工科基础课提高·应试系列

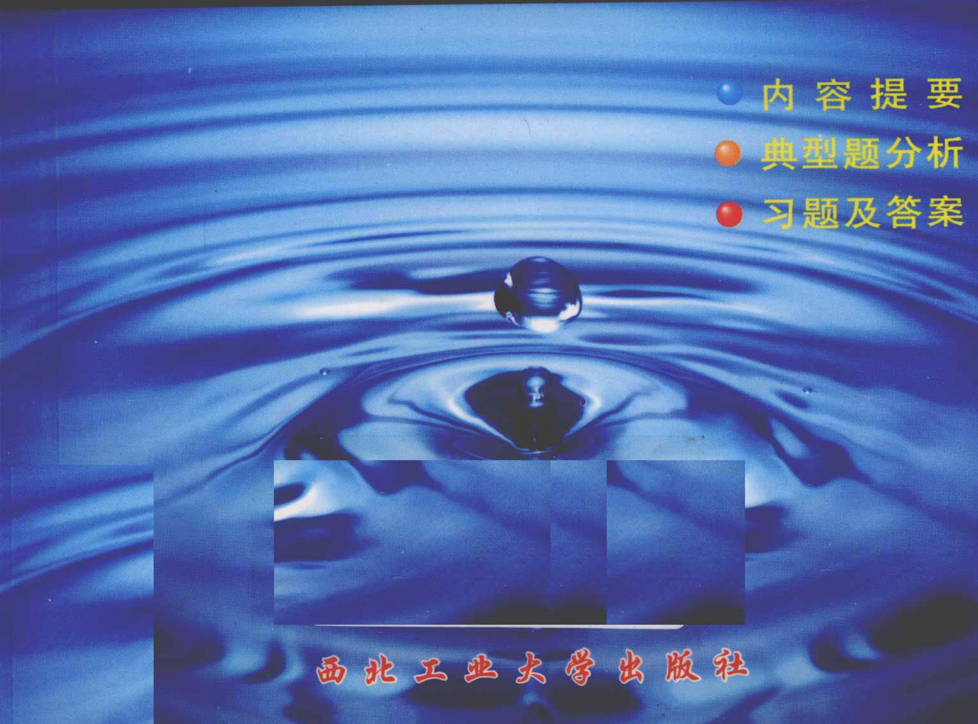
高等数学（下）

典型题分析解集

DIANXINGTI FENXI JIEJI

（第3版）

符丽珍　刘克轩
王雪芳　杨月茜　编



- 内容提要
- 典型题分析
- 习题及答案

西北工业大学出版社

高等数学典型题分析解集

（下　册）

（第3版）

符丽珍　刘克轩
王雪芳　杨月茜　编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书主要内容是从现行的高等数学教材及历年工学、经济学硕士研究生入学考试试题中精选出来的典型题，并进行了解证，阐述了高等数学的解题方法、解题规律和技巧。

本书可作为高等学校理工科和经济学科本科生学习高等数学课程的学习辅导书，也可作为考研的强化训练指导书。

本书选材和内容编排适合与同济大学数学教研室主编《高等数学》（上、下册）第 4 版、第 5 版（高等教育出版社）配套使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型题分析解集/符丽珍等编. —3 版. 西安：西北工业大学出版社，2003.5

ISBN 7-5612-1250-X

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 符…　Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-解题
Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 25315 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号，邮编 710072　电话：029－8493844
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：陕西天元印务有限公司印装
开　　本：850mm×1 168mm　1/32
印　　张：20
字　　数：489 千字
版　　次：2000 年 8 月第 1 版　2003 年 5 月第 3 版第 4 次印刷
印　　数：23 001～31 000 册
定　　价：(上、下册)：24.00 元，本册定价 13.00 元

第3版前言

本书自2000年首版推出以来，受到了广大读者的好评与欢迎。根据读者的需求，出版以来已先后三次印刷，是最畅销的书目之一。现根据使用中的情况，修订编写第3版，主要改动之处如下：

