GAOKAO SHUXUE DE LILUN YU SHIJIAN

高考数学的理论与实践

高慧明 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高考数学的理论与实践

高慧明　著

哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书将高中数学教学理论、高考数学考试大纲、高考试题与高中数学教学实际相结合，内容科学、系统、前瞻、实用、易懂。主要作了如下详细论述：七大数学思想在高中数学教学中应用的理论与实践，近几年高考（包括大纲版、新课程版）数学命题特征的深层次思考与分析，近几年高考数学重点专题的深入研究（立足于对高中数学教材的基础知识在高考试题中的考查进行分析把握，以及对思想和方法的指导，引申概念外围的规律、方法，以及解题思考规律等）。

本书适合于高考数学命题与考试研究者、高中数学教师、高中学生及数学爱好者参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

高考数学的理论与实践/高慧明著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009.6

ISBN 978-7-5603-2920-8

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 104966 号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　张永芹　李广鑫
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 23　字数 708 千字
版　　次　2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2920-8
定　　价　38.00 元

高慧明的三十而立

——《高考数学的理论与实践》代前言

高慧明老师属"70后集合"中的新秀，我从1995年4月开始注意到这位年轻人，那时他在湖北大学《中学数学》杂志上发表了《在数学教学中预防差生逆反心理浅谈》一文，文章切合实际，视角独特，很快被中国人民大学书报资料中心《中学数学教与学》全文转载。后来，我又接连在全国多家知名数学专业期刊上读到了高老师的一系列颇具影响的教科研成果，于是，我们就有了很多共同的话题进行交流。当时我就断定，这位年轻人如果按自己的教改之路坚持走下去，一定会大有作为！如今，15年弹指一挥间，高老师果然没有出乎我的预料，在教育教学、教研教改方面已经成为全国基础教育界的佼佼者之一。《高考数学的理论与实践》是高老师而立之年的重要著作之一，我作为第一读者有幸拜读了全部内容。该书思考深入，见解独特，文风朴实；内容科学系统，前瞻实用，通俗易懂；读者对象定位准确：高考数学命题与考试研究者，高中数学教师，高中学生，数学爱好者等。掩卷而思，我想就我个人的所见所闻所感谈谈高老师的事业发展之路，相信能给各位读者朋友留下更多的启示。

圣人云：为人三十而立，立则成三。

高慧明的"三立"，其根基正是从"立德"开始

从"为人师表"到"全国十佳"

高慧明老师每年教高中两个班的数学课，同时兼任着一个班的班主任。他常说"上好数学课，那只是一位优秀的数学老师。当好班主任，却能影响学生的一生"。

"先育人，再教书"是他的工作原则，"乐观、豁达、积极、向上"是他的治班理念。人格魅力和爱的力量是高老师做好班级工作的两个法宝。对学生尽心尽力，对工作不遗余力，不计较个人得失。他以实际行动践行着自己"为党和人民的教育事业奋斗终生"的诺言，每学期全校学生评教活动中，他均以全校最高票当选为"我最喜爱的老师"，班级管理师生满意度达到100%。高老师因班主任工作成绩显著，2005年12月，被评选为首届"全国十佳班主任"（《新华网》、《新华每日电讯》、《光明日报》、《中国教育报》、《新浪网》、《搜狐网》等新闻媒体都作

过专题报道）；2006 年被全国知名期刊《班主任之友》推为第 10 期“封面人物”；2007 年 2 月被全国德育主流媒体《德育报》等推选为“全国班主任之星”，并做整版专题报道；2007 年 4 月受邀为中央电教馆制作了“全国优秀班主任培训讲座”专题系列影像资料（培训教材、VCD、DVD 等），被选作唯一的封面人物向全国推介，全国公开发行，并被全国各地选作班主任培训主训教材，指定使用。

高慧明的“立业”，是他“立德”内涵的有形化

从“襄樊名师”到“全国讲学”

众所周知，学生升入高中后数学学习要过的第一关，就是学会抽象思维。如何让学生从习惯的形象思维中走出来，掌握逻辑性、推理性极强的高中数学，是摆在每一位高中数学老师面前的重任。高慧明老师在认真研究学生和教材的基础上，结合自己多年的教学实践，探索出了最切合学生实际的“阶段教学法”，把高中数学的教学内容，分解成若干个逻辑片段，通过层层深入引导，逐步加强训练，培养学生的学习能力。比如在“两条直线的夹角”的教学过程中，他通过形象生动的多媒体动画演示，引导学生在平面直角坐标系中，借助直线的方程，从探究学生熟悉的两条直线间的两种特殊位置关系（平行和垂直）入手，层层设问，形成新的问题，温故知新、循序渐进，激发学生的学习兴趣。

知之者不如好之者，好之者不如乐之者。只有真正的热爱，才能把想做的事做好；也只有真正的投入，才能把枯燥上升为享受。高老师把教书当做一件乐事来做，他不断探索最有效的教学方法，引导学生主动学习，把枯燥乏味的数学课堂变成学生爱学、乐学、会学的快乐之旅，让数字与快乐相伴飞翔。就这样，他成了一个教学实验田的有心人，从细节中推敲得失，从实践中总结经验，把每一个教学中的细节都认真考虑后，再从教材、学生学习心理、学习方法等角度全方位地综合设计教学思路，向数学教学的最佳情境努力。

