高等学校教学用書

高等数学教程

下册

П. С. 孟傑諾夫
Г. Л. 涅瓦日斯基 著

高等教育出版社

高等学校教学用書

高等数学教程

下册

П. С. 孟傑諾夫
Г. Л. 湟瓦日斯基 著
侯文华 譯

高等教育出版社

3

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的孟傑諾夫 (П. С. Моденов) 与湼瓦日斯基 (Г. Л. Невяжский) 合著的"高等数学教程" (Курс высшей математики) 1948 年版譯出。原書經苏联高等教育部审定为师范学院教科書。

本書中譯本分上下两册出版。本册由东北师范大学侯文峯譯出。

本書原由商务印書館出版，自 1958 年 10 月起改由本社出版。

高等数学教程

下册

П. С. 孟傑諾夫，Г. Л. 湼瓦日斯基著

侯文峯譯

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺 7 号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第 054 号)

上海洪兴印刷厂印刷 新华书店发行

統一书号 13010·332 开本 850×1168 1/32 印張 12 3/16

字数 314,000 印数 1,001—2,000 定价(4) ¥ 1.40

1954 年 1 月商務初版(共印 15,300)

1958 年 10 月新 1 版 1959 年 2 月上海第 2 次印刷

序　言

本書可供師範專科學校的物理數學系及師範學院的數學系以外各系教學之用。

稍微超出教學大綱範圍的補充材料是用小字排印的。省略去所有這些材料，對於理解基本課文也是沒有妨礙的。

函數在一點的連續性的概念及函數在一點的極限的概念都是從極一般的觀點來敍述的。根據這種觀點是不能把所有與這有關的定理都統一起來(像通常所作的那樣)。如果只觀察那樣一些點，即在它們的近傍內函數是被定義了的，則可以省略 § 97 並且把它看作是 § 106 的推論。凸性(§ 91)及極值(§ 93)的概念也可以移到講這些概念的充分條件的那幾個有關的節內來講。

最後，在教學當中，也可以把 § 94 及 § 95 省略去而把它們的內容移到微分法裏面來講。

但是應該考慮到：不藉助於微分法而能用有限的方法來研究函數及給出與函數有關的一系列概念(增減、凸性、極值等等)，是很有益的。

在一切情況下，都可以如意地變更敍述材料的順序。補充材料，在指出一系列“高等數學”的問題與初等數學的聯繫的方面，是有益處的。

最後，我們要向在整理原稿的工作中給與我們很大幫助的校對人恩・伊・諾涅舍羅夫教授、及給我們提出很多寶貴指示和意見的夫・夫・涅梅玆克母教授、阿・伊・馬爾庫謝維奇教授、並在最後的一次審查原稿中給與幫助的伊・耶・他那他爾各位致以甚深的謝意。

莫斯科　1947年6月　　波・西・孟傑諾夫

哥・里・涅夫耶日斯基

下册目錄

第十四章 函數

§ 82 函數的概念

函數的概念在解析學裏是基礎的概念，它與集合在另一集合上的對應關係上都有關聯，同時所有這些概念都是初等的，那就是說不是用另外的比較更簡單的概念而定義的，因此在下面所說的都要被看作是說明而不要看作是定義。

我們把物的集或物的羣稱爲集合，觀察集合的例子：

(1)在一個教室裏人的集合。

(2)在一個圖書館裏書的集合。

(3)在所給的物質小塊內的原子的集合。

(4)所有正整數的集合：$1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

(5)所有實數的集合。

(6)一個直線上所有點的集合。

(7)在平面上所有三角形的集合等等。

用以組成集合的那些個東西稱爲這個集合的**元素**。若某一元素 a 屬於所觀察的集合 $\mathfrak{M}$ 時，則說這個元素屬於這個集合，並寫成：

$$a \in \mathfrak{M}。$$

若元素 a 不屬於集合 $\mathfrak{M}$ 時，則將寫爲

$$a \overline{\in} \mathfrak{M}。$$

例如，若 $\mathfrak{M}$ 是所有正整數的集合時，則

$$2 \in \mathfrak{M}, \quad 10 \in \mathfrak{M}, \quad 125 \in \mathfrak{M},$$

而 $\frac{3}{2}\overline{\in}\mathfrak{M}$, $-2\overline{\in}\mathfrak{M}$, $\sqrt{2}\overline{\in}\mathfrak{M}$ 等等。

