费定晖　周学圣编演
郭大钧　邵品琮主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析
习题集题解

山东科学技术出版社

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

（六）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 (6)/费定晖编.-2版.-济南:山东科学技术出版社,1999.9
ISBN 7-5331-0104-9

Ⅰ.Б… Ⅱ.费… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题
Ⅳ.017-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第43949号

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解
(六)
费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审
*
山东科学技术出版社出版
山 东 省 新 华 书 店 发 行
济南市市中印刷五厂印刷
*
787mm×1092mm 32开本 17印张 400千字
1999年10月第2版第8次印刷
印数:174 501—184 500
ISBN 7—5331—0104—9
O·10 定价:15.90元

出版说明

吉米多维奇(Б. П. Д ЕМИД ОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自 50 年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书 4462 题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄

本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目　　录

第八章　重积分和曲线积分

§1. 二 重 积 分

1° 二重积分的直接计算法　所谓连续函数 $f(x,y)$ 展布在有限封闭可求积二维域 Ω 内的二重积分乃是指的数

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$，而其和为对所有 i,j 使 $(x_i,y_j) \in \Omega$ 的那些值来求的。

若域 Ω 由下面的不等式所给出

$$a \leqslant x \leqslant b, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为在闭区间〔a,b〕上的连续函数，则对应的二重积分可按下面的公式来计算

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

2° 二重积分中的变量代换　若可微分的连续函数

$$x = x(u,v), y = y(u,v)$$

把平面 Oxy 上的有限闭域 Ω 单值唯一地映射为平面 Ouv 上的域 Ω' 及雅哥比式

$$I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0,$$

则下之公式正确：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega'} f[x(u,v),y(u,v)]|I|dudv.$$

特别是，根据公式 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ 变换为极坐标 r 和 φ 的情形有

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

3901. 把积分 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xydxdy$，当作积分和的极限，用直线

$$x = \frac{i}{n}, y = \frac{j}{n} (i,j = 1,2,\cdots,n\text{-}1)$$

把积分域分为许多正方形，并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值，计算所论积分的值.

解 由于

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} \longrightarrow \frac{1}{4} \quad (n\to\infty),$$

其中

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2},$$

故

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} xydxdy = \frac{1}{4}.$$

3902. 用直线

$$x = 1 + \frac{i}{n}, y = 1 + \frac{2j}{n} (i,j = 0,1,\cdots,n)$$

把域 $1 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 3$ 分为许多矩形. 作出函数 $f(x,y) = x^2 + y^2$ 在此域内的积分下和 $\underline{S}$ 与积分上和 $\overline{S}$. 当 $n\to\infty$ 时，上和与下和的极限等于什么？

解 下和

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{2n}{n^2}\left[n+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}i^2+n+\frac{4}{n}\sum_{j=0}^{n-1}j\right.$$

$$\left.+\frac{4}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}j^2\right]$$

$$=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2},$$

其中

$$\sum_{i=0}^{n-1}i^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}j^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6};$$

而上和

$$\overline{S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}.$$

当 $n\to\infty$ 时，$\underline{S}$ 与 $\overline{S}$ 的极限均等于$\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}$.

3903. 用一系列内接正方形作为积分域的近似域，这些正方形的顶点 A_{ij} 在整数点，并取被积函数在每个正方形距原点的最远的顶点之值. 近似地计算积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

并与精确的值加以比较。

解 由题意知，应取的正方形顶点为(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(3,1)，(3,2)，

$(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)$，故利用对称性知

$$\frac{1}{4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} \doteq \frac{1}{\sqrt{26}}+\frac{2}{\sqrt{29}}+\frac{2}{\sqrt{34}}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{41}}+\frac{1}{\sqrt{32}}+\frac{2}{\sqrt{37}}+\frac{2}{\sqrt{44}}+\frac{1}{\sqrt{42}}+\frac{2}{\sqrt{49}}$$

$$\doteq 0.196+0.371+0.343+0.312+0.177$$

$$+0.329+0.302+0.154+0.285$$

$$\doteq 2.470,$$

即 $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} \doteq 9.880.$$

下面计算积分的精确值：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25}\frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$=4\int_0^5 \ln(y+\sqrt{24+x^2+y^2})\Big|_0^{\sqrt{25-x^2}}dx$$

$$=4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx-2\int_0^5 \ln(24+x^2)dx.$$