上课前，让学生进行 5 分钟的“课前思维演练”，将相关内容设置成梯度思维问题，这是预备热身的脑力操；课堂上，因势利导，让学生变被动填灌为主动自学，后来由学生自行设置，从中优选组合。水到渠成，请“小老师”走上讲台，就某一知识点进行讲解；下课后，他常把自己学到的新观点教给学生，教学相长，与学生一同体会学习的乐趣。很多学生都说上高老师的课感觉很轻松，在不知不觉中就把知识弄懂学会了。2004 年，高老师的这项课题研究系列成果《在暴露思维过程中培养探究能力》等被《数学教学通讯》和《天津教育》连续刊登，随即被中国人民大学书报资料中心《中学数学教与学》全文转载。

每一年，虽然高老师都要带两个班的数学课，但是每位学生都有高老师为他们专门建立的“学习档案”。他对每一个教过的学生都了如指掌，提起来一个个如数家珍。学生们常开玩笑地说“高老师比父母还了解我们呢”！这是戏语，更是实情。学生的学习档案中不仅记录学生的成绩，还有每个学生的学习情况跟踪分析与总结。多年来，高老师写的“学习档案”就有数百万字。

高老师以自己的实干精神和乐观心态赢得了领导、同行、学生、家长的敬重，由于在教学上的不懈努力、执著追求，在湖北省、全国高中数学教师优质课大赛中喜获一、二等奖。被评为“全国教育科研优秀教师”、“全国重点课题学科带头人”、“湖北省新世纪高层次人才工程”专家、“湖北省优秀教师”、首批“湖北省高中骨干教师”、首届“襄樊名师”、“襄樊市十大青年岗位能手标兵”、“襄樊市教育教学拔尖人才”等。

近几年，高老师受邀在湖北、湖南、北京、上海、天津、河北、河南、山东、山西、陕西、浙江、江苏、安徽、广东、福建、黑龙江、吉林、四川、甘肃、云南等全国 20 多个省、直辖市做有关课程·教材·教法·学法、高考复习·命题与考试、班级管理等学术专题报告各数场，在全国基础教育界引起了强烈反响。

高慧明的“立言”，是他的立德、立业在时空上的“突围”

从“痴迷课堂”到“严谨治学”

教科研工作在高慧明老师心中举足轻重，精益求精、严谨治学的态度贯穿于他教学与教科研工作的

始终。

他自创数学集体备课新模式："说→议→理→听→说→议"，收效显著，指导培养了一大批省、市优秀青年教师。他对本学科教材和教学深入研究，见解独到，成果丰富：在教法研究中，他自创的"在暴露思维过程中培养探究能力"（从抓住新旧知识之间的联系、注重问题的解决过程、改变问题的叙述方式、体验知识的实际应用等方面来激活思维品质）、"中学数学教研与教学的关系研究"（不断追求教学的高境界→教研为教学开辟广阔的空间→教研的基本途径……）、"学生思维临界状态下的教师点拨"（创设情境，顺向点拨，以求激活效应→讨论质疑，侧向点拨，以求共生效应）、"启发→建构"教学模式（诊断模糊观念→创设教学情境→整合认知结构）等多项改革成果，经国家、省、市教育行政部门、教研部门和学术研究机构有关专家鉴定，对大面积提高教育教学水平具有较高的指导意义和推广价值，并荣获国家、省一、二等奖。

笔耕不辍是高老师的最大特点，他的志向就是做一位学者型教师，既要"教"，又要"研"，还要"写"。在教学、教研中不断学习、不断创新，不断给自己提出更高的要求。他坚持以"学习创新——教学实践——积累素材——提炼成文"为目标，孜孜不倦，乐此不疲。高老师长期致力于课程·教材·教法·学法、高考复习·命题与考试、解题教学、竞赛数学、班级管理等专题研究。在课堂教学中，他向中学数学教学的最佳情境努力，力求让学生学得容易，学得有兴趣；在班级管理中，他是一位善于将班级工作艺术化的探索者。正因如此，参加工作二十一年来，他的教育教学效果显著，教研教改成果丰硕，班级管理成绩突出。已在《数学通报》、《数学教学》、《中国教育学刊》、《中学数学教学参考》、《数学通讯》、《中学数学》、《中学数学月刊》、《中国数学教育》、《中学数学研究》、《中学数学杂志》、《中学数学教学》、《数学教学通讯》、《数学教学研究》、《中学教研》、《教育艺术》、《班主任之友》、《班主任》、《中小学管理》、《教学与研究》等国家、省级学术专业期刊发表论文500余篇，其中90余篇被中国人民大学书报资料中心《中学数学教与学》、《中小学教育》全文转载或作为索引，先后多次受邀为《数学通讯》、《中学数学》、《中学数学教学参考》、《中国数学教育》、《数学教学通讯》、《中学数学杂志》、《数学学习与研究》、《试题与研究》、《中学生数理化》、《高考》、《高考金刊》、《求学》、《理科考试研究》、《中学生语数外》、《招生考试通讯》、《高中生》、《新高考》、《数学大世界》、《湖北教育》、《班主任之友》等多家省级以上杂志社撰写辅教导学、高考复习·命题与考试、班级管理艺术等专题系列讲座连载稿，参与编写教材、教学著作多部，参与研制和编写了《湖北省普通高中新课程实验数学学科教学指导意见》。主持、参与多项国家、省部级课题研究，获国家、省部级优秀教科研成果一等奖18项。