1. 对书中的个别差错做了修改订正；
2. 对各章的“典型题分析”进行了增、删；
3. 对各章后的习题进行了适当调整。

本书由符丽珍（修订编写第一章至第四章）、刘克轩（修订编写第五章至第七章）、王雪宏（修订编写第八章至第十章）、杨月茜（修订编写第十一章和第十二章）分工修订编写，符丽珍任主编，编者按各章顺序署名。

我们衷心感谢广大读者对本书的关心，欢迎读者继续提出宝贵意见。

编　者

2003年3月　于西北工业大学

前　言

高等数学是变量数学，它是研究运动、无限过程、高维空间和多因素作用的科学。高等数学课程是理工科院校本、专科的一门非常重要的基础课，它不仅是学习其它课程的基础，而且也是各学科领域中进行科学研究必备的数学工具。

为了更好地帮助广大学生学好高等数学这门课程，我们根据多年的教学经验编写了这本典型题分析解集。

本书是根据高等数学课程教学大纲要求分章编写，每章的内容分为：一、内容提要；二、典型题分析；三、练习题及习题答案或提示。编写的重点放在典型题分析这一部分。通过对大量有代表性的典型例题进行分析和求解，揭示高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧。这样，有助于学生对高等数学基本概念、基本理论的理解，使各章节知识在头脑中形成知识网，进而提高逻辑推理能力、抽象思维能力、空间想象能力和分析问题与综合运用所学知识解决问题的能力，以达到提高创造能力、全面增强数学素质的目的。

本书可作为高等理工科、经济学科院校学生学习高等数学课程的参考书，也可作为有志报考硕士研究生的考生作为强化训练指导书。

本书共分为上、下两册，上册是一元函数微积分、空间解析几何与向量代数；下册是多元函数微积分、级数和微分方程。全书共十二章，分别由符丽珍（编写第一章至第四章）、刘克轩（编写第五至第七章）、王雪芳（编写第八章至第十章）、杨月茜（编写第十一章和十二章）分工执笔编写，由符丽珍同志联系统稿。西北工业大学

应用数学系的有关老师对本书的编写给予了大力支持和帮助，在此，谨致谢忱。

由于水平有限，书中疏漏不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

2000 年 4 月

目　　录

下　册

第八章　多元函数微分法及其应用

一、内 容 提 要

(一) 多元函数的基本概念

1. 二元函数的定义

设 D 是平面上的一个点集. 如果对于每个点 $P(x,y) \in D$,变量 z 按照一定法则总有确定的值和它对应,则称 z 是变量 x,y 的二元函数(或点 P 的函数),记为

$$z = f(x,y) \quad (\text{或 } z = f(P))$$

点集 D 称为该函数的定义域,x,y 称为自变量,z 称为因变量. 数集

$$\{z \mid z = f(x,y),\ (x,y) \in D\}$$

称为该函数的值域.

2. 二元函数极限的定义

设函数 $f(x,y)$ 在开区域(或闭区域)D 内有定义,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点. 如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对于适合不等式

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

的一切点 $P(x,y) \in D$,都有

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

成立,则称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $x \to x_0, y \to y_0$ 时的极限(也称为二重极限),记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$$

或 $$f(x,y)\to A\quad(\rho\to 0)$$

这里 $$\rho=|PP_0|$$

3. 二元函数连续的定义

设函数 $f(x,y)$ 在开区域(或闭区域)D 内有定义,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点且 $P_0\in D_0$ 如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

如果函数在区域 D 内每一点都连续,则称函数在 D 内连续.函数的不连续点称为间断点(注意,二元函数的间断点可以形成一条或几条曲线)

有界闭区域上多元连续函数的性质及多元初等函数的连续性,均与闭区间上一元连续函数的有关结论相类似.

