

21世纪高等院校教材

大学数学实验基础

◎ 刘启宽 郑丰华 主编



科学出版社

www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

大学数学实验基础

刘启宽 郑丰华 主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书以一种轻松的方式介绍 MATLAB 软件在大学数学实验基础中的应用,将一些较为复杂的数学运算转化为程序和命令求解,并在介绍具体的小实验的过程中,逐渐引入数学建模的方法和思想,使读者在阅读后形成对数学实验的初步认识,为后面的数学实验课打下坚实的应用基础.

本书可作为非数学类本专科学生的教材,也可供教师和数学类专业学生参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学实验基础/刘启宽,郑丰华主编. —北京:科学出版社,2010
21世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-026600-2

I. ①大… II. ①刘…②郑… III. ①高等数学-实验-高等学校-教材
IV. ①O13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 016242 号

责任编辑:赵 靖 窦京涛 / 责任校对:陈玉凤
责任印制:张克忠 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

骏 杰 印 刷 厂 印 刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010年2月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2010年2月第一次印刷 印张:17 3/4

印数:1—4 000 字数:355 000

定价:27.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

(1) 本书的创作经历和指导思想.

成都信息工程学院于 2002 年开始对全院广大非数学类专业开设数学实验课,其目的在于让广大非数学类专业的学生进入体验数学、了解数学,进而主动学习数学的境界,让学生在实验过程中,能体会到学习数学的乐趣,培养学习数学的兴趣,培养使用数学的决心和勇气,进而体会科学研究的一般过程.另一方面,计算机和计算机软件的飞速发展,促使工程趋向于用计算机计算和解决相关问题.本书试着引导学生初步了解数学实验的基本步骤,并结合一些实际应用问题,告诉学生数学在工程领域里的一些应用.编者于 2002 年开始探讨非数学类专业的数学实验与数学实验教学.根据学生的实际情况和教学过程,写成最初的讲稿,后经试用和修改,终成此书.

(2) 本书的特点.

本书力求使读者学会基本高等数学问题的程序和计算命令解法,学会一般工程计算的函数调用方法.比如,在线性代数中,计算求解高阶的行列式或变换高阶矩阵,用人工求解是不现实的,但在使用相关的数学软件求解时,就很轻松地实现了,这可以让学生越过繁琐的计算而把主要的精力放在对概念、知识点的理解和思考上.

在讲解具体实例的过程中,本书顺其自然地引出简单的数学模型,从而在实验中把实际问题与数学理论简单结合,让读者知道数学具有广泛的应用,而数学建模则是这些应用的必经之路,也试着通过此过程启发学生思考问题,提高学生解决问题的能力.

本书尽量结合一些专业性的实际问题,尽可能多地介绍相关数学背景,提高数学实验的趣味性和可读性.编者认为数学实验的学习是一种让人愉悦的事情,探索未知或用实践的方法去验证已知都应该是一件很有趣的事,实验课更应如此.基础实验更注重的是理解和验证,并进一步在此过程中提高学生学习的自觉性和主动性.另外,本书语言尽量轻松有趣、通俗易懂.希望本书易于让人接受,部分常用的函数或是命令易于记忆,也希望读者在每一个小实验后明白该知识点在现实生活中的应用.

(3) 本书的使用.

编者建议,矩阵和向量知识点是必需的先修课程,又因为本书以科学计算语言 MATLAB 和 MATLAB 软件为编程基础,建议计算机应用基础为先修课程.数学实验基础本身是进一步的对大学数学理论的理解和呈现,也建议线性代数与空间解析几何、微积分和程序设计为并修课程,理想的情况是做到理论与实验相结合.

(4) 其他说明.

本书包含线性代数与空间解析几何和微积分两部分,在内容编排上,遵循学习规

律,注重实验科学的现实性与趣味性,让同学们能够愉快地学习,在浅显的知识点上体会数学的理论知识,学会用数学软件操作代替自己的手工计算,把更多的时间用到对知识点的吸收和消化上,并以此为基础培养自学能力.

书中所有的实验例题都选用 MATLAB 软件加以实现,并都在 MATLAB 6.5 上运行测试通过. 每个例题的语句都给出足够的注释和结果讨论与分析. 对于应用性例题,还给予足够充分的背景知识讲解,使学生感受数学知识的形成过程,从而知道数学的用途,体会数学的和谐美. 最终达到最朴实的学习目的:学会使用 MATLAB 软件求解具体的数学问题,为以后的数学建模和专业知识的学习奠定基础.