目前，高老师是《中国数学教育》、《中学数学研究》、《中学数学教学参考》等全国多家知名专业期刊特约专栏作者、特邀栏目主持、特约编辑。

万尔遐
2009年1月1日于北京

万尔遐：著名数学特级教师，享受国务院政府特殊津贴的数学教育专家，全国著名高考命题专家。

目 录

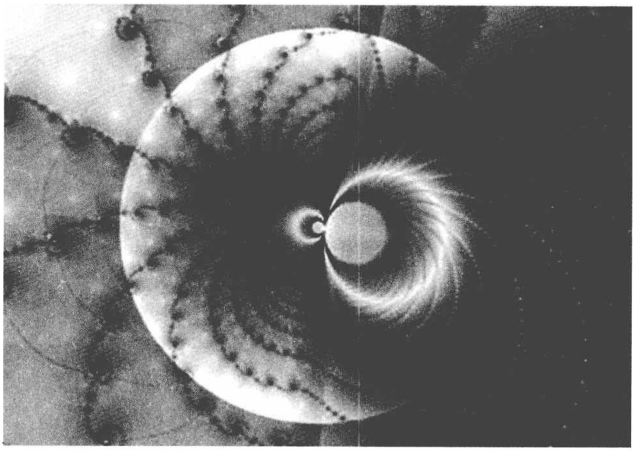
第一编 数学思想

第二编 命题研究

第三编　专题研究

第一编

数学思想



●数学思想是数学的灵魂，数学方法是数学的行为．运用数学方法解决问题的过程就是感性认识不断积累的过程，当这种量的积累达到一定程度时就产生了质的飞跃，从而上升为数学思想．若把数学知识看作是一幅构思巧妙的蓝图而建筑起来的一座宏伟大厦，那么数学方法相当于建筑施工的手段，而这张蓝图就相当于数学思想．教会学生正确运用数学思想方法学习数学或解题，有利于对知识进行比较归类，只有这样，才能把所学知识学得系统，学得灵活，并真正纳入到学生的知识结构中去，变成自己的财富．

●高考对数学思想的考查是与对数学知识的考查结合进行的，是通过对数学知识的考查来反映考生对数学思想、方法理解和掌握程度的．

●教育部考试中心在全国高考数学考试大纲中明确指出必考的数学思想：

函数与方程的思想、数形结合的思想、分类与整合的思想、化归与转化的思想、特殊与一般的思想、有限与无限的思想，或然与必然的思想．

数学思想是人们对现实世界空间形式和数量关系的本质的认识,是思维加工后的产物,它隐藏在数学概念、法则、公式、公理、定理、方法等知识的背后,反映了这些知识的共同本质.它比一般的数学概念和数学方法具有更高的概括性和抽象性,因而更深刻、更本质.数学思想是数学知识的核心,是数学的精髓和灵魂.简言之,数学思想是对数学概念、方法和理论的本质认识.

数学方法,顾名思义,就是人们从事数学活动时所使用的方法.

人们往往将数学思想和数学方法合为一谈,称之为数学思想方法,可见两者之间有密切的联系,但还是有区别.要想将数学思想与数学方法严格区分开来是困难的,因此,人们常常对这两者不加区分,而统称为数学思想方法,这样研究问题更为方便.

中学数学教材中的思想方法有:抽象概括、化归、数形结合、数学模型、归纳猜想、分类、类比、特殊化、演绎、完全归纳法、反证法、换元法、待定系数法、配方法.从中可以看出,中学数学中确实蕴含了丰富的数学思想方法内容,不但方法的种类多,而且某些方法反复出现并应用,这说明在数学教学中加强数学思想方法教学不但具有重要意义,而且现实可行,是一个颇具开发价值的研究课题.

数学思想和方法是数学知识在更高层次上的抽象和概括,它蕴涵在数学知识发生、发展和应用的过程中.曾有一位数学教育家说过这样一段话:“学生们在初中或高中所学到的数学知识,在进入社会后,几乎没有什么机会应用,因而这种作为知识的数学,通常在出校门后不到一两年就忘掉了.然而不管他们从事什么职业,那种铭刻于头脑中的数学精神和数学思想方法,却长期地在他们的生活和工作中发挥着作用.”理论研究和人才成长的轨迹都表明——数学思想方法在人的能力培养和素质提高方面具有重要作用,因此,对数学思想方法的考查也是高考数学能力考查的必然.