我們觀察兩個集合 $\mathfrak{M}$ 及 $\mathfrak{N}$，而這二者之中的每一個集合的元素，對於我們說來，是什麼都可以的，那就是說 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 的元素可以是人、書、數，一般的可以是任何什麼東西或概念。

假設確立一種對應關係，在這種對應關係上對於集合 $\mathfrak{M}$ 的每一元素可使集合 $\mathfrak{N}$ 的一個或多個元素與之相對應，這時，我們說函數已經被確定了，把它寫成

$$y=f(x);$$

這裏 x 是集合 $\mathfrak{M}$ 的任意元素；稱之爲自變數，而 y 是函數值也就是 y 是與 x 成對應關係的 $\mathfrak{N}$ 中的那些元素的集合，集合 $\mathfrak{M}$ 稱爲函數 $f(x)$ 的定義域。

觀察例題：

例 1. 設 $\mathfrak{M}$ 是已知圖書館內書的集合，而 $\mathfrak{N}$ 是讀者的集合。對於每一本書使所有讀過這本書的人與之相對應。這個函數的定義域是圖書館內書的集合；自變數 x 是已知圖書館內的書，而函數值 y 是所有讀過 x 這本書的人的集合。

例 2. 設 $\mathfrak{M}$ 是已知機關內工作崗位的集合，而 $\mathfrak{N}$ 是在這個機關成立以來所有年代裏，曾在這些工作崗位上工作過的人們的集合。對於工作崗位 x，使曾在這個工作崗位上工作過的人與之相對應，這裏自變數 x 是工作崗位，而函數值 y 是所有在 x 工作崗位上工作過的人的集合。

例 3. 設 $\mathfrak{M}$ 是已知教室裏坐位的集合，而 $\mathfrak{N}$ 是所有曾在這個教室裏學習過的人的集合(在學校成立以來所有的年代裏)。對於每一個坐位 x，使所有那些曾在那裏坐過的人(那管是一次)都與之相對應，這裏自變數 x 是已知教室裏的坐位，函數值 y 是所有曾在坐位 x 上坐過的人集合。

例 4. 設 $\mathfrak{M}$ 是已知城市裏的人們的集合，而 $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}$ 即 $\mathfrak{N}$ 也是這個城市裏同樣那人們的集合，對於每一個人 x，使這個已知城市裏所有他的朋友與之相對應，這裏自變數 x 是城市裏任意某一個人，而函數值 y 是所有在這個城市裏 x 這個人的朋友的集合。

例 5. 設 $\mathfrak{M}$ 是熱金屬片上的點的集合，而 $\mathfrak{N}$ 是在這熱金屬片上各點的溫度的集合，對於熱金屬片上的每一點，使在這點上的溫度與之相對應，這裏自變數 x 是點，函數值 y 是在點 x 上金屬片的溫度。

例 6. 設 $\mathfrak{M}$ 是一平面上三角形的集合，而 $\mathfrak{N}$ 是這同一平面上的點的集合，對於每一個

三角形,使與三角形三邊等距的點與之相對應(這樣的點有四個),這裏自變數 x 是這個三角形,函數值是與三角形 x 三邊等距的點。

例7. 設 $\mathfrak{M}$ 是所有正實數的集合,而 $\mathfrak{N}$ 是一平面上所有矩形的集合,對於每一個正實數 x,使面積爲 x 的矩形 y 與之相對應。這裏自變數 x 是正實數,函數值 y 是所有那些面積等於 x 的矩形,這個例子裏對於每一個自變數 x 都對應着無限多個面積等於 x 的矩形。