写成此稿,编者想感谢朋友和同事们的支持,特别是彭巍、胡建成、吴泽忠的支持和鼓励. 囿于编者水平有限,缺点和不足之处在所难免,恳请同行专家多提宝贵意见,也诚请读者多提改进思路,使之进一步完善.

编 者

于成都信息工程学院

2009 年 7 月

目 录

前言

实验 1 数学实验与数学软件 MATLAB	1
1.1 引言	1
1.2 音乐和数字	4
1.2.1 两只老虎跑得快	5
1.2.2 MATLAB 安装启动和获取 MATLAB 帮助	14
1.2.3 MATLAB 中的变量与常用函数、常用符号	16
1.2.4 简单地表达自己的思想:MATLAB 程序设计基础	21
1.3 实验内容	31
1.4 实验练习	31
1.5 实验 1 附录	32
实验 2 美丽的数学符号	37
2.1 美丽的符号元素	37
2.2 表达式的长成过程	40
2.3 我们用到的函数	42
2.4 常见的数学操作	43
2.4.1 常用的四则运算	43
2.4.2 运算的叠加	44
2.4.3 有来有回的世界描述	45
2.4.4 表示多元的现实世界	46
2.4.5 变量的本质	48
2.5 数学的精髓	49
2.6 把数集成阵列	51
2.7 前辈的经验	54
2.8 玩转矩阵	58
2.8.1 矩阵形变	58
2.8.2 镜子里的自己	59
2.8.3 从很多数据中得到想要的数 据	61
2.8.4 对角线分出来的矩形是三角形吗	62
2.8.5 分块与扩展	64
2.9 矩阵的运算	66

2.10	实验内容	70
2.11	实验练习	70
实验 3	方程组和矩阵的特征值与特征向量	72
3.1	测电阻还是算电阻	72
3.2	求解代数方程	74
3.2.1	数学问题的解析解和数值解	74
3.2.2	求解符号代数方程	74
3.3	矩阵初等变换和向量组的秩及相关性	79
3.3.1	矩阵的初等变换	80
3.3.2	向量组的相关性和秩	80
3.4	解线性方程组的几种解法	82
3.4.1	高斯消元法	82
3.4.2	初等变换法	84
3.5	特征值与特征向量	87
3.6	实验内容	90
3.7	实验练习	90
实验 4	MATLAB 作图	91
4.1	显函数, 参数方程, 隐函数的图形	91
4.2	离散数据作图	91
4.3	二维数值函数作图, 二维符号函数作图	96
4.4	极坐标下作图	110
4.5	统计作图	112
4.5.1	条形图	113
4.5.2	误差图	114
4.5.3	直方图	115
4.5.4	茎状图	117
4.5.5	扇形图	117
4.5.6	填充图	118
4.6	空间曲线参数方程作图	119
4.7	空间曲面一般方程和参数方程作图	122
4.7.1	网格图	122
4.7.2	曲面图	124
4.8	视点控制	133
4.8.1	视角改变	133
4.8.2	曲面裁剪	136
4.9	等高线绘制	137

4.10 实验内容	138
4.11 实验练习	139
实验 5 极限与导数,一元极值,泰勒展开	140
5.1 什么是极限	140
5.1.1 极限思想的萌芽	140
5.1.2 近代数学中的极限	141
5.2 求极限	143
5.3 求导数	143
5.4 极限的应用	150
5.5 求导数实例及导数应用	157
5.6 中值定理的几何意义及其理解	160
5.6.1 罗尔中值定理的几何意义	160
5.6.2 拉格朗日中值定理的几何意义	161
5.7 泰勒公式与函数逼近	163
5.7.1 方便的 Taylor 函数	163
5.7.2 泰勒函数计算器	167
5.8 一元函数的极值求法	168
5.8.1 求极小值的命令	168
5.8.2 求极值的方法	168
5.9 函数单调性与凹凸性判定	176
5.9.1 判定定理	176
5.9.2 在 MATLAB 中实现函数单调性与凹凸性的判定	177
5.10 实验内容	179
5.11 实验练习	179
实验 6 积分与多元函数	181
6.1 生活中的微积分思想	181
6.2 数学中的微积分	182
6.3 符号积分	182
6.4 交互式近似积分和定积分几何意义解释	187
6.5 应用定积分求面积实例	189
6.6 多元函数求偏导和全微分的表示方法	197
6.7 多元函数微分学的应用	199
6.7.1 几何应用	199
6.7.2 二元函数的极值	205
6.7.3 近似计算	209
6.7.4 梯度计算	211