(二)偏导数

1. 偏导数的定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义,当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时,相应地函数有增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$,如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数,记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_x(x_0,y_0)$ 等,即有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

同理有$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

如果函数$z=f(x,y)$在区域D内每一点(x,y)处对x的偏导数存在，则这个偏导数就是x,y的函数，称为$z=f(x,y)$的偏导函数(简称对x的偏导数)，记作$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$z_x$或$f_x(x,y)$等．类似地可以定义$\dfrac{\partial z}{\partial y}$(或记作$z_y$，$f_y(x,y)$等)．

2．偏导数的求法

求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$时，只要把$z=f(x,y)$中的$y$固定(看作常数)，而对$x$求导；

求$\dfrac{\partial z}{\partial y}$时，只要把$z=f(x,y)$中的$x$固定(看作常数)，而对$y$求导．

偏导数的定义及其求法均可推广到三元函数等情形．

3．偏导数的几何意义

函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的偏导数$f_x(x_0,y_0)$是曲面$z=f(x,y)$与平面$y=y_0$相交的平面曲线

$$\begin{cases}z=f(x,y)\\y=y_0\end{cases}$$

在点(x_0,y_0,z_0)处该曲线的切线与x轴正向夹角的正切，(即该切线对x轴的斜率)，其中$z_0=f(x_0,y_0)$．

4．偏导数存在与函数连续性的关系

对一元函数，在某点可导，则在该点必连续．对于多元函数，即使各个偏导数在某点处都存在，也不能保证函数在该点连续，这是与一元函数相异之处．

5．方向导数与梯度

(1) 方向导数

如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$可微，则函数在该点沿任

意射线 L 的方向导数都存在,且有

$$\frac{\partial f}{\partial L}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$$

其中 α 为射线 L 与 x 轴正向的夹角.

特别地,当取 L 为 x 轴(或 y 轴)正向时,函数 $z=f(x,y)$ 的方向导数就是函数对 x(或对 y)的偏导数,即有 $\frac{\partial f}{\partial L}=\frac{\partial f}{\partial x}$(或 $\frac{\partial f}{\partial L}=\frac{\partial f}{\partial y}$).

对于三元函数 $u=f(x,y,z)$,它在空间一点 $P(x,y,z)$ 处沿射线 L 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial L}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中 α,β,γ 为射线 L 与三个坐标轴正向之间的夹角.

(2) 梯度

函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 的梯度为

$$\mathrm{grad}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

6. 高阶偏导数

(1) 二阶偏导数

如果 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 仍然可导,它们的偏导数称为函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数,按照对自变量 x,y 求导的次序不同,而有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

(2) 混合偏导数

如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在

区域 D 内连续，则混合偏导数与求导次序无关，即在 D 内恒有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

（三）全微分及其应用

1. 全微分的定义

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$，仅与 x,y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分，记为 $\mathrm{d}z$. 即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$$

如果函数在区域 D 内各点处都可微分，则称这函数在 D 内可微分.

2. 偏导数与可微分的关系

(1) 偏导数与全微分的关系

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分，则在该处偏导数一定存在，且有 $A=\frac{\partial z}{\partial x},B=\frac{\partial z}{\partial y}$，则有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

其中记 $\Delta x=\mathrm{d}x,\Delta y=\mathrm{d}y$.

(2) 函数可微的充分条件

若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数在点 (x,y) 处连续，则函数在该点可微分.

(四) 多元复合函数的导数

1. 多元复合函数的求导法则(链式法则)

若函数 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处偏导数存在,函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处有连续偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

2. 几种推广的情形

(i) 设 $z=f(u,v,w)$,而 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, $w=\omega(x,y)$,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),\omega(x,y)]$ 对 x,y 的偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

对于更多个中间变量的情形也可以类推.

(ii) 若 $z=f(u,x,y)$,而 $u=\varphi(x,y)$,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x,y]$ 对 x 及 y 的偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

注意:这里 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是不同的. $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是把复合后的函数 $f[\varphi(x,y),x,y]$ 中的 y 看作不变,而对 x 求偏导数;而 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 是把复合前的函数 $f(u,x,y)$ 中的 u,y 不变,对 x 的偏导数.

同样地, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 也有类似的区别.