在現在的教程裏,我們將要研究那些函數,即對於他們所用的集合 $\mathfrak{M}$ 及 $\mathfrak{N}$ 的元素都是實數,並且對於集合 $\mathfrak{M}$ 中以每一個數 x 只有集合 $\mathfrak{N}$ 中的一個數 y 與之對應(單值函數)。

但是有了這樣的限制,並不是說,對於在研究各種不同的對象時所導入於數學裏面的一系列概念,我們就不必重行審查了。這些概念是:函數的等式、和、差,等等。事實上;若對於集合 $\mathfrak{M}$ 的每一個數 x,只有集合 $\mathfrak{N}$ 中的一個數 y 與之相對應,則我們就有了函數[1]

$$y=f(x)。$$

又若在另作兩個(或與原來同一的)數的集合 $\mathfrak{M}$ 及 $\mathfrak{N}$ 中間給了第二個對應關係

$$y=\varphi(x)$$

時,則我們應當對和

$$f(x)+\varphi(x)$$

如何去理解?又應當如何去理解等式

$$f(x)=\varphi(x)?\ 等等。$$

所有這些都應當重新定義,因爲若於數的等式、和、等等的概念對於我們固然是很熟悉,但函數並不就是數。

定義　若二個函數 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 的定義域相同,且對於這些函數的定義域內任意的 x,二函數值都相等,即:

[1] 在這個教程裏,我們將只來研究單值函數,所以"函數"這一名詞在我們來說是意味着"單值函數"。

多值函數的研究及對於多值函數的情形下的一些概念如等式、和、積等等的概念的定義是比單值函數的情形下的相應的定義複雜的多。在數學的大量問題中,多半關聯到單值函數,或把研究多值函數的問題歸結於去研究幾個單值函數的問題。因此,用完整的形式說明了函數的概念是一個集合在另一個集合上的對應關係,我們以後將不去研究多值函數。

$$f(x)=\varphi(x)$$

時,則稱兩個函數 $f(x)$ 與 $\varphi(x)$ 相等。

若兩個函數 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 的定義域各爲 $\mathfrak{M}_1$ 和 $\mathfrak{M}_2$,由既屬於 $\mathfrak{M}_1$ 又屬於 $\mathfrak{M}_2$ 的所有的 x 的值而定義的 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 相加而成的函數,稱之爲函數 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 的和;而在既屬 $\mathfrak{M}_1$ 又屬於 $\mathfrak{M}_2$ 的任意一點 x 時的函數和的值等於 $f(x)+\varphi(x)$。

兩個函數的差、積及商(若分母不等於零)的概念也同樣可以定義。

把函數 $f(x)$ 在一點 $x=a$ 時的函數值記做 $f(a)$。

若定義一個函數的對應法則是用式子給出來的,但未提到函數的定義域時,則我們要理解函數的定義域是那些能夠使式子有意義,也就是能夠確定實數 y 的所有的數的集合(例如函數 $y=\lg x$ 的定義域是所有正數的集合)。我再們觀察一些例子。

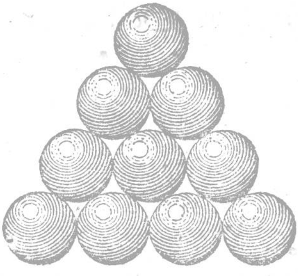

圖 202

例 8. 用球形彈丸組成正三角形,而在每個底邊上放 n 個彈丸,彈丸的總數 N 由式子

$$N=\frac{1}{2}n(n+1)$$

而確定(圖 202)。在這個例子裏自變數是三角形底邊所放的彈丸的數 n,函數是彈丸的總數 N,因依題意 n 必須是大於 2 或等於 2 的任意正整數,所以這個函數 $N=f(n)$ 的定義域是大於 2 或等於 2 的所有正整數。例如有

$$f(2)=3,\quad f(5)=15,\quad \text{等等。}$$

例 9. 一本書的價格是 5 盧布,這一版書出 1000 册,問這版書中 x 册價值多少錢?

