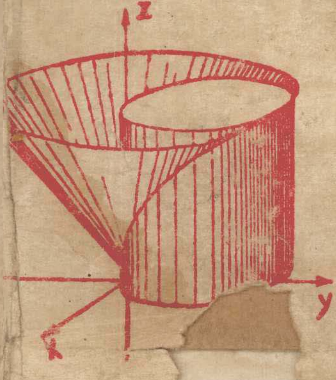
高等数学习题集解答

（根据同济大学数学教研室一九六五年修订本）

数学分析部分

（二）



武汉建材学院基础部
武汉师范学院数学系
合编

目　录

第二编　数学分析（续）

*　　　　*　　　　*

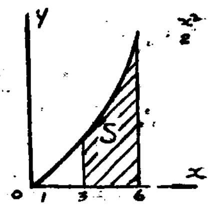
注意：本书在题目号码右上角加记号“*”时，表示较难之题；在题目号码右上角加记号“△”时，表示超出大纲之题.

第十六章　定　积

定积分概念

16.1. 用积分和式表示抛物线 $y=\frac{x^2}{2}$，直线 $x=3$，$x=6$ 和横轴所围成的曲边梯形的面积的近似值，并取和式的极限求其准确值。

解：把[3,6]分成n个等长小区间 $[3+(i-1)\frac{3}{n},\ 3+i\frac{3}{n}]$ 且取 $\xi_i=3+i\frac{3}{n}$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.



则积分和 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(3+i\frac{3}{n})^2\cdot\frac{3}{n}$

$$=\frac{27}{2n}\sum_{i=1}^{n}(1+2\frac{i}{n}+\frac{i^2}{n^2})$$

$$=\frac{27}{2n}\left(n+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right)$$

$$=\frac{27}{2}\left[1+\frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right].$$

$$\therefore\quad S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{27}{2}\left[1+(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})\right]$$

$$=\frac{27}{2}(1+1+\frac{1}{3})=31\frac{1}{2}.$$

16.2. 应用定积分定义计算抛物线 $y=x^2+1$，直线 $x=a$，$x=b$，$(b>a)$ 及横轴所围成的面积.

解：把$[a, b]$分成n个等长小区间

$$\left[a+\frac{(i-1)(b-a)}{n}, \ a+\frac{i(b-a)}{n}\right],$$

且取$\xi_i=a+\frac{i(b-a)}{n}$，则积分和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)^2+1\right]\cdot\frac{(b-a)}{n}$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(a^2+1)+2\frac{a(b-a)}{n}i+\frac{(b-a)^2}{n^2}i^2\right]$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[\left(a^2+1\right)n+2\frac{a(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right]$$

$$=(b-a)\left[(a^2+1)+2\frac{a(b-a)}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{(b-a)^2}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right].$$

$\therefore \quad S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$

$$=\lim_{n\to\infty}(b-a)\left[a^2+1+a(b-a)(1+\frac{1}{n})\right.$$
$$\left.+\frac{(b-a)^2}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})\right]$$

$$=(b-a)\left[a^2+1+a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{3}\right]$$

$$=b-a+\frac{b^3-a^3}{3}.$$

16.3. 自由落体的速度v等于gt，试应用积分定义求前5秒钟内所落下的距离。

解：把$[0,\ 5]$分成n个等长小区间$\left[(i-1)\frac{5}{n},\ i\frac{5}{n}\right]$

且取$\xi_i=\frac{i5}{n}$，$(i=1,2,\cdots,n)$。

所求距离S近似为

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} g\frac{i5}{n}\cdot\frac{5}{n}=g\frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$=25g\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\therefore\quad S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{25g}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{25}{2}g.$$

16.4. 把质量为m的物体从地球表面升高到高度为h的位置，需作功多少？用定积分表示之。[地球吸引物体的力按以下的规律来确定：$f=mg\frac{R^2}{r^2}$，其中m表物体的质量，R表地球的半径，r表地球中心至物体的距离]。

解：物体由地面升高到高度h，则r是由R增加到$R+h$.