6.8	二重积分和重积分的计算	213
6.8.1	二重积分	213
6.8.2	三重积分	213
6.9	曲线积分与曲面积分实例	225
6.9.1	曲线积分	225
6.9.2	曲面积分	226
6.10	实验内容	240
6.11	实验练习	240
实验 7	无穷级数与微分方程	242
7.1	级数概念	242
7.2	级数和级数求和	243
7.3	用极限和作图的方法审敛及求收敛半径	249
7.4	幂级数	252
7.5	傅里叶级数对方波函数的逼近演示实例	256
7.6	傅里叶展开对其他函数的逼近实例	259
7.7	常微分方程	261
7.7.1	微分方程的解析解	262
7.7.2	微分方程的数值解	266
7.8	函数计算器的方便使用	272
7.9	实验内容	272
7.10	实验练习	273
参考文献	274

实验 1 数学实验与数学软件 MATLAB

1.1 引言

欢迎来到大学数学里的数学实验基础. 大家将浏览的是一些平凡但令人兴奋的数学现实问题. 这些将赋予大家数学学习的激情, 也让大家渐渐地知道, 在社会生活和工程实践中, 数学将会在哪个位置、以什么样的方式去显现和发生作用.

很多资料上都这样认为, 数学实验是计算机技术和数学软件包引入数学教学后所出现的新事物, 其实不然. 也许很多人都记得小学时候, 老师给我们讲解完圆周长的计算后, 再讲圆的面积, 老师当场给了我们具体的演示: 把圆分割成了很多均匀的小扇形, 然后半圆分开再互嵌构成了一个类似矩形的形状, 并启发我们思考如何求圆的面积, 然后顺理成章地给大家导出圆的面积公式. 后来在大学数学课堂里, 学生欣然发现, 对圆进行无限分割, 圆的内截多边形的面积就可以取代圆的面积. 前后相差了 12 年之久, 但对比起来觉得形象、生动、富有说服力, 初等数学和高等数学一下走得那么近. 本人也一直认为这就是数学实验, 而这里面并没有引入计算机技术, 也没有用到软件, 只是普通的实验器材——塑料模型. 类似的实验在后来的物理学、化学和生物学等课程里出现了很多次, 让我们观察、思考, 对比书本上相关的定义、定理, 然后验证、理解、消化相关的知识点.

但长期以来, 从小学到大学乃至研究生的学习, 数学一直都是我们理工类学生学习的一门主要课程, 老师所讲的、学生所练的主要是定义叙述、定理证明、公式推算、计算方法……数学给大家的印象是沿“定义→公理→定理→推论→证明”这么一条演绎道路进行的、一个十分严格的数学推理王国和一个充满美感的抽象世界. 然而, 我们却不知道, 或许也没有想过, 这些如此严密、完整、美妙的结论是怎么得来的呢? 数学家是通过什么样的方式发现它们的呢? 我们从这些可爱的结论本身, 看不到数学家发现它们的艰辛, 也体会不到数学家在发现它们之后的那种喜悦.

数学教育一直强调了形式化的逻辑推导和形式化的结果, 淡化了在科学突破上至关重要的实验、观察、归纳、猜想、验证和创新等能力的培养, 致使我们越来越不明白数学从何而来, 也由于很多方面的原因, 在学完数学以后, 不知道将它用在什么地方. 这也直接让大家感觉到: 充满生机、充满活力、充满美感的数学成了内容多、负担重、枯燥乏味的公式、结论和习题的堆积. 所以, 建议大家应该去读一读中外数学发展史方面的书或文献.

历史的长河源远流长, 而人类文明向前迈进的每一个脚步都离不开工具的发展.