用 y 表示所求的金額,將有:

$$y=5x。$$

在這個例子裏自變數是書的册數 x,函數值是 x 册書的價格,因依題意 x 必須是從 0 到 1000 的整數,所以函數 y 的定義域是從 0 到 1000 的整數的集合,例如有

$$f(10)=50,\quad f(40)=200,\quad \text{等等。}$$

例 10. 有金屬 30 厘米^3,密度爲 5 克/厘米^3,問此金屬 x 厘米^3 的質量爲若干克?

用 y 表示所求的克數,將有:

$$y=5x。$$

這裏自變數是金屬的厘米^{3}數 x,函數 y 是表示 x 厘米^3 的金屬的質量的克數,因依題意 x 必

爲閉間隔 $[0,30]$ 內一數，所以函數 y 的定義域是閉間隔 $[0,30]$。應當注意，例 9 與例 10 的函數是不同的。因爲雖然對應法則是用同一式子表示 $(y=5x)$ 的，但它們的定義域卻不同。對於後者的函數是 $f\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{35}{3}$，但在例 9 中記號 $f\left(\frac{7}{3}\right)$ 卻沒有什麽意義，因爲說 $\frac{7}{3}$ 册書的價格是沒有意義的。

例 11．一個物體由高 490 米處自由落下，問從落下開始經過 t 秒物體在地面上方，什麽樣的高度 s 處？

取開始落下的時間作爲時間的座標原點落，下加速度爲 9.8 米/秒^2

解：若 t 不超過 10 秒，則 $s=490-4.9t^2$；經過 10 秒物體落在地面上，就是當 $t>10$ 時 $s=0$，所以

$$s=\begin{cases}490-4.9t^2 & (\text{當 } 0\leqslant t\leqslant 10 \text{ 時}),\\ 0 & (\text{當 } t>10 \text{ 時})。\end{cases}$$

在這個例子裏自變數是測得的時間的數 t，函數是測得的物體離地面的距離的數 s（米數），函數的定義域是半開間隔 $[0,+\infty)$，也就是所有非負數的集合。

注意：若將開始落下以前的時間約定爲負，則 s 的值將按所給的時間的值而被確定如下：

$$s=\begin{cases}490 & (\text{當 } t<0 \text{ 時}),\\ 490-4.9t^2 & (\text{當 } 0\leqslant t\leqslant 10 \text{ 時}),\\ 0 & (\text{當 } t>10 \text{ 時})。\end{cases}$$

在這個例子裏，爲了計算函數 $s=f(t)$ 的值，需要用三個式子。

例如：
$$f(-7)=490,\quad f(-5)=490,\quad f(5)=367.5,$$
$$f(40)=0,\qquad f(315)=0,\ \text{等等}。$$

例 12．用 x 表示某人所有的盧布數，用 y 表示由此金額內的支出，設其支出按下表實行：

$$y=\begin{cases}10 & (\text{當 } 50\leqslant x<100 \text{ 時});\\ 20 & (\text{當 } 100\leqslant x<200 \text{ 時});\\ 30 & (\text{當 } 200\leqslant x<300 \text{ 時});\\ 40 & (\text{當 } 300\leqslant x<400 \text{ 時})。\end{cases}$$

這裏自變數 x 是某人所有的盧布數，而函數是由 x 盧布的金額內所支出的盧布數 y，在這個例子裏函數 $f(x)$ 的定義域按表內所記的是不小於 50 而小於 400 的整數的集合。

