y=x^2+1$在点$P(1,2)$处的切线的斜率k.

【分析】　用导数的定义法求出在$x=1$处的导数值即为切线的斜率.

【解】　$\because \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)^2+1-(1+1)=\Delta x^2+2\Delta x$，　$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x^2+2\Delta x}{\Delta x}=\Delta x+2$.

$\therefore k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2)=2$，即$k=2$.

【模式化】　模型：求函数的图象上某点处切线的斜率.

方法：由导数的几何意义，转化为求函数在该点的导数.

【变式1-1】　求$y=x^3-2x+2$在$x=2$处的切线的斜率.

难点突破

这里切线的定义与初中几何中圆的切线定义："直线和圆有唯一的公共点时，称直线和圆相切"似乎有些不同，其实用上述逼近的方法，完全是一样的. 因为圆是一种特殊的曲线，上述定义适合所有曲线的切线的定义，但圆的切线的定义就不适用于一般的曲线的切线. 如图2-2中的曲线C，直线l_1与曲线C有唯一的公共点M，但l_1不是曲线C的切线；l_2虽然与曲线C不止一个公共点，但l_2是曲线C在N点处的切线.

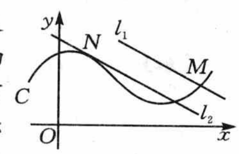


图2-2