



新华传媒
XINHUA MEDIA

[重点推荐]

这是一本让你少丢20分的书

找 **准** 你的失分点系列

陈长恩 主编

找准高考数学 失分点



上海交通大学出版社



这是一本让你少丢20分的书

顾问 顾孙长宗

编者 杨家政 方志翔 俞德斌 谌开华 张传新

上海市民进自强进修学院推荐用书



你的失分点系列

陈长恩 主编

找准高考数学 失分点



上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是“找准你的失分点”系列高考辅导丛书。本书主编系上海市特级教师,有多年高考教学经验,围绕高考命题思路,提炼出最易失分的知识点,进行关键解读、精心分析,并提供针对性训练,补缺增漏。内容主要有集合与命题、不等式、函数、三角比、数列、极限、复数与向量、解析几何、立体几何、排列、组合、概率等,希望切实提高分数的考生阅读此书后绝不会失望。

图书在版编目(CIP)数据

找准高考数学失分点/陈长恩主编. —上海:上海交通大学出版社, 2009

(找准你的失分点系列)

ISBN 978-7-313-05993-2

I. 找… II. 陈… III. 数学课—高中—升学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 161033 号

找准高考数学失分点

陈长恩 主编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 韩建民

昆山市亭林印刷有限责任公司印刷 全国新华书店经销

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 11.75 字数: 278 千字

2009 年 9 月第 1 版 2009 年 9 月第 1 次印刷

印数: 1~5030

ISBN 978-7-313-05993-2/G 定价: 20.00 元

版权所有 侵权必究

编者的话

走进书店,铺天盖地的复习资料扑面而来. 高考、高考、还是高考, 题目、题目、还是题目, 名副其实的书山题海! 选择一本好的复习资料宛如大海捞针, “众里寻他千百度, 蓦然回首, 那人却在, 灯火阑珊处”. 一本凝聚了多位富有高考数学教学经验老师的心血、具有全新的视角和权威的素材、让你从别人的错误中吸取教训, 少走歧路, 或不走歧路, 让你在考试中少丢分的参考书已被你悄然捧在了手上.

经过长时间酝酿、构思诞生的这本书选择了一个新颖的切入角度. 不是泛泛的知识点的总结、不是“空空道人”式的方法说教和罗列, 也不是一味强调“应该……不能……”, 而是从考生答题的错误现象入手, 以各章节的基础知识和基本方法为载体, 深入浅出地分析错答的根本原因, 查找知识漏洞和方法缺憾, 寻求正确的解题思路和途径, 形成规范的解题步骤, 得到准确的答案, 环环相扣, 帮助你纠正不良的解题习惯, 实现补缺堵漏的目的.

这本书以具有最高权威的高考试卷为素材, 以新课程标准和考试说明为依据, 以学生的习惯性思维为剖析对象, 以高考答案的生成过程为参照, 由具体在各题中的答案生成之点形成比较系统的解题方法之线, 既解肢经肯綮, 又示全牛, 并辅以精心挑选的针对性训练题, 提高阅读、练习的效率, 力图达到事半功倍的效果.

参加本书编写的老师都有丰富的教学经验, 对高考训练、学生辅导都很有心得, 所以它们的分析针对性强, 详略得当. 也许, 你跟这些老师无缘相识, 今天, 读他们为大家精心编写的文字也就是有缘相识了. 还犹豫什么? 翻过这页, 开始读书吧.

目 录

第一章 集合与命题	1
一、考纲导读	1
二、点击失分点	2
三、针对训练	8
四、参考答案	9
第二章 不等式	12
一、考纲导读	12
二、点击失分点	14
三、针对训练	20
四、参考答案	22
第三章 函数的性质与基本初等函数	27
一、考纲导读	27
二、点击失分点	29
三、针对训练	39
四、参考答案	42
第四章 三角比与三角函数	48
一、考纲导读	48
二、点击失分点	51
三、针对训练	60
四、参考答案	61
第五章 数列、极限与数学归纳法	65
一、考纲导读	65
二、点击失分点	67
三、针对训练	76
四、参考答案	78
第六章 复数与向量	84
一、考纲导读	84