数学,这朵人类文明的奇葩,却往往被视为只需要一张演算纸、一支笔,再加上一个头发很少的脑袋的学科.其实,历史的脚步已经迈入了 21 世纪,有谁还能忍受手工推算和普通计算器运算呢?当数以万计的公式潮水般向我们涌来,以海量著称的数据需要我们处理时,我们是深感疲惫而郁忍于纸笔,还是另求先进的生产工具呢?工欲善其事,必先利其器.

其实,数学是让人感觉愉悦的学科,但我们大部分人正在对它失去兴趣.大家一致认为,繁重的计算和复杂的推理让我们对数学望而生畏、敬而止步,更让我们避而远之的是那一堆奇异的符号和冗长的公式.殊不知,我们确实需要从学习数学中获得知识,然后再应用它.子曰:学而实习之,不亦悦乎?而我们更需要从学习数学的过程中体会到快乐,体会到收获的喜悦和感觉.

人类文明的发展,给我们提供了全新的数学学习基础平台和工具.这也使得快乐的数学学习成为一种可能.不同于传统的数学学习方式,我们不再需要用纸和笔去写、去算,我们用实验的方法和手段,强调以提高动手能力为主的数学学习方式,让自己进一步理解那些符号化的定义、公理和定理.然后体会这些东西背后的数学本质,感受数学的精神,从而明白数学的思想和真谛.最终,如里约热内卢宣言里所讲的那样:用数学去理解整个世界.

那么,大学数学实验是什么呢?为什么本书名叫《大学数学实验基础》呢?长期以来,国内各大高校,很多老师都在思考怎么更好地开展这方面的教学活动.很多同仁认为,数学实验就是将实际问题通过数学的理论和方法转化为数学模型,并进而使用理论分析或科学计算的手段解决问题的过程.也就是说,数学实验最主要的方面是建立数学模型.而对于初学者而言,这是一个十分困难的问题.所以,我们从另一个地方开始,那就是数学实验基础.如果不进行数学实验基础练习,不知道用先进的运算工具来推理计算,这将耗费我们大量的时间和精力在计算上,甚至大部分人会认为这些计算或是推理让自己无能为力;学习了数学实验基础以后,了解了一些通用的函数、方法,将会给我们节约出更多的时间和精力去思考问题、建立模型,从而更快地解决实际问题.我们会用更多的时间去关注问题本身,而不是细节上的计算,也就是说,这是进行后面的数学实验的基础.

大学数学里所学习的线性代数与空间解析几何、一元函数微积分和多元函数微积分是我们进行数学实验的理论基础,反过来说,进行数学实验也是为了更好地理解和应用这些理论.而本书所介绍的,将是理论分析和科学计算的基础.它将改变同学们做数学题的习惯,也试着把大家逐渐引向真正的数学实验.这里,将会引入先进的计算工具和推理工具,即计算机技术和数学软件包.这些工具的应用,为数学的思想与方法注入更多、更广泛的内容.举个简单的例子,小学时,大家认为计算很复杂,“聪明”点的学生会偷偷用计算器代替笔算或心算,这里,大学里的很多知识点的推理和求解,我们同样也可以用类似计算器的东西来计算和求解,这个工具就是数学实验基础重点要介绍的工具.这些工具主要是数学软件,本书主要介绍的是 MATLAB 软件

在大学数学上的一些应用. 通过工具的使用, 我们将会逐渐摆脱那些重复乏味的数学演算和数值计算, 将更多地看到数学作为基础与其他学科进行结合, 从而让我们有更多的时间去思考、去体会、去做一些创造性的工作, 进而我们会慢慢地明白, 大学数学将会有哪些具体的学科应用, 为哪些学科作理论支撑, 从而也让我们对大学数学的学习更具有目的性, 更具有钻研和探索精神.

我们试着让大家将“被教授—记忆—去测试”的学习过程转变为“去观察—凭直觉—再探视—思考—归纳—猜想—证明”的多维学习过程. 我们相信, 学习任何东西, 最好的途径是自己去发现, 而学习本身肯定是一个快乐的过程, 相信大家也这样认为. 对某一知识点, 每每有新的发现和认识, 总让人觉得欣慰, 这也就是学习过程的快乐. 在大学数学实验基础里, 我们自己动手, 用我们已经熟悉的、喜欢“玩”的计算机去尝试发现一些问题, 亲身感受在计算机的帮助下解决问题的酸甜苦辣, 在自己的探索和大家的讨论实践中去体验那条被掩盖已久的数学思维轨迹: 做, 然后知不足!