在$[R,\ R+h]$中取分点

$$r_0=R<r_1<r_2<\cdots<r_{n-1}<r_n=R+h,$$

则 $\Delta r_i=r_i-r_{i-1}$，　　$\because\quad r_{i-1}<\sqrt{r_{i-1}r_i}<r_i$，

$\therefore$　取$\xi_i=\sqrt{r_{i-1}r_i}$，

所求功A的近似值$A_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta r_i=\sum\limits_{i=1}^{n} mg\frac{R^2}{\xi_i^2}\Delta r_i$.

$$\therefore\quad A=\lim_{\|\Delta r\|\to 0} A_n=\lim_{\|\Delta r\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} mg\frac{R^2}{\xi_i^2}\Delta r_i=\int_R^{R+h} mg\frac{R^2}{r^2}dr,$$

又$\because A_n=mgR^2\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{r_{i-1}r_i}(r_i-r_{i-1})=mgR^2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r_{i-1}}-\frac{1}{r_i}\right)$

$$=mgR^2\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_n}\right),$$

$$\therefore\quad A=\lim_{n\to\infty}A_n=mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right).$$

16.5. 放射性物体的分解速度 v 是时间 t 的函数 $v=v(t)$，试表示放射性物体由时间T_0到T_1所分解的质量 m：

(a) 用积分和式表示其近似值；

(b) 用积分表示其准确值.

解：在$[T_0, T_1]$中取分点

$$t_0=T_0<t_1<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_n=T_1.$$

设 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，在$[t_{i-1}, t_i]$中任取ξ_i，

则 $m\approx\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i$.

$$\therefore\quad m=\lim_{\|\Delta t\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i=\int_{T_0}^{T_1}v(t)dt.$$

16.6. 直接应用定积分定义计算下列积分：

(a) $\int_a^b x\,dx\quad(a<b)$； (b)* $\int_0^1 e^x dx$；

(c)* $\int_1^2\frac{dx}{x}$.

解：a) 把$[a, b]$分成n个等长小区间

$$\left[a+\frac{(i-1)(b-a)}{n},\ a+\frac{i(b-a)}{n}\right],$$

且取$\xi_i=a+\frac{i(b-a)}{n}$，则$\int_a^b x\,dx$对应的积分和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right]\frac{b-a}{n}$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[na+\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$=(b-a)\left[a+\frac{b-a}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right].$$

$$\int_a^b x\,dx=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(b-a)\left[a+\frac{b-a}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=(b-a)\left[a+\frac{b-a}{2}\right]=\frac{1}{2}(b^2-a^2).$$

b） 把[0，1]分成 n 个等长小区间 $\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$，

且取 $\xi_i=\frac{i}{n}$，则 $\int_0^1 e^x dx$ 对应的积分和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^i$$

$$=\frac{1}{n}\,\frac{e^{\frac{1}{n}}\left[1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n\right]}{1-e^{\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}e^{\frac{1}{n}}(1-e),$$ 设 $e^{\frac{1}{n}}-1=\alpha>0$，

则 $\frac{1}{n}=\ln(1+\alpha)$，

$$\int_0^1 e^x dx=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}e^{\frac{1}{n}}(e-1)$$

$$=(e-1)\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=(e-1)\lim_{\alpha\to 0}\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=e-1.$$

c） 把[1，2]分成 n 份，使各分点坐标成几何级数。

设分点为$a=1$，aq，$aq^2,\cdots$，$aq^n=2$，

即$q=\sqrt[n]{2}>1$，小区间$\left[aq^{i-1},\ aq^i\right]$长$aq^i-aq^{i-1}$

$=aq^{i-1}(q-1)$.