目录
CONTENTS

二、点击失分点	86
三、针对训练	95
四、参考答案	96
第七章 解析几何	99
直线与圆	99
一、考纲导读	99
二、点击失分点	100
三、针对训练	107
四、参考答案	108
二次曲线	111
一、考纲导读	111
二、点击失分点	112
三、针对训练	124
四、参考答案	126
极坐标与参数方程和线性规划	131
一、考纲导读	131
二、点击失分点	132
三、针对训练	138
四、参考答案	140
第八章 立体几何	143
一、考纲导读	143
二、点击失分点	145
三、针对训练	150
四、参考答案	153
第九章 排列、组合、二项式定理	158
一、考纲导读	158
二、点击失分点	159
三、针对训练	162
四、参考答案	164
第十章 概率、统计、算法、矩阵、行列式初步	166
一、考纲导读	166
二、点击失分点	167
三、针对训练	174
四、参考答案	177

目录
CONTENTS

第一章 集合与命题



一、考纲导读

考纲中对《集合与命题》部分的考查内容和要求见下表：

内 容	要 求		
	记忆性水平	解释性理解水平	探究性理解水平
集合及其表示	知道集合的意义,会对集合的意义进行描述,认识一些特殊集合的符号	懂得元素及其与集合的关系符号,初步掌握基本的集合语言	会用“列举法”和“描述法”表示集合,体会数学抽象的意义,掌握用区间表示集合的方法
子集		理解集合间的包含关系	掌握子集的概念,能用集合语言表述和解决一些简单的实际问题
交集,并集,补集	知道有关集合的基本运算性质		掌握集合的“交”、“并”、“补”等运算
命题的四种形式	了解一些基本的逻辑关系及其运用,了解集合与命题之间的关系,体会逻辑语言在数学表达和论证中的作用	理解逆命题、否命题、逆否命题,明确命题的四种形式及其相互关系,建立命题与集合间的联系,领会分类、判断、推理的思想方法	
充分条件,必要条件,充分必要条件		理解充分条件,必要条件,充分必要条件的意义,能在简单的问题情境中判断条件的充分性、必要性或充分必要性	
子集与推出关系	知道子集与推出关系之间的联系	初步体会利用集合知识理解逻辑关系	

表中“记忆性水平”是指：能识别或记住有关的数学事实和材料,使之再认或再现,能在标准的情境中作简单的套用,或按照示例进行模仿.

“解释性理解水平”是指：明了知识的来龙去脉,领会知识的本质,能用自已的语言或转换

方式正确表达知识内容;在一定的变式情景中能区分知识的本质属性与非本质属性,会把简单变式转换为标准式,并解决有关的问题.

“探究性理解水平”是指:能把握知识的本质及其内容、形式的变化;能从实际问题中抽象出数学模型或作归纳假设进行探索,能把具体现象上升为本质联系,从而解决问题;会对数学内容进行扩展或对数学问题进行延伸,会对解决问题的过程的合理性、完整性、简洁性作有效的思考.

本章是高中数学的开篇内容,其认识层次、抽象程度和思维力度上较初中都有比较大的飞跃,根据考纲对本学科考试认识水平进行的解释和对本章考查内容和要求的界定,本章的复习中要注意以下几个问题:

1. 集合作为一种数学语言,用以表达一定范围或具有某些特性的元素,例如,方程(组)、不等式(组)的解集、数集、点集、图形的集合、向量的集合、函数的集合等,要注意集合语言与其他各种数学语言形态的转化、互译,便于我们在更广阔的思维领域里寻找解决问题的途径.

2. 集合概念中元素的确定性、互异性和无序性是判断给定对象能否构成集合的重要依据,解题时通常渗透着方程的思想,但通过条件求出的参数值使得集合中有重复的元素时应予以排除.

3. 列举法、描述法是集合的两种重要表示方法,其实列举法隐含着重要的枚举的思想,而描述法则倾向于将对象的共性加以描述,更具有抽象的特征,其中的代表元素所指代的对象就是我们要研究的对象,读懂这种特征是解决有关数学问题的重要保证.

