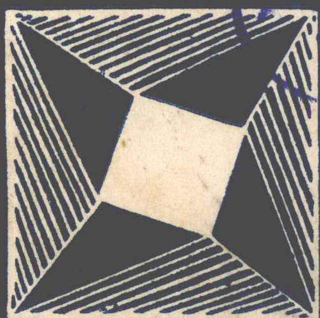
$$\underline{Z}\ \underline{Z}^{Z_2} = \underline{Z}^{Z_1+Z_2}$$

师范复数

理论、方法与技巧

杨训乾 编



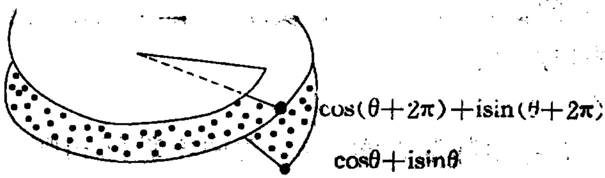
$$\bar{H}Z+H\bar{Z}-h=0$$

$$\begin{vmatrix} \bar{H}_1 & H_1 & h_1 \\ \bar{H}_2 & H_2 & h_2 \\ \bar{H}_3 & H_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0$$

西南師範大學出版社

师范复数

杨训乾 编



西南师范大学出版社出版

内容介绍

1　师范大学的课本当为培教师，而不是养学究，因此本书供给了大量中教内容，以便满足中学教研。

2　任何学科除了明述命题体系外，还暗藏精妙的思维方法，因此本书放弃完满锁细，以便介绍复数学科的内容方法和意义。

本书可为师范大学课本，对中学教师和师范生都有很大的指导意义。

目　　录

第一章　复　数

§1　散述

复数 —— 这是一个曾使许多大数学家感到奇幻和恐惧的怪物，何以会如此呢？

公元三世纪希腊代数学家丢番都遇到方程在求解过程中明显地看出没有实根时，就放弃这个方程，说它不可解，这是逃跑．后来的算学家总是回避不了负数开平方的困惑，于是他们表现了各种态度．

1.1　妙玄虚复实

对于复数，人们经历了妙玄虚复实五种感觉．

妙 —— 意大利数学家卡丹在问题"把 10 分成两部分，使其乘积为 40"中建立起方程

$$x(10-x)=40$$

按二次方程求根公式求出其形式解为 $5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$．他第一个承认了负数开平方是(新)数，承认这种(新)数可以作为问题的形式解，但又找不出分点在哪里，就说"算术就是这样神妙地搞下去，它的目标，正如常言所说，是既精致，又不中用"．

玄 —— 卡丹发现了解三次方程的求根公式，并用去求方程

$$x^3-15x-4=0$$

的根，得到

$$x = 3\sqrt{2+\sqrt{-121}} + 3\sqrt{2-\sqrt{-121}}$$

之后就不知何去何从了．蓬贝利更大胆的研究了负数平方根的一些基本运算，发现了

$$2+\sqrt{-121} = (2+\sqrt{-1})^3$$

$$2-\sqrt{-121} = (2-\sqrt{-1})^3$$

从而得到

$$x = (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4$$

蓬贝利成功了，但还是认为这事情玄．

虚 —— 法国数学家笛卡尔他不承认方程的负根，称负根为假根，那是因为们代表比零还小的数．为了理解负根，他指出，对于一个给定的方程，可以得到另一个方程使它的根比原方程的根大任何一个数量，这样，有负根的方程就可以化成有正根的方程．可是，对于有些方程却办不到这点，所以这些根不是实的而是虚的，它们并不是数，笛卡尔造出虚数这一名词，循呼至今．

欧拉也曾认为过复数是不可能的数．

复 —— 德国数学家高斯对代数基本定理作了第一个证明，但必须依赖于对复数的承认．为了消除人们对虚数的恐惧心理，他认为，如果 1．-1 和 $\sqrt{-1}$ 原来就不称为正，负和虚，而称为正，负和侧，那么人们对这些数就不可能产生那些阴暗神秘的现象．他说几何可以使人们对虚数真正有一个新的看法．因此他采用术语“复数”以与虚数相对立，并且用 i 代替 $\sqrt{-1}$.

法国数学家达朗贝尔断言：每一个由复数经代数运算建

立起来的式子都是一个形为 $A + B\sqrt{-1}$ 的复数.

实——尽管改虚为复消除了们的许多恐惧,但 $i^2 = -1$ 仍然是象魔鬼的阴影一样缠住人们.英国数学家哈密尔登认为复数 $a + bi$ 不是 $2 + 3$ 意义上的一个真正的和,加号的使用是历史的偶然.bi 不能加到 a 上去,他认为复数 $a + bi$ 只不过是实数的有序对 (a,b) 而已.他对这样的有序对规定了加减乘除运算

$$(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$$

$$(a,b) - (c,d) = (a - c, b - d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac + ba}{c^+ d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)$$

之后,就可以推出

$$(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$$

这里是从实数到实数的运算,避免了 $i^2 = -1$ 这个怪物引起的恐惧,算家们自我心理感觉踏实了!