如前所述, 其实大家已经做过一些实验了, 比如物理实验、化学实验, 以及这里提到的数学实验. 一般来讲, 做实验都有实验仪器、实验设备, 更重要的是有实验的一些理论. 那么我们做数学实验, 所用的工具是什么呢? 这就是计算机和数学软件. 那什么是数学软件呢? 还是来看看也许在小学时大家就已经熟悉的计算器吧, 中学时大家也查过平方根表、对数表、三角函数表等. 这些计算器和图表, 不过是替代了我们认为很难的一些计算. 现在有了计算机以后, 我们不需要查表了, 复杂的运算、基本的初等函数求值, 甚至是逻辑推理和证明, 我们都只需要在计算机上按几个键就可以轻松搞定了. 事实上, 计算机的功能强大到了我们需要认真去学习和理解的程度. 计算器的发明解决了繁琐的基本计算, 而运行在计算机上的数学软件则是一种更高级、更先进的“计算器”, 它不仅能完成计算器能做的事情, 还能做大量的以前只能由人类通过大脑的逻辑思考才能完成的计算, 如分式的运算、多项式的展开、因式分解、多项式方程(组)的求解、微积分的运算等, 甚至能做大量的人类很难实现的工作, 诸如函数图形的绘制、大量重复高强度的逻辑判断等. 大家也肯定知道, 让计算机去做大量重复的运算和劳动时, 它并不会觉得累而且轻而易举就能做到, 但是这些劳动加载到任何一个自然人类身上, 都会让人敬畏. 简单地说, 数学软件就是能帮助人类大脑进行逻辑思考、将问题可视化(图形、数表)的一种“高级计算器”, 数学软件将代替计算器! 而本书中所介绍的实验试题也是将数学软件 MATLAB 作为实验工具来完成的. 数学软件 MATLAB 的功能十分强大, 将会在后面的章节做诸多的介绍和讲解.

说到这里, 也许很多初学者会担心, 那是否需要掌握 MATLAB 后才能做实验呢? 答案是否定的. 这与我们做物理化学实验一样, 我们不需要事先了解实验仪器、实验设备的所有功能, 而只需要用其某些功能、会做具体的某种操作来完成特定的实验的道理是一样的. 难道我们需要知道万用表的构造原理及弄清楚它的内部结构以后才可以去做“万用表测电阻”的实验吗? 事实上, MATLAB 涉及的数学与计算机

知识十分广泛,其工具箱甚至直接涉及大量的前沿性、专业性都很强的科学.命令繁多,要全面掌握需要较长的时间,但若只用来完成高等数学基础部分实验,则大可不必像学习数学、计算机基础课和程序设计课程那样逐字逐句地认真推敲.当然,首先全面了解一下它的功能,大概知道一些相关介绍,做到心中有数是必要的.然后,等需要用到哪一部分时,再仔细学习钻研.这里也很想告诉大家一种学习的心态:先入为主,多看到自己已经会了哪些,而别担心自己哪些还不会.

大家将会学习一些基本的数学实验知识.认真地阅读本书的实例,学习一些具体的操作方法和技巧,这些方法和技巧一般能模仿着使用就够了.遇到查看参考书和使用 Help 仍弄不清楚的问题,大家可以通过实例(做实验)和分解实例(做更小一点的实验)来解决.希望能达到的目的是,借助 MATLAB 来做实验,学习高等数学知识,进一步去理解相关理论,同时也知道,用计算机软件能具体简化哪些学习中的必要步骤.更为重要的是,让大家重新认识高等数学,并在解决实际问题的实验中,学会“观察-猜测-验证-理论-证明”的思考方式,最终能基本掌握初等的数学建模思路和解决实际问题的过程,能在实验的过程中自然地学会 MATLAB 软件提供的一些函数的使用和相关的计算机技术及软件技术.我们做的是一个个细节化、局部化的数学实验,但由此而节约出来的计算时间,将使我们更多地去体会整体上、全局化的数学思想和数学精神!最后,还需要强调的是,用数学软件来完成数学基础实验,也许会让大家认为本质上就是用 MATLAB 程序语言编写程序.既然是编程,它本身是一项细致而深入的工作,需要动脑子、下功夫,更需要多动手去编写、调试和运行,要善于积累和总结.在程序的编写和调试过程中,往往反映出一个人的水平、经验和态度.我们希望大家都足够重视.上机实验的目的决不是为了“验证某一程序的正确性”,而是体会程序里所蕴藏或本身所表现出来的理论知识.