4. 反映集合与集合关系的一系列概念,都是用元素与集合的关系来定义的. 因此判断集合与集合之间的关系的本质是判断元素与集合间的关系,而包含关系的传递性,也是推理的重要依据,韦恩图和数轴是解决这类问题的重要工具. 同时注意空集的特殊性和特殊作用,空集是一个特殊的重要集合,它不含任何元素,是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集,当条件中出现 $B \subseteq A$ 等条件时不能遗漏 $B = \emptyset$.

5. 集合的运算是逻辑运算,其连接词是“或(并)”、“且(交)”、“非(补)”. 解题时利用这种思想有时候可以起到反难为易的作用,如两个命题有且仅有一个成立,至少有一个成立,至少一个不成立等问题都可以利用这种思想.

6. 四种命题形式及其相互关系是理解和解决数学问题的根本,通常我们为了解决问题可以先将问题转化为与之等价的形式,以寻找更简洁、快速的解题途径,这种转化可以是不同命题形式的转化,也可以是不同语言形态之间的转化,在数学中称之为化归的思想,即化难为易,化虚为实,化生为熟,化未知为已知.

7. 充要条件的判断问题通常要以本学科内其他的知识为载体,不等式的性质、各种数学概念、定理、公式等及其适用条件常出现在考题中,对这些对象细致入微的体会,不成立时反例的积累是快速、准确答题的保证. 充分条件、充要条件和必要条件之间的包含关系,集合的包含关系和命题的推出关系的联系能帮助快速找到和写出某个命题成立的充分条件或必要条件.



二、点击失分点

【例1】(2008 上海理文2)若集合 $A = \{x | x \leq 2\}$, $B = \{x | x \geq a\}$ 满足 $A \cap B = \{2\}$, 则实数 $a =$ _____.

(2009 上海理文 2) 已知集合 $A = \{x | x \leq 1\}$, $B = \{x | x \geq a\}$, 且 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

命题意图

这两题都属于基本概念和基本运算考查题, 考查集合的基本概念及基本运算, 本质上是集合运算的“逆向”问题, 属于容易题.

正确题解

(2008 上海理文 2) 依题意, 集合 A 与集合 B 中有且仅有一个公共元素 2. 若 $a > 2$, 则 $A \cap B = \emptyset$, 不合题意; 若 $a < 2$, 则 $A \cap B = \{x | a \leq x \leq 2\}$, 也不合题意; $\therefore a = 2$.

(2009 上海理文 2) 依题意, 要使 $A \cup B = \mathbf{R}$, 必须且只需 $a \leq 1$ (见图 1-1).

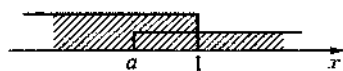


图 1-1

解读失分点

失分点: 这两题都相当基础, 知识点的考查比较单纯, 对集合语言的理解要求也不高, 绝大部分考生没有问题. 个别考生的问题出在怀疑题目的难度或笔误上, 因为怀疑, 所以想得有些复杂, 以至于耽误了解题的时间, 影响解题速度. 第二个问题的错误主要出现在等号的取舍. 防错原则是: 稳定自己的情绪, 相信自己能答好这类题, 不粗心、不笔误, 能得的分要一分不少地拿回来.

【例 2】 (2009 上海理 15) “ $-2 \leq a \leq 2$ ” 是 “实系数一元二次方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 有虚根” 的 ()

- A. 必要不充分条件
- B. 充分不必要条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

命题意图

本题属于基本概念、基本运算考查题, 考查实系数一元二次方程虚根的存在条件及充要条件的概念和判断, 属于容易题.

正确题解

实系数一元二次方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 有虚根的充要条件是 $a^2 - 4 < 0$, 即 $-2 < a < 2$, 而 $(-2, 2) \subset [-2, 2]$, 所以 “ $-2 \leq a \leq 2$ ” 是 “实系数一元二次方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 有虚根” 的必要不充分条件.

解读失分点

失分点 1: 本题相当基础, 错误不多, 这些少量的错误来源于一些考生将包含关系搞反了, 判断出 “充分不必要条件” 的结论, 也有的考生误将有虚根看成有实根, 得出 “既不充分也不必要条件” 的结论.