英国数学家牛顿也并不认为复数是有意义的,这可能是由于它们缺乏物理意义.他说过,正是方程的根常出现为不可能的情况(指复根),才不致使不可解的问题显得好象是可以解的样子.

1.2　引人入胜

代数学家从复数那里得到了许多好处,二次方程的求根公式通用了,经过复数领域走一趟,将三次方程的实根求出来了,代数基本定理被证明了,用复数为工具还得到了一些数论结果.

达朗贝尔要论证明他的断言时,就碰到了 $(a + bi)^{c+di}$ 的

情况，这又刺激了对复数的进一步研究．

分析学家对虚数也产生了强烈的兴趣，法国数学家贝努里不顾当时复数的混乱，毫不犹豫的采用复数来表示原函数.

这就发现了反三角函数与对数之间的关系，这又刺激了对复数的活跃讨论，加强了对复数的认识．对于复数的进一步研究是复变函数，高斯，柯西，黎曼，欧拉等人建立了复变函数理论，这种理论已得到了物理应用，最终导致了对复数的完全承认．

1.3 自由创造

既然复数在今日是这么的有用，当初的数学家们又何以要经过妙玄虚复实这样曲折的道路呢？

原来，概念是怎样发生的这个问题，人类经历了三个认识阶段．

(*a*) 唯心主义者认为：理念是人们对彼岸世界的回忆．柏拉图认为人在出自以前经历过一个世界，所见一切在出生时皆忘记了，长大以后慢慢回忆，回忆出来的就是科学概念和定律．由于他的主张未能得到科学实验的支持，他的主张后来逐渐被人们放弃．

(*b*) 唯物主义者认为：意识是客观存在在人们头脑中的反映．恩格斯认为数学是研究现实世界的空间形式和数量关系，例如人们看见太阳和陶器的形状才产生圆的概念，人们记物才产数的概念，从古到今的许多数学家都持有这一信仰．可是，虚数 i 又倚于何物呢？人们看不出，这就阻碍了唯物主义者对虚数的承认．

(*c*) 创造论者认为：概念是人们思维的自由创造．爱因斯坦认为随着理性思维的发展而不断创造出新的概念和定

律，创造的理论若能得到实验的支持，则创造是可用的，若创造的理论得不到实验的支持，则创造是不可用的．这就比唯物论者远见一步，而虚数正是逻辑的产物，它不是由实践经验升华出来的概念．所以创造论者能大胆的承认虚数而不顾及它是否倚于物．他们建立了复数的运算律，建立了复数理论，然后才去找复数的应用．唯物主义者的恩格斯在反杜林论中也不得不承认："数学只有到了最后，虚数才是纯逻辑产物．"何必最后呢？虚数标志着数学思维方式由实物抽象时期进入到自由创造时期了．

1.4 形式规律

复数领域内美景引人入胜，但是陷阱也翻车坑人．因为历史上的算家们信仰：形式规律的永恒性！一条数学规律一经发现，就可以逐次跋高和抽象以填塞进新的内容，而数学形式依然如故．这是人们在大量经验上形成的信仰．然而人们倚持旧有的数学形式确未能驾驭复数的新内容，而使一些大数学家翻车落阱．

例如欧拉发现

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

是经过形式运算得到的，这里他成功了．

可是欧拉错判．$\sqrt{-4}\sqrt{-1} = \sqrt{(-4)(-1)}$

这是因为他信仰另一条形式规律

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

而在其中填进了负数的内容，这里他翻车了．

如何绕过由于信仰形式规律而遇到的陷阱，这是复数教学的第二个难点．复数是数学进入自由创造时期的逻辑产物，这是复数教学的第一个难点．复数穿插进多个领域．这

是复数教学的第三个难点.

1.5 复数的运算

哈密尔登为什么要那样去规定实数对的运算呢?他是受到运算复数的经验启示.人们在探索虚数的运算时积累了一些经验,既然承认 -1 的平方根是个新数,那么就应当探索这个新数与旧数(实数)的运算关系(加减乘除),因此试着把实数 b 与新数 i 的乘积写成 bi,认为这个数的平方是 $-b$,也认为 ib 的平方是 $-b$,我们就应该采用

$$bi = ib$$

这个新数 bi 要与旧数(实)相加,其和 $a + bi$ 的平方不恰好是负数,因此就得承认这是更复合结构的新数,如果不再引起更新的结构,那么 $a + bi$ 就可以作为新数的一般形式(完成形式),再希望新数的运算律要纳入旧数的运算律和多项式运算的形式,我们就希望这样来进行运算

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (c + d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bds)i$$

如果不引起矛盾,我们就采用这个作为运算的规定,哈密尔登采用了这些经验作为三段论式的基础,就表现为复数运算的哈密尔登定义.

若要问

$$(a + bi)^{c+di} = ?$$

它们就不能直接由经验提练而来,而是经验的外推,就显得是被证明出来的结果.