有：
$$f(60)=10,\quad f(80)=10,$$
$$f(100)=20,\quad f(257)=30,\ \text{等等}。$$

例 13．
$$y=\begin{cases}-x+2 & (\text{當 } x\leqslant 0 \text{ 時}),\\ x+2 & (\text{當 } x>0 \text{ 時})。\end{cases}$$

這裏 x 是自變數，y 是函數，定義域是 $(-\infty,+\infty)$，也就是所有定數的集合。

在開始學分析學來觀察這類例子的時候，很容易把我們這裏的函數當做是兩個函數 $y=-x+2$ 和 $y=x+2$。這是不正確的。在例 13 裏（同樣在前邊例子 11、12 裏）所給的是一個函數。而這一個函數的對應法則是用兩個式子寫出來的，當自變數 $x\leqslant 0$ 時，我們從式子 $y=-x+2$ 來計算函數 y 的值，當自變數 x 爲正數時，我們從式子 $y=x+2$ 來計算函數 y 的值。

若按着通常用 $f(x)$ 表示這個例子裏所給的函數時，則有像下面這樣：

$$f(-7)=9\ (\text{應用式子 } y=-x+2);$$

$$f(10)=12(\text{應用式子 } y=x+2),\quad \text{等等。}$$

例 14.
$$y=\begin{cases}3\ (\text{當 } x=5),\\ -7\ (\text{當 } x=9),\\ 0\ (\text{當 } x=12)。\end{cases}$$

這裏 x 是自變數，y 是函數，定義域是由三數 5、9、12 所組成，値

$$f(5),\ f(9),\ \text{和 } f(12)$$

有意義，且
$$f(5)=3,\ f(9)=-7,\ f(12)=0。$$

例 15. 對於每一個實數 x，用下面的方法使數 y 與之相對應，就是若 x 是有理數，則令 y 等於 1，若 x 爲無理數，則令 y 等於 0，這函數 $f(x)$ 稱爲迪里赫雷(Дирихле)函數，它是由對應法則的敍述直接給出來的。它的定義域是所有實數的集合。例如，有：

$$f(2)=1,\quad f(\sqrt{2})=0,\quad f(\pi)=0,\quad f\left(-\frac{17}{4}\right)=1,\quad \text{等等。}$$

例 16. 把函數 $y=f(x)$ 由式子

$$y=x^2-\lg x+\frac{1}{x-3}$$

而給定。這個函數的定義域是所有使式子 y 有意義的那些 x 的値的集合。就是除掉 $x=3$ 以外所有正數的集合，也就是由兩個開間隔

$$(0,\ 3)\text{及}(3,\ +\infty)$$

所組成的集合。

例 17.

（1）$y=ax^2+bx+c$——定義域是所有實數的集合。

（2）$y=\sqrt{x}$——定義域是所有非負數的集合。

（3）$y=\sqrt{-x}$——定義域是所有非正數的集合。

（4）$y=\dfrac{1}{x^2-1}$——定義域是除掉 1 及 -1 以外的所有實數的集合。

（5）$y=\lg\sin x$——定義域是由使 x 的正弦爲正値的所有 x 的値所組成。也就是：

$$2k\pi<x<(2k+1)\pi$$

（k 取所有的整數値）。

（6）$y=\sqrt{-1-x^2}$——這個式子並不定義任何(實)函數，因爲不論 x 爲什麼樣的實數，

y 的值也不是實數。定義域是"空集合"，也就是一個元素也沒有的集合。

例 18.