失分点 2: 对充要条件与子集的关系理解不透. 事实上, 设某结论成立的充分条件构

图 1-2

- 【例3】(2008上海理13)给定空间中的直线 l 及平面 α ,条件“直线 l 与平面 α 内无数条直线都垂直”是“直线 l 与平面 α 垂直”的()条件.

命题意图

本题属于基本概念考查题,考查空间中直线与平面垂直的概念和判定,同时考查充要条件的概念和判断,属于容易题.

正确题解

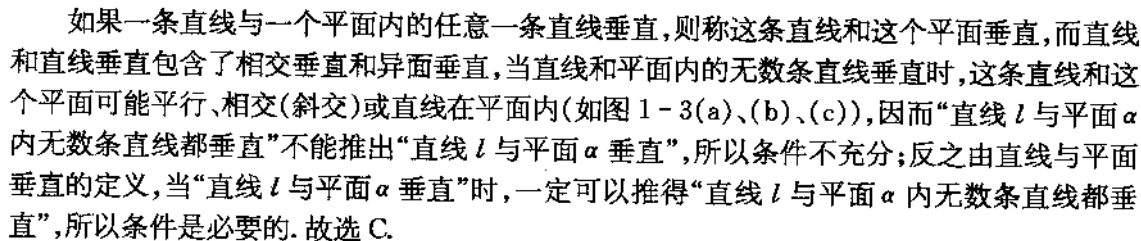


图 1-3

解读失分点

失分点 1: 混淆“任意一条直线”和“无数条直线”的概念,“任意一条直线”包括每一条直线,也就是说指所有的直线;而“无数条直线”可以是指所有直线中的一部分. 准确把握这两个概念是正确解答这类题目的关键.

失分点 2: 分不清“条件”和“结论”. 在充要条件的判断中, 区别“条件”和“结论”是前提, 其本质是“原命题”和“逆命题”的正误判断问题, 一般叙述方式有两种, 其一是: “A 成立的 $\times\times\times$ 条件是 B”; 其二是 “A 是 B 成立的 $\times\times\times$ 条件”. 其中前者 B 是条件, A 是结论, 而后者正好相反, A 是条件, B 是结论.

失分点 3: 在“数量”和“质量”上有错误的认识. 直线与平面的判定定理说的是“如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线和这个平面垂直”, 这里的关键词是“两条”和“相交”, 它们同等重要, 但有的考生就错在认为既然有两条就可以了, 那么无数条当然没问题, 因此在模糊的认识下产生了错误.

【例 4】 (2007 上海理 10) 在平面上, 两条直线的位置关系有相交、平行、重合三种. 已知 α, β 是两个相交平面, 空间两条直线 l_1, l_2 在 α 内的射影是直线 s_1, s_2 , l_1, l_2 在 β 内的射影是直线 t_1, t_2 . 用 s_1 与 s_2, t_1 与 t_2 的位置关系, 写出一个总能确定 l_1 与 l_2 是异面直线的充分条件: _____.

命题意图

本题考查空间直线和平面的位置关系, 异面直线的概念和判定, 也是一道根据结论写出条件的开放题, 属于难题.

正确题解

两条异面直线在同一个平面内的射影是两条平行直线、相交直线或一条直线和这条直线外一点. 由于平面 α, β 是两个相交平面, 所以这两条直线在这两个平面内的射影不可能是同一种位置关系, 只要选择两种不同的位置关系即可 (本题中由于射影都是直线, 故不可能有“一点一线”这种情况), 如 $s_1 \parallel s_2$, 并且 t_1 与 t_2 相交; 又如: $t_1 \parallel t_2$, 并且 s_1 与 s_2 相交.

解读失分点

失分点 1: 对异面直线 m, n 在一个平面 α 内的射影的位置关系认识不足, 空间概念薄弱. 当分别经过两条异面直线 m, n 中的一条, 且互相平行的两个平面 β, γ 与平面 α 垂直时, 这两条异面直线 m, n 在平面 α 内的射影是两条平行直线 m', n' (见图 1-4(a)); 当两条异面直线 m, n 中的一条 (如 n) 垂直于这个平面 α 时, 这两条异面直线在这个平面内的射影是一条直线 m' 和这条直线外一点 B (见图 1-4(b)); 其余情况下两条异面直线 m, n 在平面 α 内的射影是两条相交直线 (见图 1-4(c)).