那么,我们在实验课进行的过程中,将学会去设计一些小的实验的方法和步骤.而在实验 1 中,我们首先对 MATLAB 软件和 MATLAB 语言进行介绍.

1.2 音乐和数字

很多人都喜欢音乐,在古希腊,大家认为人们最了不起的贡献就是认识到数学在人类文明中的基础作用.这可以用毕达哥拉斯老前辈的一句话来概括:自然数是万物之母.

毕达哥拉斯学派也许大家都听说过,它研究数学的目的是试图通过揭示数的奥秘来探索宇宙的永恒真理.学派里的成员对周边世界经过周密的观察,发现了数与几何图形的关系、数与音乐的和谐;他们还发现数与天体的运行都有密切关系.他们把整个学习过程分成四大部分:数的绝对理论(即算术)、静止的量(即几何)、运动的量(即天文)和数学应用(即音乐),把这些合起来,称为四艺.

广义地讲,音乐就是任何一种艺术的、令人愉快的、神圣的或其他什么方式排列

起来的声音. 对于音乐的标准定义仍存在着激烈的争议, 但通常可以解释为一系列对于有声、无声具有时间性的组合, 并含有不同音阶的节奏、旋律及发声. 先不讨论它的定义究竟是什么, 我们想要介绍给大家的是, 从毕达哥拉斯时代开始, 人们就认为对音乐的研究本质上是数学的, 音乐和数学密不可分. 有人做过这样的实验: 将两条质料相同的弦水平放置, 使它们绷紧并保持相同的张力, 但长度不同. 使两条弦同时发音, 他们发现如果弦长的比是两个小整数的比, 如 $1:2$ 、 $2:3$ 、 $3:4$ 等, 听起来就和谐、悦耳. 正是基于这种认识, 毕达哥拉斯学派定出了音律.

随着人类文明的进步, 音乐艺术也一直在不断发展. 音乐理论在更新, 音乐功能也在不断地被研究和使用的. 这才有了大家能够享受到的美妙音乐: 从高山流水到春江花月夜、从古老的苏格兰风笛到现在流行的 POP 电子音乐. 这能让大家都看到, 乐器的发展, 使大家享受着国内外不同风格的音乐演奏. 而这里, 要介绍给大家的是用一台多媒体 PC 机来演奏音乐. 大家读到这里, 也许会认为这很容易, 现代的 PC 都是多媒体的, 装上相应的播放器, 然后下载一个如 mp3 类的音乐文件, 就可以播放出音乐. 可是, 大家不要理解错了, 这里是指我们用自己的数据去组织一小段音乐, 然后用一个 MATLAB 下的命令把数据“播放”出来.

1.2.1 两只老虎跑得快

1.2.1.1 音频文件

在 PC 机上, 以 MS-WINDOWS 操作系统为例. 如果安装了声卡及 MS-WINDOWS 的声音驱动程序, 就可以实现声音功能. 下面的例子说明 MATLAB 程序是如何演奏乐曲的.

按音乐原理, 音符分为低音、中音和高音, 其声音特征由每个音符的频率确定. 中音音符有 12 个, 它们依次是

$$1 \quad \#1 \quad 2 \quad \#2 \quad 3 \quad 4 \quad \#4 \quad 5 \quad \#5 \quad 6 \quad \#6 \quad 7$$

其中左上角带 # 号者表示比原音符高一百音分, 简称“升 x”, 如 #4 为升 4 (或降 5; b5). 这 12 个中音音符的频率, 按物理学中振动发音规律, 参考“哆”音的国际标准频率, 可知从 262Hz (即中音“1”, 发音为“哆”) 开始, 依次乘上一个因子 $2^{1/12}$, 如中音“1”的频率为 262, 中音“4”的频率为 $262 \times (2^{1/12})^5$ 等等. 类似地, 低音音符和高音音符的频率也有相同的规律, 如低音“7”的频率为 $262 \times (2^{1/12})^{-1}$, 高音“1”的频率为 $262 \times (2^{1/12})^{12} = 524$.