（1）$y=|x|$。定義域是所有實數的集合，如：

$$f(2)=|2|=2,\quad f(-3)=|-3|=3 \quad \text{等等。}$$

（2）$y=\frac{|x|}{x}$。定義域是除掉 $x=0$ 以外的所有實數的集合。顯然，當 $x>0$ 時則 $|x|=x$，即 $y=1$，而當 $x<0$ 時則 $|x|=-x$，也就是 $y=-1$，因此，可將這個函數像下面這樣給出來：

$$y=\begin{cases}-1 & (\text{當 } x<0 \text{ 時}),\\ +1 & (\text{當 } x>0 \text{ 時})。\end{cases}$$

練　習

161. 試求函數
$$f(x)=\frac{2}{x-1}$$
的定義域，並求：
$$f(0),\quad f(-1),\quad f(5),\quad f\left(-\frac{1}{3}\right),\quad f(\sqrt{2}),\quad f(1)。$$

162. 試求函數
$$f(x)=\frac{2x}{x^2-1}$$
的定義域，並求
$$f(3),\quad f(a),\quad f(-a),\quad f(a^2),\quad [f(a)]^2,\quad f(-1)。$$

163. 試求函數
$$f(t)=t^3-1$$
的定義域，並計算：
$$f(t)+1,\quad f(t+1),\quad f(t^2),\quad f\left(\frac{1}{t}\right),\quad \frac{f(1)}{t},\quad f(-t),\quad f(2t),\quad 2f(t)。$$

164. 已知函數 $f(x)=x^2-2x+3$，試解方程式：
$$f(x)=f(10);\quad f(x)=f(-1)。$$

165. 設 $f(x)=x^4-3x^2+\frac{1}{x^2}$，試證：$f(-1)=f(1)$；$f(-a)=f(a)$。

166. 設 $f(x)=x^2-2x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x}$，試證：$f(3)=f\left(\frac{1}{3}\right)$；$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$。

167. 試證：函數 $f(x)=a^x$ 滿足關係式 $f(x)f(y)=f(x+y)$。

168. 試證函數 $f(x)=kx$（k 爲常數）滿足下面的關係式：
$$f(x+y)=f(x)+f(y);$$
$$f(Cx)=Cf(x)\quad (C \text{ 爲常數})。$$

169. 體積 v 爲 1 的直圓柱的底面半徑 r 的大小是隨直圓柱的高 h 而定，試求這函數 r 用 h 表達時的解析式，又這個函數的定義域是什麼？

170. 底面半徑爲 $r=2$ 的直圓柱的體積 v 的大小乃隨直圓柱的高 h 而定，試求出這函數 v 用 h 表達時的解析式。

171. 試求下面各函數的定義域:

(1) $y=\sqrt{|x|}$,

(2) $y=\sqrt{1-|x|}$,

(3) $y=\sqrt{\sin x}$,

(4) $y=\sqrt{(x-1)(x+2)}$,

(5) $y=\lg[x(x-3)(x-5)]$,

(6) $y=\frac{x^2}{x}$,

(7) $y=\frac{(x-1)(x+2)(x-6)}{(x-1)(x+2)(x-6)}$,

(8) $y=\sqrt{\frac{(x-2)(x+3)}{x(x-1)}}$,

(9) $y=\sqrt{\sin\left(2\pi x+\frac{\pi}{2}\right)-1}$,

(10) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$,

(11) $y=\lg(x^2+2x)$,

(12) $y=\lg(x^2)$,

(13) $y=2^x$,

(14) $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}$。

§ 83　函數的圖形

設 $y=f(x)$ 爲某一函數，對於它的定義域內任意値 x，對應着函數値 $y=f(x)$。一對的數 x, y，在笛卡兒座標❶系內確定了，點 $M(x, y)$ 或 $M[x, f(x)]$。

定義　與函數 $y=f(x)$ 的定義域內所有的 x 値，對應而得的平面上的點 $M[x, f(x)]$ 的集合稱爲函數 $y=f(x)$ 的圖形。

反過來說，若在平面上導入笛卡兒座標系，並且給了點的集合它具有這樣的特性：在平行於縱軸的任一直線上，屬於此集合的點不能多於一個，這時若對於這個集合的任一點的橫座標，使它的縱座標與之相對應，則平面上這樣的點的集合確定了函數 $y=f(x)$。這種給出函數的方法稱爲圖示法。