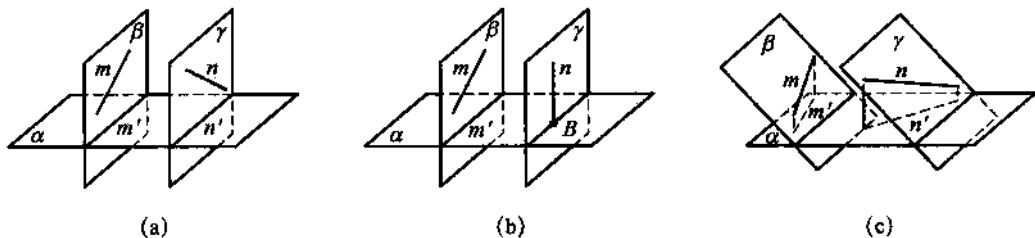


图 1-4

失分点 2: 表达不清. 有些考生虽然理解上述三种情况和充要条件与子集的关系, 但不知该如何叙述, 事实上是对空间位置关系的相互转化不熟练, 特别是要将射影的位置关系逆向转化为原直线的位置关系需要较强的空间想象能力和逻辑推理能力. 有些考生将两个平面内的射影的位置关系都叙述成“相交”, 殊不知此时原直线的位置关系也可能是相交, 故不是结论成立的充分条件.

【例5】(2006 上海理 20)在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 与抛物线 $y^2 = 2x$ 相交于 A, B 两点.

- (1) 求证:“如果直线 l 过点 $T(3, 0)$, 那么 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$ ”是真命题;
- (2) 写出(1)中命题的逆命题,判断它是真命题还是假命题,并说明理由.

命题意图

本题考查直线与圆锥曲线的关系,命题的四种形式及判断,属于中等难度题.

正确题解

(1) 设过点 $T(3, 0)$ 的直线 l 交抛物线 $y^2 = 2x$ 于点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 当直线 l 的斜率不存在时, 直线 l 的方程为 $x = 3$, 此时直线 l 与抛物线相交于点 $A(3, \sqrt{6}), B(3, -\sqrt{6})$,
 $\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$;

当直线 l 的斜率存在时, 设直线 l 的方程为 $y = k(x - 3)$, 其中 $k \neq 0$,

$$\text{由 } \begin{cases} y^2 = 2x \\ y = k(x - 3) \end{cases}, \text{ 得 } ky^2 - 2y - 6k = 0 \Rightarrow y_1 y_2 = -6,$$

$$\text{又 } \because x_1 = \frac{1}{2}y_1^2, x_2 = \frac{1}{2}y_2^2,$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{1}{4}(y_1 y_2)^2 + y_1 y_2 = 3,$$

综上所述, 命题“如果直线 l 过点 $T(3, 0)$, 那么 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$ ”是真命题.

(2) 逆命题是: 设直线 l 交抛物线 $y^2 = 2x$ 于 A, B 两点, 如果 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$, 那么该直线过点 $T(3, 0)$. 该命题是假命题.

例如: 取抛物线上的点 $A(2, 2), B\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 此时 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$,

直线 AB 的方程为: $y = \frac{2}{3}(x + 1)$, 而 $T(3, 0)$ 不在直线 AB 上.

解读失分点

失分点 1: 一些考生不考虑直线斜率不存在的情况, 直接利用斜率 k 设出直线的方程, 实际上是对直线斜率的概念理解不透, 直线斜率的本质是直线倾斜角的正切值, 而当倾斜角为 90° 时, 直线的斜率不存在, 解题时要注意分门别类加以考虑.