且取$\xi_i=aq^i$，则$\int_1^2\frac{dx}{x}$对应的积分和

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{aq^i}aq^{i-1}(q-1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q-1}{q}=n\cdot\frac{q-1}{q}$$

$$=n\cdot\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}}.$$

设 $2^{\frac{1}{n}}-1=\alpha$，则 $2^{\frac{1}{n}}=1+\alpha$，$\frac{1}{n}\ln 2=\ln(1+\alpha)$.

$$\int_1^2\frac{1}{x}dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}}\right)$$

$$=\lim_{\alpha\to0}\frac{\alpha\ln 2}{\ln(1+\alpha)}=\ln 2\cdot\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

$$=\ln 2.$$

定 积 分 的 性 质

16.7 说明（不计算它们的值）下列积分哪一个较大：

(a) $\int_0^1 x^2dx$还是$\int_0^1 x^3dx$?

解：$\because$ $x\leqslant1$，两边乘$x^2\geqslant0$，$\therefore x^3\leqslant x^2$.

$\therefore$ $\int_0^1 x^3dx\leqslant\int_0^1 x^2dx$.

(b) $\int_1^2 x^2dx$还是$\int_1^2 x^3dx$?

解：∵ $1\leqslant x$， 两边乘$x^2\geqslant 0$， ∴ $x^2\leqslant x^3$.

∴ $\int_1^2 x^2dx\leqslant\int_1^2 x^3dx$.

(c) $\int_1^2 \ln x\,dx$还是$\int_1^2(\ln x)^2dx$？

解：∵ $1\leqslant x\leqslant 2<e$， ∴ $0\leqslant\ln x<1$，

$\ln x<1$，两边乘$\ln x\geqslant 0$，

∴ $(\ln x)^2\leqslant\ln x$，

∴ $\int_1^2(\ln x)^2dx\leqslant\int_1^2\ln x dx$.

(d) $\int_3^4 \ln x\,dx$还是$\int_3^4(\ln x)^2dx$？

解：∵ $e<3\leqslant x$， ∴ $1<\ln x$，

两边乘$\ln x>1>0$，

∴ $\ln x<(\ln x)^2$，

∴ $\int_3^4\ln x\,dx\leqslant\int_3^4(\ln x)^2dx$.

16.8. 估计下列各积分的值：

(a) $\int_1^4(x^2+1)dx$

解：∵ $1\leqslant x\leqslant 4$， $1\leqslant x^2\leqslant 16$，

∴ $2\leqslant x^2+1\leqslant 17$，

∴ $2(4-1)\leqslant\int_1^4(x^2+1)dx\leqslant 17(4-1)$，

∴ $6\leqslant\int_1^4(x^2+1)dx\leqslant 51$.

(b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2x)dx$.

解：$\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}$，　$0\leqslant\sin^2x\leqslant1$，

$\therefore\quad 1\leqslant1+\sin^2x\leqslant2$，

$\therefore\quad 1\cdot\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2x)dx\leqslant2\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$

即　$\pi\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1+\sin^2x)dx\leqslant2\pi$.

(c) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$，

解：$\because$　$\mathrm{arctg}\,x$是x的单调增加函数，

若　$\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$，则　$\frac{\pi}{6}\leqslant\mathrm{arctg}\,x\leqslant\frac{\pi}{3}$，

$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{6}\leqslant x\,\mathrm{arctg}\,x\leqslant\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$，

$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$

$\leqslant\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，

即　$\frac{\pi}{9}\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx\leqslant\frac{2}{3}\pi$.

(d) $\int_0^2 e^{x^2-x}dx$.

解：先求$\varphi(x)=e^{x^2-x}$在$[0,2]$上的最大值、最小值，

$\varphi'(x)=e^{x^2-x}(2x-1)=0$，　$x=\frac{1}{2}$，

$\varphi(0)=1$，$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{4}}$，　$\varphi(2)=e^2$，

$\therefore$　$0\leqslant x\leqslant2$时，　$e^{-\frac{1}{4}}\leqslant e^{x^2-x}\leqslant e^2$，

$$\therefore\quad e^{-\frac{1}{4}}(2-0)\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leqslant e^2(2-0),$$

即 $$2e^{-\frac{1}{4}}\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leqslant 2e^2.$$

16. 9. 试计算函数$y=2x^2+3x+3$在区间［1，4］上的平均值。

解：$$\overline{I}=\frac{1}{4-1}\int_1^4(2x^2+3x+3)dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_1^4$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(64-1)+\frac{3}{2}(16-1)+3(4-1)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\ 42+\frac{45}{2}+9\ =24.5.$$

16.10. 试计算函数$y=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$在区间[1，8]上的平均值.