高考数学试题重在考查对知识理解的准确性、深刻性,重在考查知识的综合灵活运用.它着眼于知识点新颖巧妙的组合,试题新而不偏,活而不过难;着眼于对数学思想方法、数学能力的考查.高考试题这种积极导向,决定了我们在教学中必须以数学思想指导知识、方法的运用,整体把握各部分知识的内在联系.只有加强数学思想方法的教学、优化学生的思维、全面提高数学能力,才能提高学生解题水平和应试能力.

高考复习有别于新知识的教学.它是在学生基本掌握了中学数学知识体系、具备了一定的解题经验的基础上进行复习课教学,也是在学生基本认识各种数学基本方法、思维方法及数学思想的基础上进行复习课教学.其目的在于深化学生对基础知识的理解;完善学生的知识结构,在综合性强的练习中进一步形成基本技能,优化思维品质;使学生在多次的练习中充分运用数学思想方法,提高数学能力.高考复习是学生发展数学思想,熟练掌握数学方法理想的难得的教学过程.

教育部考试中心在全国高考数学考试大纲中明确指出必考的数学思想方法:

数学基本方法包括待定系数法、换元法、配方法、割补法、反证法等;

数学逻辑方法(或思维方法)包括分析与综合、归纳与演绎、比较与类比、具体与抽象等;

数学思想包括函数与方程的思想、数形结合的思想、分类与整合的思想、化归与转化的思想、特殊与一般的思想、有限与无限的思想、或然与必然的思想等.

在这里,笔者重点谈谈数学思想在解题中应用的具体体现,共分以下七个专题:(一)函数方程思想;(二)数形结合思想;(三)分类整合思想;(四)化归转化思想;(五)特殊与一般思想;(六)有限与无限思想;(七)或然与必然思想.

(一)函数方程思想

函数是高中代数内容的主干,它主要包括函数的概念、图象和性质,重点介绍了几类典型的函数.函数的思想是对函数内容在更高层次上的抽象、概括与提炼,是从函数各部分内容的内在联系和整体角度来考虑问题、研究问题和解决问题.具体来说,就是用运动和变化的观点,集合与对应的思想,即用函数的观点去分析和研究数学问题中的数量关系,建立函数关系或构造函数,运用函数的图象和性质去分析问题、转化问题,从而使问题获得解决,是对函数概念的本质认识.函数思想贯穿于高中代数的全部内容,它是在学习指数函数、对数函数以及三角函数的过程中逐渐形成,并为研究这些函数服务的.在研究方程、不等式、复数、数列、解析几何等其他内容时,函数思想也起着十分重要的作用.

方程是初中代数的主要内容.初中阶段主要学习了几类方程和方程组的解法,但在初中阶段很难形成方程的思想.所谓方程的思想,就是分析研究数学问题中变量间的关系,通过设未知数、列方程(不等式)或方程(不等式)组,解方程(不等式)或方程(不等式)组等步骤,达到求值目的之解题思路和策略,它是解决各类计算问题的基本思想,是运算能力的基础.或者运用方程的性质去分析、转化问题,使问题获得解决,是对方程概念的本质认识.

函数思想与方程思想是密切相关的.函数与方程、不等式是通过函数值等于零、大于零或小于零而相互关联的,它们之间既有区别又有联系.函数与方程的思想,既是函数思想与方程思想的体现,也是两种思想综合运用的体现,是研究变量与函数、相等与不等过程中的基本数学思想.

对于函数 $y = f(x)$,当 $y = 0$ 时,就转化为方程 $f(x) = 0$,也可以把函数式 $y = f(x)$ 看作二元方程 $y - f(x) = 0$.函数问题(例如求函数的反函数,求函数的值域等)可以转化为方程问题来解决,方程问题也可以转化为函数问题加以解决,如解方程 $f(x) = 0$,就是求函数 $y = f(x)$ 的零点.

函数与不等式也可以相互转化,对于函数 $y = f(x)$,当 $y > 0$ 就化为不等式 $f(x) > 0$,借助于函数的图象与性质可解决相关问题,而研究函数的性质,也离不开解不等式.

除此之外,还有:

(1) 数列的通项或前 n 项和是自变量为正整数的函数,用函数的观点处理数列问题十分重要,其次方程思想也是研究此类问题(求待定系数等)的重要思想方法之一.

(2) 函数 $f(x) = (ax + b)^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 与二项式定理是密切相关的,利用这个函数并用赋值法和比较系数法可以解决很多二项式定理的问题.

(3) 解析几何中的许多问题,例如直线和二次曲线的位置关系问题,需要通过解二元

方程组才能解决,涉及二次方程与二次函数的有关理论.

(4) 立体几何中有关线段、角、面积、体积的计算,经常需要运用列方程或建立函数表达式的方法加以解决.

……

函数与方程思想在解题中的应用,一是借助有关初等函数的性质,解决有关求值、解(证)不等式,解方程以及讨论参数的取值范围等问题;二是在问题的研究中,通过建立函数关系式或构造中间函数,把所研究的问题转化为讨论函数的有关性质,达到化难为易,化繁为简的目的.