由于

$$\int \ln(24+x^2)dx = x\ln(24+x^2)-\int\frac{2x^2}{24+x^2}dx$$

$$=x\ln(24+x^2)-2x+\frac{24}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{24}}+C,$$

从而

$$2\int_0^5 \ln(24+x^2)dx$$

$$=\left(2x\ln(24+x^2)-4x+\frac{48}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{24}}\right)\Big|_0^5$$

$$= 20\ln 7 - 20 + 8\sqrt{6}\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{24}};$$

又

$$4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx$$

$$= 4[x\ln(\sqrt{25-x^2}+7)]\Big|_0^5$$

$$+ 4\int_0^5 \frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}}$$

$$= 20\ln 7 + 4\int_0^5 \frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}},$$

再令 $x = 5\sin t$,有

$$\int_0^5 \frac{x^2dx}{(\sqrt{25-x^2}+7)\sqrt{25-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-25\cos^2 t + 25}{5\cos t + 7}dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5\cos t - 7)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{24}{5\cos t + 7}dt$$

$$= (7t - 5\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 24\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{7\pi}{2} - 5 - 4\sqrt{6}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{24}},$$

从而

$$4\int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2}+7)dx$$

$$= 20\ln 7 + 14\pi - 20 - 16\sqrt{6}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{24}}.$$

注意到

$$2\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{24}} + \operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{\pi}{2},$$

最后便得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$$

$$= 14\pi - 4\sqrt{24}\left(2\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{24}} + \operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{24}}\right)$$

$$= 2\pi(7-\sqrt{24}) \doteq 13.19.$$

将精确值与近似值作比较，显见误差较大，其原因在于有不少不是正方形的域都被忽略，因而产生较大的绝对误差 4.31 及较大的相对误差$\frac{4.31}{13.19} \doteq 32.7\%$.

注意，求 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$ 的精确值若采用极坐标则较为简单：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^5 \frac{rdr}{\sqrt{24+r^2}}$$

$$= 2\pi(7-\sqrt{24}).$$

但按原习题集的安排，似应在 3937 题以后才开始使用极坐标，故本题仍用直角坐标进行计算.

3904. 用直线 $x=$ 常数，$y=$ 常数，$x+y=$ 常数把域 S 分为四个相等的三角形，并取被积函数在每个三角形的中线交点之值. 近似地计算积分

$$\iint\limits_S \sqrt{x+y}\,dS,$$

其中 S 表由直线 $x=0$，$y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的三角形。

解 我们只须以 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{2}$ 及 $x+y=\frac{1}{2}$ 分域 S，即得四个相等的三角形，它们的面积均为$\frac{1}{8}$，重心为

$\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)$及$\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$. 于是，得此积分的近似值为

$$\iint_S \sqrt{x+y}\,dS$$

$$\doteq \frac{1}{8}\left[\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}+\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}+2\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}\right]$$

$$\doteq \frac{1}{8}(0.577+0.816+2.0913)\doteq 0.402,$$

其精确值为

$$\iint_S \sqrt{x+y}\,dS=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\sqrt{x+y}\,dy$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1(1-x^{\frac{3}{2}})dx=\frac{2}{5}=0.4.$$

3905. 把域$S\{x^2+y^2\leqslant 1\}$分为有限个直径小于δ的可求积的子域$\Delta Si(i=1,2,\cdots,n)$. 对于什么样的值$\delta$能保证不等式：

$$\left|\iint_S \sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|<o.oo1$$

成立？其中$(x_i,y_i)\in\Delta S_i$.

解 记函数$\sin(x+y)$在ΔS_i中的振幅为ω_i，则

$$\left|\iint_S \sin(x+y)dS-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\Delta S_i\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}[\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)]dS\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta S_i}|\sin(x+y)-\sin(x_i+y_i)|dS$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Delta S_i} \omega_i dS = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta S_i.$$