解：$$\overline{I}=\frac{1}{8-1}\int_1^8\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\frac{1}{7}\cdot 2\left[3\sqrt[3]{x}\right]_1^8$$

$$=\frac{2}{7}\cdot 3(2-1)=\frac{6}{7}.$$

上限（或下限）为变量的定积分

16. 11. 试求函数$y=\int_0^x \sin x dx$，　当$x=0$，

$x=\frac{\pi}{4}$及$x=\frac{\pi}{2}$时的导数。

解：$\because\quad y'=\sin x.$

$$\therefore\quad y'(0)=0,\qquad y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

16. 12. 试求函数$y=\int_0^{z^2}\frac{dx}{(1+x^3)}$对$Z$的二阶导数当$Z=1$时的值.

解：$y=\int_0^{u}\frac{dx}{(1+x^3)}$，　　$u=z^2$，

$$\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dz}=\frac{1}{1+u^3}2z=\frac{2z}{1+z^6}$$

$$\therefore\quad y''=\frac{2(1+z^6)-2z\cdot 6z^5}{(1+z^6)^2}=\frac{2-10z^6}{(1+z^6)^2}.$$

故　$y''(1)=\frac{2-10}{(1+1)^2}=\frac{-8}{2^2}=-2.$

16. 13. 下限为变量上限为常量的定积分，对其下限的导函数为何？求函数 $y=\int_x^5\sqrt{1+x^2}\,dx$对$x$的导数.

解：$\left(\int_x^b f(t)dt\right)'_x=\left(-\int_b^x f(t)\,dt\right)'_x=-f(x)$，

$$\therefore\quad y'_x=\left(\int_x^5\sqrt{1+x^2}\,dx\right)'_x=-\sqrt{1+x^2}.$$

16. 14. 求由参数表示式$x=\int_0^t\sin t\,dt$，$y=\int_0^t\cos t\,dt$所给定的函数y对x的导函数.

解：$y'_x=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t}{\sin t}=\mathrm{ctg}\,t.$

16. 15. 试求由$\int_0^y e^t dt+\int_0^x\cos t\,dt=0$所决定的隐函数对于$x$的导数$y'$.

解：等式两边对x求导，$e^y y'_x+\cos x=0$，

$$\therefore\quad y'_x=\frac{-\cos x}{e^y},$$

$\because$ 函数即$e^y-1+\sin x=0$，　$\therefore\ y'_x=\frac{-\cos x}{1-\sin x}.$

16. 16. 当x为何值时函数$I(x)=\int_0^x xe^{-x^2}dx$有极值？

解：$I'(x)=xe^{-x^2}$，驻点为$x=0$，

x		0	
$I'(x)$	$-$		$+$
$I(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore$ $I(0)=0$为极小值.

16. 17. 物体运动的速度与时间的平方成正比。设从时间$t=0$开始3秒钟后，物体经过18厘米。试求距离S和时间t的函数关系.

解：$\because$ $v(t)=kt^2$，

$$\therefore\ S(t)=\int_0^t kT^2dT=\left[k\cdot\frac{T^3}{3}\right]_0^t=\frac{k}{3}t^3$$

又 $t=3$时，$S(3)=18$，

$\therefore$ $18=\dfrac{k}{3}\cdot 3^3$，　　$\therefore$ $k=2$.

因此 $S(t)=\dfrac{2}{3}t^3$.