若函數是由圖形給出的，則它的定義域是它的圖形上的所有點的橫座標的全體。

我們現在來作前節的一些例子裏所給的函數的圖形。

❶ 在分析學裏，我們將只利用笛卡兒直座標系。

例 8❶．$N=\frac{1}{2}n(n+1)$ 其中 n 爲大於或等於 2 的任意整數。

我們做一個表在第一列裏將記載 n 的值，在第二列裏在自變數 n 的每一個值的下面，記載着函數值 N

n:	2	3	4	5	6	7…
N:	3	6	10	15	21	28…

點 $M_1(2,3)$，$M_2(3,6)$，$M_3(4,10)$，$M_4(5,15)$，$M_5(6,21)$，$M_6(7,28)$，… 的集合就是所給函數的圖形（圖 203）。

例 9．$y=5x$ 其中 x 是閉間隔[0, 1000]內的任意整數。

再作表：

x:	0	1	2	3	4	5…
y:	0	5	10	15	20	25…

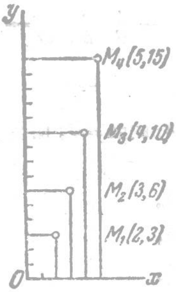

圖　203

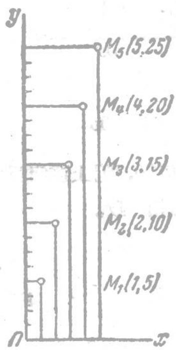

圖　204

點集合 $O(0,0)$，$M_1(1,5)$，$M_2(2,10)$，$M_3(3,15)$，$M_4(4,20)$，$M_5(5,25)$，…，$M_{1000}(1000,5000)$，就是這個函數的圖形（圖 204）。在所給的例子裏所有這些點都是在通過原點的直線 $y=5x$ 上，因此所給的函數的圖形是在直線 $y=5x$ 上且其橫座標爲閉間隔[0,1000]內各整數的所有點的集合。

例 10．$y=5x$ 其中 x 是閉間隔[0, 30]內的任意數。

這函數的圖形是直線 $y=5x$ 上以 $(0,0)$ 及 $(30,150)$ 爲端點的線段（圖 205）。

例 11．

$$s=\begin{cases}490 & (\text{當 } x<0 \text{ 時}),\\ 490-4.9t^2 & (\text{當 } 0\leqslant x\leqslant 10 \text{ 時}),\\ 0 & (\text{當 } x>0 \text{ 時}),\end{cases}$$

這函數的圖形就是圖形 206 所表示的。在開間隔 $(-\infty, 0)$ 內它乃是平行於 Ox 軸的直線

❶ 所標的八個例子和前節裏的八個例子是同一的。

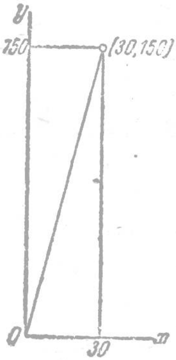

圖 205

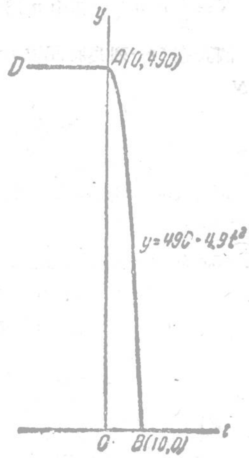

圖 206

$s=490$;在閉間隔$[0, 10]$上這個圖形是拋物線($s=490-4.9t^2$)的弧 AB;而在開間隔$(0, +\infty)$內圖形與 Ox 軸相一致。

例 12.
$$y=\begin{cases}10(\text{當 } 50\leqslant x<100 \text{ 時}),\\ 20(\text{當 } 100\leqslant x<200 \text{ 時}),\\ 30(\text{當 } 200\leqslant x<300 \text{ 時}),\\ 40(\text{當 } 300\leqslant x<400 \text{ 時}),\end{cases}$$