函数与方程的思想是中学数学的基本思想,也是历年高考的重点.常使用选择题和填空题考查函数与方程思想的基本运用,而在解答题中,则从更深的层次,在知识网络的交汇处,从思想方法与相关能力的关系角度进行综合考查.

在近几年的高考中,函数思想主要用于求变量的取值范围、解不等式等;方程思想的应用可分为逐渐提高的四个层次:

(1) 解方程或不等式;(2) 含参数的方程或不等式的讨论;(3) 转化为对方程的研究,如曲线的位置关系、函数的性质、集合的关系;(4) 构造方程或不等式求解.

典例研析

【例1】 如图1,已知二次函数 $y = f_1(x)$ 的图象以原点为顶点且过点(1,1),反比例函数 $y = f_2(x)$ 的图象与直线 $y = x$ 的两个交点间距离为8, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

(Ⅰ) 求函数 $f(x)$ 的表达式;

(Ⅱ) 证明:当 $a > 3$ 时,关于 x 的方程 $f(x) = f(a)$ 有三个实数解.

解析 (Ⅰ) 由已知,设 $f_1(x) = ax^2$,由 $f_1(1) = 1$,得 $a = 1$,所以 $f_1(x) = x^2$.

设 $f_2(x) = \dfrac{k}{x}(k > 0)$,它的图象与直线 $y = x$ 的交点分别为 $A(\sqrt{k},\sqrt{k})$, $B(-\sqrt{k},-\sqrt{k})$.

由 $|AB| = 8$,得 $k = 8$,所以 $f_2(x) = \dfrac{8}{x}$.故 $f(x) = x^2 + \dfrac{8}{x}$.

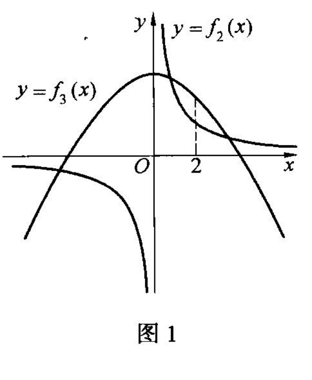


图1

(Ⅱ) 证法1 $f(x) = f(a)$,得 $x^2 + \dfrac{8}{x} = a^2 + \dfrac{8}{a}$,即 $\dfrac{8}{x} = -x^2 + a^2 + \dfrac{8}{a}$.在同一坐标系内作出 $f_2(x) = \dfrac{8}{x}$ 和 $f_3(x) = -x^2 + a^2 + \dfrac{8}{a}$ 的大致图象,其中 $f_2(x)$ 的图象是以坐标轴为渐近线,且位于第一、三象限的双曲线, $f_3(x)$ 的图象是以 $\left(0, a^2 + \dfrac{8}{a}\right)$ 为顶点,开口向下的抛物线.因此, $f_2(x)$ 与 $f_3(x)$ 的图象在第三象限有一个交点,即 $f(x) = f(a)$ 有一个负数解.又因为 $f_2(2) = 4$, $f_3(2) = -4 + a^2 + \dfrac{8}{a}$,当 $a > 3$ 时, $f_3(2) - f_2(2) = a^2 + \dfrac{8}{a} - 8 > 0$,所以当 $a > 3$ 时,在第一象限 $f_3(x)$ 的图象上存在一点 $(2, f_3(2))$ 在 $f_2(x)$ 图象的上方,所以 $f_2(x)$ 与 $f_3(x)$ 的图象在第一象限有两个交点,即 $f(x) = f(a)$ 有两个正数解.因此,方程 $f(x) = f(a)$ 有三个实数解.

证法2 由 $f(x) = f(a)$,得 $x^2 + \dfrac{8}{x} = a^2 + \dfrac{8}{a}$,即 $(x - a)\left(x + a - \dfrac{8}{ax}\right) = 0$,得方程的一个解

$x_1 = a$. 方程 $x + a - \frac{8}{ax} = 0$ 化为 $ax^2 + a^2x - 8 = 0$, 由 $a > 3, \Delta = a^4 + 32a > 0$, 得 $x_2 = \frac{-a^2 - \sqrt{a^4 + 32a}}{2a}, x_3 = \frac{-a^2 + \sqrt{a^4 + 32a}}{2a}$. 因为 $x_2 < 0, x_3 > 0$, 所以 $x_1 \neq x_2$, 且 $x_2 \neq x_3$. 若 $x_1 = x_3$, 即 $a = \frac{-a^2 + \sqrt{a^4 + 32a}}{2a}$, 则 $3a^2 = \sqrt{a^4 + 32a}, a^4 = 4a$, 得 $a = 0$ 或 $a = \sqrt[3]{4}$, 这与 $a > 3$ 矛盾, 所以 $x_1 \neq x_3$. 故原方程有三个实数解.

点评 第(Ⅱ)问把方程根的个数的判断,通过式子变形,转变为两个函数交点个数的判断,充分体现了方程与函数之间的灵活转换.

【例2】 给定抛物线 $C: y^2 = 4x$, F 是 C 的焦点,过点 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点.