(iii) 设 $z=f(u,v,w)$,而 $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$, $w=\omega(t)$,则复

合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]$ 只是一个自变量 t 的函数．这个复合函数对 t 的导数 $\frac{dz}{dt}$ 称为全导数，且有公式

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dt}$$

注意：这里的全导数记号 $\frac{dz}{dt}$ 不能记作 $\frac{\partial z}{\partial t}$，而且上面公式右端都用 $\frac{du}{dt},\frac{dv}{dt},\frac{dw}{dt}$．这是因为 $u=\varphi(t),v=\psi(t),w=\omega(t)$ 都是 t 的一元函数，它们对 t 的导数都是一元函数的导数．

3. 全微分形式不变性

无论 z 是自变量 u,v 的函数，或是中间变量 u,v 的函数，只要 z 可微，它的全微分形式是一样的，都具有形式

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

这个性质叫一阶全微分形式的不变性．

（五）隐函数求导法

求由方程（或方程组）所确定的隐函数的导数或偏导数，通常有以下三种方法：

1. 把方程看作恒等式，两边对自变量求导，然后解出所需求的导数或偏导数．由于因变量是自变量的函数，在此种方法中一定会用到链导法则．

2. 利用隐函数的求导公式

(i) 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数，且 $F_y\neq 0$，则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

(ii) 设函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数，且 $F_z\neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

(iii) 设函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 是由方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

所确定的隐函数,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\G_x & G_v\end{vmatrix}}{D}\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\G_y & G_v\end{vmatrix}}{D}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\G_u & G_x\end{vmatrix}}{D}\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\G_u & G_y\end{vmatrix}}{D}$$

其中:
$$D=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\G_u & G_v\end{vmatrix}$$

3. 微分法

利用一阶全微分形式的不变性,方程两边求全微分,然后可以求出所需偏导数或导数.

(六) 微分法在几何上的应用

1. 空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)$$

其中 $\varphi'(t),\psi'(t),\omega'(t)$ 存在且不全为零,则曲线 Γ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

其中 t_0 为点 (x_0,y_0,z_0) 所对应的参数 t 的值,即有

$$x_0=\varphi(t_0),y_0=\psi(t_0),z_0=\omega(t_0)$$

2. 空间曲面的切平面与法线

(i) 设曲面 Σ 的方程为

$$F(x,y,z)=0$$

其中 $F(x,y,z)$ 具有一阶连续偏导数，且 F_x,F_y,F_z 不同时为零，则在 Σ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

(ii) 设曲面 Σ 的方程为 $z=f(x,y)$，则在 Σ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

（七）多元函数极值问题的解法

1. 二元函数的极值

(1) 函数 $z=f(x,y)$ 取得极值的必要条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则在该点处偏导数必为零，即有

$$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$$

注意：此必要条件可推广到二元以上函数的情形．

(2) 二元函数极值存在的充分条件

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0,f_y(x_0,y_0)=0$，令

$f_{xx}(x_0,y_0)=A$, $f_{xy}(x_0,y_0)=B$, $f_{yy}(x_0,y_0)=C$,则

(i) $AC-B^2>0$ 时具有极值,且当 $A<0$ 时有极大值,当 $A>0$ 时有极小值;

(ii) $AC-B^2<0$ 时没有极值;

(iii) $AC-B^2=0$ 时可能有极值,也可能没有极值,还需另作讨论.

2. 二元函数条件极值的求法

求目标函数 $z=f(x,y)$ 在附加条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值,称为二元函数的条件极值. 此问题的求解法,通常有以下两种.

(1) 降元法

从条件方程 $\varphi(x,y)=0$ 中解出 $y=y(x)$,代入 $z=f(x,y)$,即化为一元函数的无条件极值问题,这种方法称为降元法.

(2) 拉格朗日乘数法

先作拉格朗日函数

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)\quad(\lambda\text{ 为参数})$$

再从方程组

$$\begin{cases}F_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0\\F_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0\\\varphi(x,y)=0\end{cases}$$

中解出的 x,y 就是可能极值点.

上述方法可推广到目标函数是二元以上的多元函数,或附加条件多于一个的情形.

拉格朗日乘数法没给出判定极值的充分条件,但在实际应用问题中,如果由问题的实际意义可以肯定最大(小)值必存在,且求出的可疑极值点又是惟一的,则可以判定函数在该点处所取得的极值一定是最大(小)值.