並且 x 是正整數。圖形爲 207 圖所表示的,它是由 305 個點組成的;這些點是:(50, 10),

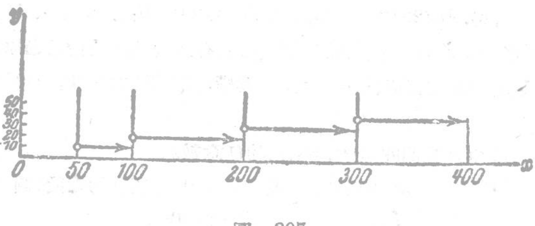

圖 207

(51, 10),(52, 10),…,(99, 10),(100, 20),(101, 20),…,(399, 40)。

例 13.
$$y=\begin{cases}-x+2(\text{當 } x\leqslant 0 \text{ 時}),\\ x+2(\text{當 } x>0 \text{ 時})。\end{cases}$$

圖形爲 208 圖所表示的,是由兩個半直線所組成。

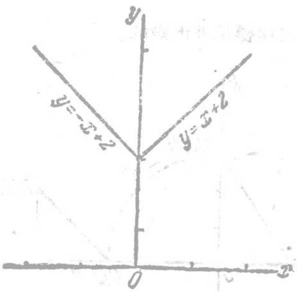

圖 208

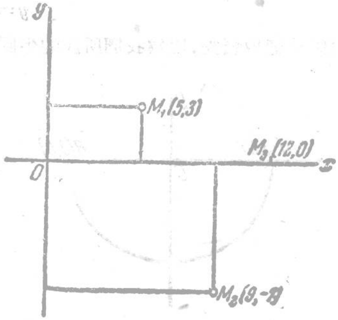

圖 209

例 14.
$$y=\begin{cases}3(\text{當 } x=5 \text{ 時}),\\ -7(\text{當 } x=9 \text{ 時}),\\ 0(\text{當 } x=12 \text{ 時}),\end{cases}$$

這個函數的圖形是由三個點組成的；這三個點是：$M_1(5,3)$，$M_2(9,-7)$，$M_3(12,0)$(圖 209)。

例 15. 迪里赫雷函數的圖形是由 Ox 軸上具有橫座標爲無理數的一切的點及直線 $y=1$ 上具有橫座標爲有理數的一切的點所組成，畫這樣的圖形是不可能。

再觀察一些由圖形給出的函數的例子。

例 1. 觀察過兩點 $M_1(2,3)$ 及 $M_2(3,7)$ 的直線(圖 210)，這直線不平行於 Oy 軸(爲什麽?)，因此它確定了函數 $y=f(x)$。爲了求出對應法則，做直線 M_1M_2 的方程式：

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{vmatrix}=0$$

或
$$4x-y-5=0。$$

並關於 y 解這個方程式，得：

$$y=4x-5,$$

這個函數的定義域是所有實數的集合$(-\infty, +\infty)$。

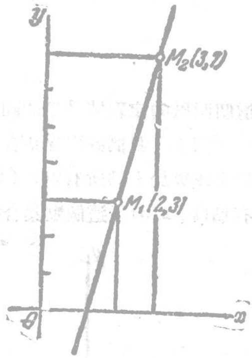

圖 210

例 2. 在 Ox 軸上取二點 $A(-3,0)$ 及 $B(3,0)$，並在線段 AB 上以 AB 爲直徑，在縱座標軸爲負的區域裏作半圓周(圖 211)。這半圓周確定了函數，因爲平行於 Oy 軸的任一個直線與半圓周或不相交，或只相交於一點。爲了求出對應法則，作出以原點爲中心，以 3 爲半徑的圓的方程式：

$$x^2+y^2=9,$$

由此，再對於半圓周上的點，求出由其橫座標表示它的縱座標的式子：