(Ⅰ)设 l 的斜率为 1,求 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角的大小;

(Ⅱ)设 $\overrightarrow{FB} = \lambda \overrightarrow{AF}$,若 $\lambda \in [4,9]$,求 l 在 y 轴上截距的变化范围.

解析 (Ⅰ)C 的焦点为 $F(1,0)$,直线 l 的斜率为 1,所以 l 的方程为 $y = x - 1$. 将 $y = x - 1$ 代入方程 $y^2 = 4x$,整理得 $x^2 - 6x + 1 = 0$. 设 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$,则有 $x_1 + x_2 = 6, x_1x_2 = 1$.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2 = 2x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = -3$$

$$|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{x_1x_2[x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16]} = \sqrt{41}$$

$$\cos\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} = -\frac{3\sqrt{14}}{41}$$

所以 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 夹角的大小为 $\pi - \arccos\frac{3\sqrt{14}}{41}$.

(Ⅱ)由题设 $\overrightarrow{FB} = \lambda \overrightarrow{AF}$ 得 $(x_2 - 1, y_2) = \lambda(1 - x_1, -y_1)$,即

$$\begin{cases} x_2 = 1 = \lambda(1 - x_1) & ① \\ y_2 = -\lambda y_1 & ② \end{cases}$$

由 ② 得 $y_2^2 = \lambda^2 y_1^2$,因为 $y_1^2 = 4x_1, y_2^2 = 4x_2$,所以

$$x_2 = \lambda^2 x_1 \quad ③$$

联立 ①、③ 解得 $x_2 = \lambda$,依题意有 $\lambda > 0$,所以 $B(\lambda, 2\sqrt{\lambda})$ 或 $B(\lambda, -2\sqrt{\lambda})$. 又 $F(1,0)$,得直线 l 方程为 $(\lambda - 1)y = 2\sqrt{\lambda}(x - 1)$ 或 $(\lambda - 1)y = -2\sqrt{\lambda}(x - 1)$. 当 $\lambda \in [4,9]$ 时,l 在方程 y 轴上的截距为 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$ 或 $-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$,由 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda} + 1} + \frac{2}{\lambda - 1}$,可知 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$ 在 $[4,9]$ 上是递减的,所以 $\frac{3}{4} \leqslant \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} \leqslant \frac{4}{3}$, $-\frac{4}{3} \leqslant -\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1} \leqslant -\frac{3}{4}$,故直线 l 在 y 轴上截距的变化范围为 $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$.

点评 本小题主要考查抛物线的性质,直线与抛物线的关系以及解析几何的基本方法、思想和综合解题能力. 当 $\lambda \in [4,9]$ 时,求出直线 l 在 y 轴上截距 $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$ 或 $-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$ 之后,如何由 λ 的取值范围求上式的取值范围,显然需构造函数,利用函数的单调性来求函数中参数的取值范围.

【例3】 已知 $\frac{\sqrt{5}b - c}{5a} = 1(a、b、c \in \mathbf{R})$,则有(　　)

A. $b^2 > 4ac$　　B. $b^2 \geqslant 4ac$　　C. $b^2 < 4ac$　　D. $b^2 \leqslant 4ac$

解法 1 由已知得 $a \cdot 5 - b \cdot \sqrt{5} + c = 0$,所以 $\sqrt{5}$ 是实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个实根;所以 $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$,所以 $b^2 \geqslant 4ac$,故选 B.

解法 2 去分母、移项,两边平方得:$5b^2 = 25a^2 + 10ac + c^2 \geqslant 10ac + 2 \cdot 5a \cdot c = 20ac$,所以 $b^2 \geqslant 4ac$,故选 B.

点评 解法 1 通过简单转化,注意到了数与式的特点,运用方程的思想使问题得以解决;解法 2 转化为 b^2 是 a、c 的函数,运用重要不等式求解,思路清晰.

【例 4】 是否存在锐角 α、β,使

$$\alpha + 2\beta = \frac{2\pi}{3} \tag{①}$$

$$\tan\beta = (2-\sqrt{3})\cot\frac{\alpha}{2} \tag{②}$$

同时成立?若存在,求出 α 和 β 的值;若不存在,请说明理由.

解析 本题是一个探索性问题,假设 α 和 β 存在,根据题意求出 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 的值,再根据角的范围求角.假设存在锐角 α、β,则由式①得 $\frac{\alpha}{2}+\beta=\frac{\pi}{3}$,所以

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\beta}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\beta}=\sqrt{3} \tag{③}$$

又由式②得

$$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=2-\sqrt{3} \tag{④}$$

将式④代入③得 $\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\beta=3-\sqrt{3}$,所以 $\tan\frac{\alpha}{2}$,$\tan\beta$ 是方程 $x^2-(3-\sqrt{3})x+(2-\sqrt{3})=0$ 的两个根,解得 $x_1=1$,$x_2=2-\sqrt{3}$.又 $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$,所以 $\tan\frac{\alpha}{2}\neq 1$,所以

$$\tan\frac{\alpha}{2}=2-\sqrt{3},\quad \tan\beta=1$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

因此 $\alpha=\frac{\pi}{6}$,$\beta=\frac{\pi}{4}$,所以存在 $\alpha=\frac{\pi}{6}$,$\beta=\frac{\pi}{4}$ 使①、②同时成立.