每个音符的发声过程对应一个正弦声波数据序列

$$y = \sin(2\pi\omega t + \varphi)$$

其中 ω 为相应音符的频率, φ 为相位, 可缺省, t 是时间向量

$$t = 0:1/F_s:T$$

其中 T 为音程 (音符演奏时间的长度, 单位为秒). F_s 是声音驱动程序的采样频率, 说到频率, 简单的理解就是比如单位时间里我们打了几拍子. 常见的时间单位就是秒,

显然,频率和时间都可以描述和修饰快慢.对于 PC 机来说, $F_s=8192\text{Hz}$.可见,任一音符由频率及音程 T ,就可以生成一个声波序列数据 y .MATLAB 的函数 `sound` 将声波数据转化为声音.这样,对于一个确定的声波向量 y ,调用 `sound`,我们就可以听到一个单音符的声音.那么,音程 T 是如何计算的呢?在简谱中,音符的演奏长短是在基本符号的基础上加上增时线、减时线等标志来确定的,如四分音符、八分音符、十六分音符等等.在一般乐曲中,四分音符为 1 拍,演奏时间为 1 秒.八分音符为半拍,演奏时间为 0.5 秒等等.可见每个音符的音程 T 是由其拍节数确定的.

下面是几个具体的示例.

[例 1-1] 单音符 1 的发声程序(演奏时间为 0.5 秒).

我们需要写下面的一个 MATLAB 的程序.一般情况下,程序由注释和程序语言的语句来构成.这里,我们组织如下的一些语句:前面 5 行为注释说明,后面 8 行为 MATLAB 程序语句.构造纯文本的 `ex01_01.m` 的 `m` 文件,与纯文本的 `txt` 文件相比较,只是文件的扩展名不一样罢了.这是因为 MATLAB 软件的文件有一种保存格式为 `m` 文件格式.

```
%文件名称:ex01_01.m
%文件描述:模拟单音符 1 的发声程序.时间 0.5 秒
%作者:fhzheng
%时间:20090713
%版本:V1.0
echo on                %1 设置文本回显命令
clear                  %2 清除工作空间的变量
w=262;                 %3 音符 1(发音:哆)的频率(Hz)
T=0.5;                %4 演奏时间的长短(秒)
Fs=8192;               %5 sample rate 采样频率(Hz)
t=0:1/Fs:T;           %6 音符的时间序列
y=sin(2 * pi * w * t); %7 声波的振幅序列,pi 取自系统默认值
sound(y,Fs);           %8 发声:将声波转化为声音
```

这里,只需要运行这个程序,就可以听到音响发出的“1”的声音.当然,如果你有兴趣来修改一下这个程序,比如我们限制的发音时间是 0.5 秒,你可以改一下这个数据,比如改成 1 秒或更长时间,甚至是改成其他的音符的发音.有心的读者会发现,这里的注释部分里给出了文件与作者的相关信息.当你自己对程序做出了修改时,可以在版本上对程序进行更新,当然,这也需要标注好更新的时间和更新的内容,更为重要的是,在别人的程序上做修改的同时,你可以在文件中加上自己的版权信息,比如修改者:李修改,修改时间:20101010 等.从现在开始,你就知道了 MATLAB 的程序,源代码是公开的.我们可以充分地应用别人的一些已经有了的程序,但也要尊重他们的版权.以修改者的身份对程序进行了改进或变化,要保留

原作者的版权信息.

到这里,再说这是在数学实验基础里看到的第一个例子也许已经很晚了,但它也是第一个用 MATLAB 语言写出来的程序.也许现在对于大家来说,一起读这些程序代码还比较困难.其实,它又有什么困难呢?不是全部都有注释吗?唯一想给大家解释一下的就是最后一个是 sound 函数或是方法的调用,而前面都是数据对变量的赋值.

刚刚也说到, MATLAB 程序的源代码是公开的,这里告诉大家 MATLAB 代码的运行是靠 MATLAB 软件解释器一边解释一边运行的.计算机的编程语言有很多种,有编译型的,比如 C 语言,它的源代码会经过编译之后生成目标代码,再进而生成可执行文件,如 exe 文件等;而还有一些语言是解释型的,这里的 MATLAB 源代码就是解释型的.好吧,毕竟是数学实验基础,关于程序的说明就这么多吧.下面我们可以做一个更复杂一点的程序.既然一个音符可以做出来,我们也可以做一个完整的音阶出来呀.下面创建一个名为 ex01_02.m 的 m 文件.