16.18. 一质点作直线运动，已知其速度$v=2t+4$（厘米/秒）．试求在前10秒钟内质点所经过的路程.

解：$\because$ $v(t)=2t+4$.

$$\therefore\ S(t)=\int_0^t v(T)\,dT=\int_0^t(2T+4)\,dT$$

$$=\left[T^2+4T\right]_0^t=t^2+4t.$$

因此 $S(10)=100+4\times10=140(cm)$.

16.19. 一曲边梯形是由抛物线$y=x^2$，横轴和变动着的但始终平行于纵轴的直线所围成的．试求曲边梯形面积的增量Δs及微分ds当$x=10$且$\Delta x=0.1$时的值.

并求用微分代替增量所发生的绝对误差与相对误差.

解: $S(x)=\int_0^x x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^x=\frac{x^3}{3}$.

$dS=S'(x)\Delta x=x^2\Delta x$.

$x=10$, $\Delta x=0.1$时,

$$\Delta S=S(10.1)-S(10)=\frac{10.1^3-10^3}{3}$$

$$=\frac{1}{3}(1030.301-1000)=10.100\dot{3}.$$

$dS=100\times0.1=10$.

$$\left|\Delta S(x)-dS(x)\right|=10.100\dot{3}-10=0.100\dot{3}.$$

$$\left|\frac{\Delta S(x)-dS(x)}{dS(x)}\right|=\frac{0.100\dot{3}}{10}=0.0100\dot{3}.$$

计算定积分(应用牛顿——莱布尼兹公式)

在题16.20—16.38中,计算下列定积分:

16.20. $\int_1^3 x^3dx$.

√

解: $I=\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3=\frac{1}{4}(3^4-1^4)=20$.

16.21. $\int_0^a(3x^2-x+1)dx$.

√

解: $I=\left[x^3-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^a=a^3-\frac{a^2}{2}+a$

$$=a\left(a^2-\frac{a}{2}+1\right).$$

16.22. $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$.

解： $I=\left[\frac{x^3}{3}+\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3\times 8}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=2\frac{5}{8}$.

16.23. $\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$.

解： $I=\int_1^2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\right]_1^2$

$=\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-2+1=4\frac{5}{6}$.

16.24. $\int_1^4\sqrt{x}\,dx$.

解： $I=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{2}{3}\cdot 8-\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$.

16.25. $\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$.

解： $I=\int_4^9(\sqrt{x}+x)dx=\left[\frac{2}{3}(\sqrt{x})^3+\frac{x^2}{2}\right]_4^9$

$=\frac{2}{3}\cdot 27+\frac{81}{2}-\frac{2}{3}\cdot 8-\frac{16}{2}=45\frac{1}{6}$.

16.26. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$.

解： $I=\left[\operatorname{arctg}x\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$

$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

16.27. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解： $I=\left[\arcsin x\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}$.

16.28. $\int_0^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$.

解: $I=\left[\frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a}\right]_a^{a\sqrt{3}}=\frac{1}{a}\left(\text{arctg}\sqrt{3}-\text{arctg}1\right)$

$=\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{12a}$.

16.29. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

解: $I=\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1=\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin 0=\frac{\pi}{6}$.

16.30. $\int_a^b (x-a)(x-b)dx$.

解: $I=\int_a^b (x^2-ax-bx+ab)dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a+b}{2}x^2+abx\right]_a^b$

$=\frac{1}{3}(b^3-a^3)-\frac{a+b}{2}(b^2-a^2)+ab(b-a)$

$=\frac{1}{6}(b-a)[(2b^2+2ab+2a^2)$

$-3(a+b)^2+6ab]$

$=\frac{1}{6}(b-a)(-b^2+2ab-a^2)$

$=\frac{1}{6}(a-b)(a^2-2ab+b^2)=\frac{1}{6}(a-b)^3$.

16.31. $\int_{-1}^0 \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$.

解: $I=\int_{-1}^0\left(3x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$=\left[x^3+\text{arctg}x\right]_{-1}^0$