点评 解答探索性问题,一般先对结论作肯定存在的假设,由此出发推理论证,再由推理论证的结果是否出现矛盾来作判断.构造方程并借用方程理论解题是本题的创意之处.

【例 5】 如图 2,在矩形 $ABCD$ 中,已知 $AB=1$,$BC=a(a>0)$,$PA\perp$ 平面 $ABCD$,且 $PA=1$.问 BC 边上是否存在点 Q,使得 $PQ\perp QD$,并说明理由.

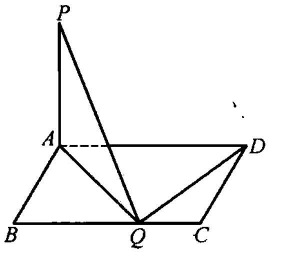


图 2

解析 本题是一道立体几何的探索开放题,需要探索满足题设条件的点 Q 是否存在,若存在,这样的 Q 点有几个?此题从几何角度去探寻,则要求学生对平面几何中有关圆的性质相当熟悉,且需记住许多结论方可顺利求解;若从代数角度去考虑,通过引入线段参数,构造一元二次方程,利用其判别式就可以使问题得到迅速解决.

假设 BC 边上存在点 Q,使得 $PQ\perp QD$,联结 AQ,因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,根据三垂线定理的逆定理有 $QD\perp AQ$.从而有 $AD^2=AQ^2+QD^2$.设 $CQ=x$,则 $BQ=a-x$,于是

$$AQ=\sqrt{1^2+(a-x)^2},\quad QD=\sqrt{1+x^2}$$

所以

$$AD^2=(a-x)^2+x^2+2=2x^2-2ax+a^2+2=a^2$$

即

$$x^2-ax+1=0 \tag{①}$$

其判别式 $\Delta = a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$，所以当 $a > 2$ 即 $\Delta > 0$ 时，方程①有两解，即 BC 边上存在两个点 Q，使得 $PQ \perp QD$；当 $a = 2$ 即 $\Delta = 0$ 时，方程①有一解，即 BC 边上存在唯一的点 Q（即 BC 的中点），使得 $PQ \perp QD$；当 $0 < a < 2$ 即 $\Delta < 0$ 时，方程①无解，即 BC 边上不存在点 Q，使得 $PQ \perp QD$.

当然该题也可用直线与圆的位置关系求解或空间向量法求解.

【例6】 已知 $a > 0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a, a_{n+1} = a + \frac{1}{a_n}, n = 1,2,\cdots$.

（Ⅰ）已知数列 $\{a_n\}$ 极限存在且大于零，求 $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$（将 A 用 a 表示）；

（Ⅱ）设 $b_n = a_n - A, n = 1,2,\cdots$. 证明：$b_{n+1} = -\frac{b_n}{A(b_n + A)}$；

（Ⅲ）若 $|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 对 $n = 1,2,\cdots$ 都成立，求 a 的取值范围.

解析　本小题主要考查数列、数列极限的概念和数学归纳法，考查灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力.

（Ⅰ）由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，且 $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n (A > 0)$，对 $a_{n+1} = a + \frac{1}{a_n}$ 两边取极限得 $A = a + \frac{1}{A}$，解得 $A = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$. 又 $A > 0$，所以 $A = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}$.

（Ⅱ）由 $a_n = b_n + A, a_{n+1} = a + \frac{1}{a_n}$ 得 $b_{n+1} + A = a + \frac{1}{b_n + A}$，所以

$$b_{n+1} = a - A + \frac{1}{b_n + A} = -\frac{1}{A} + \frac{1}{b_n + A} = -\frac{b_n}{A(b_n + A)}$$

即 $b_{n+1} = -\frac{b_n}{A(b_n + A)}$ 对 $n = 1,2,\cdots$ 都成立.

（Ⅲ）**解法 1**（利用数学归纳法）令 $|b_1| \leqslant \frac{1}{2}$，得 $\left| a - \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+4}) \right| \leqslant \frac{1}{2}$，所以 $\left| \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4} - a) \right| \leqslant \frac{1}{2}$. 所以 $\sqrt{a^2+4} - a \leqslant 1$，解得 $a \geqslant \frac{3}{2}$. 只须证明当 $a \geqslant \frac{3}{2}$ 时，$|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$，对 $n = 1,2,\cdots$ 都成立.