由于域 $S\{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 的面积等于 π，故只要

$$\omega_i < \frac{0.001}{\pi},$$

便能满足原不等式的要求。但因为

$$\begin{aligned}
\omega_i &= \sup_{\substack{(x_i, y_i) \in \Delta S_i \\ (x_i', y_i') \in \Delta S_i}} |\sin(x_i' + y_i') - \sin(x_i + y_i)| \\
&\leqslant \sup_{\substack{(x_i, y_i) \in \Delta S_i \\ (x_i', y_i') \in \Delta S_i}} |(x_i' + y_i') - (x_i + y_i)| \\
&\leqslant \sup_{\substack{(x_i, y_i) \in \Delta S_i \\ (x_i', y_i') \in \Delta S_i}} [|x_i' - x_i| + |y_i' - y_i|] \\
&\leqslant \sup_{\substack{(x_i, y_i) \in \Delta S_i \\ (x_i', y_i') \in \Delta S_i}} \sqrt{2[(x_i' - x_i)^2 + (y_i' - y_i)^2]}^{\,*)} \\
&= \sqrt{2}\,\delta_i,
\end{aligned}$$

故只要取

$$\delta < \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} \times 0.001 \doteq 0.00022,$$

则有

$$\left| \iint_S \sin(x + y) dS - \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i + y_i) \Delta S_i \right| < 0.001.$$

*）对于任意非负实数 a, b 有

$$2ab \leqslant a^2 + b^2 \text{ 或 } (a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2),$$

从而

$$a + b \leqslant \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

计算积分：

3906. $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy.$

解 $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)dy = \int_0^1\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 1.$

3907. $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2dy.$

解 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2dy = \int_0^1\left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{3}\right)dx = \frac{1}{40}.$

3908. $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr.$

解 $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi dr = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi$

$$=\frac{a^3}{3}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}.$$

3909. 设 R 为矩形

$$a\leqslant x\leqslant A,\quad b\leqslant y\leqslant B,$$

证明等式

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)dxdy = \int_a^A X(x)dx\int_b^B Y(y)dy.$$

证 根据在矩形域的情况下化二重积分为逐次积分的计算方法，不妨先对 y 后对 x 积分，即得

$$\iint\limits_R X(x)Y(y)dxdy = \int_a^A dx\int_b^B X(x)Y(y)dy$$

$$= \int_a^A X(x)dx\int_b^B Y(y)dy.$$

3910. 设：

$$f(x,y) = F''_{xy}(x,y),$$

计算

$$I = \int_a^A dx\int_b^B f(x,y)dy.$$

解 不妨按先对 y 后对 x 积分的顺序计算，即得

$$I=\int_a^A[F'_x(x,B)-F'_x(x,b)]dx$$
$$=F(x,B)\big|_a^A-F(x,b)\big|_a^A$$
$$=F(A,B)-F(a,B)-F(A,b)+F(a,b).$$

3911. 设 $f(x)$ 为在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 内的连续函数，证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx,$$

此处仅当 $f(x)=$ 常数时等号成立.

证 因为

$$0\leqslant\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy$$
$$=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx-2\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$$
$$+(b-a)\int_a^b f^2(y)dy,$$

故有

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$$

当 $f(x)=$ 常数时，显然上式中等号成立. 反之，设上式中等号成立，则

$$\int_a^b dx\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy=0.$$

由于函数 $F(x)=\int_a^b[f(x)-f(y)]^2dy$ 是 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的非负连续函数，故 $F(x)\equiv0(a\leqslant x\leqslant b)$. 特别 $F(a)=0$，即 $\int_a^b[f(a)-f(y)]^2dy=0$. 又由于函数

$$G(y)=[f(a)-f(y)]^2$$

是 $a\leqslant y\leqslant b$ 上的非负连续函数，故 $G(y)\equiv 0(a\leqslant y\leqslant b)$. 因此，$f(y)\equiv f(a)(a\leqslant y\leqslant b)$，即 $f(x)=$ 常数. 证毕.

3912. 下列积分有什么样的符号：

(а) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)dxdy$；

(б) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy$；

(в) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)dxdy$？

解 (а) 由于 $0<x^2+y^2\leqslant(|x|+|y|)^2\leqslant 1$ 及 $\ln(x^2+y^2)\leqslant\ln 1=0$，且当 $|x|+|y|<1$ 时 $\ln(x^2+y^2)<0$，故

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)dxdy<0.$$

(б) 我们有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy=I_1-I_2-I_3,$$

其中

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy,$$

$$I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}dxdy,$$

$$I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}dxdy.$$

显然