[例 1-2] 七个中音符(1 2 3 4 5 6 7)的发声程序(各演奏 0.5 秒).

```
%文件名称:ex01_02.m
%文件描述:七个中音符(1 2 3 4 5 6 7)的发声程序.时间各 0.5 秒
%作者:fhzheng
%时间:20090713
%版本:v1.0

echo on                                %1 设置文本回显命令
clear;                                  %2 清除工作空间的变量
w=262;                                   %3 音符 1(发音:哆)的频率(HZ)
T=0.5;                                   %4 演奏时间的长短(秒)
Fs=8192;                                 %5 sample rate 采样频率(HZ)
t=0:1/Fs:T;                              %6 音符的时间序列
y=[];                                     %7 构造声波的振幅序列向量
for i=1:3,                                % 8 for 循环开始,做 i=1,2,3 次
    yy=sin(2 * pi * w * t);              %9 计算个别声波的振幅序列
    y=[y yy];                             %10 加入,构造生成 1 2 3 的声波的振幅序列
                                           向量 y
    w=w * 2^(1/6);                         %11 修改音符
end                                        %12 for 循环结束
w=w/(2^(1/12));                            %13 计算音符 4 的频率
for i=4:7,                                %14 for 循环开始,做 i=4,5,6,7 次
    yy=sin(2 * pi * w * t);              %15 计算个别声波的振幅序列
    y=[y yy];                             %16 加入,进而生成 1 2 3 4 5 6 7 的声波 y
    w=w * 2^(1/6);                         %17 修改音符
```



```
end                                %18 for 循环结束
sound(y,Fs);                       %19 发声:将声波转化为声音
```

纵观整个程序,比刚才多了一些语句,可能现在大家理解上觉得要困难一点的是循环结构.这个知识将在后面的章节里给出详细的介绍,另外一个理解上困难一点的 y 数据的构成.这个涉及矩阵和向量,也是在后面的章节里详细介绍,但这都不影响我们体会用多媒体 PC 机模拟出来的“哆来咪发唆啦唏”发音.

从这两个小的例子可以发现,就这么简单的一段音频播放,会产生大量的数据,比如 $t=0:1/Fs:T$,即产生了 $0,1/8192,2/8192,\dots,4096/8192$,一共有 4097 个数据,构成了一个行向量.虽然数据量大,但可以看出 MATLAB 很从容地处理了,而且处理得非常快.从数学的角度来看,它不过是一个简单的概念,即向量,更通俗的说法是一个行矩阵.试想想,在线性代数中,第一次碰到矩阵和向量的概念时,我们是认为它用来描述什么具体数据吗?当然这只是个例子.下面再来看一段演奏时间更长一些的音频例子.

既然每个音符可以演奏了,时间长短也可以进行演奏控制,下面我们试着演奏一下大家熟知的“两只老虎”的曲子呢.

[例 1-3] 两只老虎.

先说明一下,两只老虎都是从小到大只会哼哼,也只会那么一两句.我的理由是只要音阶我们能够演奏,曲子当然不成问题,但至于演奏出来的效果怎么样,还需要对音符和节拍有很好的把握.先小娱乐一下,已经足够了,所以就按自己的感觉写下下面一段数据.

创建一个文件名为“两只老虎.txt”的文本文件.内容如下:

```
7 8 8 8 9 8 7 8
7 8 8 8 9 8 7 8
9 8 10 8 11 8
9 8 10 8 11 8
```

只演奏出我最熟的

```
“两只老虎,
两只老虎,
跑得快,
跑得快”
```

当然,大家有兴趣可以把它补充完整.节拍上都用一样的演奏节拍,即都用的 8 分音符(不知自己用这个音乐专业上的术语有没有用对).大家也许发现了,8 多次的出现,就是表示这个意思,而 8 前面的那个与之成对的数据,则是音符.下面给出演奏该曲子的程序.

```
%文件名称:ex01_03_01.m
%文件描述:演奏 1234567 程序示例.
```