解法 2　由（Ⅰ）求得 $A = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}$，所以 $-\frac{1}{A} = \frac{a - \sqrt{a^2+4}}{2}$. 所以

$$a - A = -\frac{1}{A}, a + \frac{1}{A} = A, A^2 = \frac{a^2 + 2 + a\sqrt{a^2+4}}{2}, A + \frac{1}{A} = \sqrt{a^2+4}$$

所以
$$a_{n+1} - A = a + \frac{1}{a_n} - A = \frac{a_n - A}{-Aa_n}, a_{n+1} + \frac{1}{A} = a + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{A} = \frac{Aa_n + 1}{a_n}$$

因此
$$\frac{a_{n+1} - A}{a_{n+1} + \frac{1}{A}} = \frac{-\frac{1}{A}a_n + 1}{Aa_n + 1} = -\frac{1}{A^2} \cdot \frac{a_n - A}{a_n + \frac{1}{A}}$$

所以 $\left\{ \frac{a_n - A}{a_n + \frac{1}{A}} \right\}$ 是以 $\frac{a_1 - A}{a_1 + \frac{1}{A}} = -\frac{1}{A^2}$ 为首项，$-\frac{1}{A^2}$ 为公比的等比数列，故 $\frac{a_n - A}{a_n + \frac{1}{A}} = \left(-\frac{1}{A^2} \right)^n$. 再将 $a_n = b_n + A$ 代入上式，得 $b_n = \frac{\sqrt{a^2+4}}{(-A^2)^n - 1}$.

因为 $|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立，所以 $|b_1| = |a - A| \leqslant \frac{1}{2}$，即 $\left| \frac{a - \sqrt{a^2+4}}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2}$，得 $a \geqslant \frac{3}{2}$.

从而
$$A^2 \geqslant \frac{(\frac{3}{2})^2 + 2 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{9}{4}+4}}{2} = 4$$
即 $A \geqslant 2$.所以
$$|b_n| = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{a^2+4}}{A^{2n}+1}, & n \text{ 为奇数} \\ \dfrac{\sqrt{a^2+4}}{A^{2n}-1}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

当 n 为奇数时,$|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 可变为$\left(\frac{A^2}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant \sqrt{a^2+4}$对 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立,设
$$C_n = \left(\frac{A^2}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
则
$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{\left(\frac{A^2}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{A^2}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{A^{2n+2}+1}{2A^{2n}+2} \geqslant \frac{4A^{2n}+1}{2A^{2n}+2} > \frac{2A^{2n}+2}{2A^{2n}+2} = 1$$

所以 $C_{n+1} > C_n$,所以$\{C_n\}$为递增数列.当 $a \geqslant \frac{3}{2}$ 时,$C_1 \geqslant \sqrt{a^2+4}$已成立,故 n 为奇数时已满足 $|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

当 n 为偶数时,$|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 恒成立,化为$f(n) = \left(\frac{A^2}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geqslant \sqrt{a^2+4}$恒成立.

因为$\frac{A^2}{2} > 2$,所以$f(n) = \left(\frac{A^2}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n$为递增数列,故只须$f(2) \geqslant \sqrt{a^2+4}$,而
$$f(2) = \left(\frac{A^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{A^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{A^2}{2} + \frac{1}{2}\right) > \frac{A^2}{2} + \frac{1}{2} \geqslant \sqrt{a^2+4}$$
也成立.

故 n 为偶数时已满足$|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$.综上,当 $a \geqslant \frac{3}{2}$ 时,有$|b_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$ 恒成立.

点评 这道题内容涉及递推数列、数列极限(极限存在求极限化归为解方程)、数列恒等式的证明、不等式的证明(归纳法、放缩法)."三问"各有侧重,特别是第三问,其目的是考查我们灵活运用数学知识去分析问题、解决问题的能力.其中前两问主要考查基本概念及运算技能,第一问即考查数列极限的定义,只须抓住$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$,再结合解方程(方程思想)便迎刃而解.但有些同学对这些概念问题不是很重视,按思维定式试图由递推关系推导出通项公式,能力强的同学可能用此法勉强解决,但运算量大,得不偿失;第二问实际上是基本的数学式的变形,是这三问中最简单的一问,在第一问未解决的情况下,也应能完成,可实施"跳步解答",本问的分数应该分段智取;第三问实质是用数学归纳法证明不等式,但入口较难,首先要用到第一问得出的 A 值,还要联想第二问递推关系式,从而选择使用数学归纳法,形式新颖,对考生思维层次要求极高!同时此问的解法 2 渗透了函数思想.该题的设计同时顺应了新高考《数学考试大纲》中提出的个性品质要求:"以实事求是的科学态度解答试题,树立战胜困难的信心,体现锲而不舍的精神."试想当同学们不能顺利解出第一问时,还会心平气和地做好第二问吗?这里正是考查我们是否具有良好个性品质之匠心所在!

【例 7】 在$\triangle ABC$内求一点 P,使$\overrightarrow{AP^2} + \overrightarrow{BP^2} + \overrightarrow{CP^2}$取得最小值,则该点是$\triangle ABC$的(　　)

A.垂心　　B.内心　　C.重心　　D.外心

解析 如图 3,设$\overrightarrow{CA} = \boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CB} = \boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CP} = \boldsymbol{x}$,则$\overrightarrow{AP} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BP} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$,所以
$$\overrightarrow{AP^2} + \overrightarrow{BP^2} + \overrightarrow{CP^2} = (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})^2 + \boldsymbol{x}^2 = 3\boldsymbol{x}^2 - 2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 =$$
$$3[\boldsymbol{x} - \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})]^2 + \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$$