失分点 2: 逆命题的叙述不清, 一些考生在叙述逆命题时漏掉题干中的大前提, 这是平时解题的不良习惯造成的, 以为题目中有的条件在解题过程中可以不体现, 带来的后果就是解题过程不严密, 甚至会漏掉一些已知条件, 以至于“会而不对”. 有些考生甚至加入了否定词, 逆命题本身就写错了.

失分点 3: 否定命题时没有举反例的意识, 这是本题失误最多的地方. 不少考生在否定逆命题时从正面考虑, 说不清、道不明, 叙述混乱. 事实上, 由抛物线 $y^2 = 2x$ 上的点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$, 可得 $y_1 y_2 = -6$, 或 $y_1 y_2 = 2$, 如果 $y_1 y_2 = -6$, 则

直线 AB 过点 $(3, 0)$; 如果 $y_1 y_2 = 2$, 则直线 AB 过点 $(-1, 0)$, 而不过点 $(3, 0)$. 树立举反例的意识, 掌握举反例的方法是否定命题的重要手段, 而反例往往从特殊情况中产生, 因此对每个概念的理解和掌握都要细致入微. 如命题: “ $f(0) = 0$ 是函数 $f(x)$ 为奇函数的必要不充分条件” 是假命题, 反例是: $f(x) = \frac{1}{x}$, 可见 “ $f(0) = 0$ ” 与 “函数 $f(x)$ 为奇函数” 没有必然的联系, 因此是既不充分也不必要的条件, 当且仅当函数 $f(x)$ 为奇函数, 且在 $x = 0$ 处有意义时, $f(0) = 0$ 才成立.

【例 6】 (2005 上海理 14) 已知集合 $M = \{x \mid |x-1| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $P = \{x \mid \frac{5}{x+1} \geq 1, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $M \cap P$ 等于 ()

- A. $\{x \mid 0 < x \leq 3, x \in \mathbf{Z}\}$ B. $\{x \mid 0 \leq x \leq 3, x \in \mathbf{Z}\}$
C. $\{x \mid -1 \leq x \leq 0, x \in \mathbf{Z}\}$ D. $\{x \mid -1 \leq x < 0, x \in \mathbf{Z}\}$

命题意图

本题属于基本概念和基本运算考查题, 考查集合的基本概念及基本运算, 同时考查绝对值不等式和分式不等式的解法, 属于容易题.

正确题解

依题意, 集合 $M = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
 $\therefore M \cap P = \{0, 1, 2, 3\}$, 故选 B.

解读失分点

失分点 1: 化简集合时不等式的性质用错. 这是因为对不等式的性质理解有问题, 把不等式的变形等同于恒等式的变形. 如化简集合 P 时, 将不等式 $\frac{5}{x+1} \geq 1$ 的两边同乘以 $x+1$, 结果化为 $P = \{x \mid x \leq 4, x \in \mathbf{Z}\}$, 选出了含有 -1 的选项. 事实上通常分式不等式的解法是移项、通分, 然后整式化后求解, 特别注意整式化的过程中, 分母不得为零.

失分点 2: 解题过程的复杂化导致思维混乱, 在紧张的环境中产生错误. 如有些考生化简集合 A 时将不等式的两边平方, 或漏掉等号等等, 这种错误不在少数. 事实上根据选择所提供的信息, 只要将 0 和 -1 分别代入到两个集合中进行验证, 成立者保留, 不成立者排除即可, 这也是解选择题的重要方法, 可以提高选择题的解题速度和准确率, 同时避免了将选择题当解答题解带来的繁琐运算, 收到事半功倍的效果.

【例 7】 (2005 上海文 15) 条件甲: “ $a > 1$ ” 是条件乙: “ $a > \sqrt{a}$ ” 的 ()

- A. 既不充分也不必要条件 B. 充要条件
C. 充分不必要条件 D. 必要不充分条件

命题意图

本题考查命题与推出关系、充要条件的判断和不等式的性质, 属于容易题.

正确题解

若 $a > 1$, 则 $a^2 > a > 1$, $\therefore a > \sqrt{a}$, 即条件是充分的;

若 $a > \sqrt{a}$, $\therefore \sqrt{a} \geq 0$, $\therefore a^2 > a \geq 0$, 解得 $a > 1$, 即条件是必要的, 故选 B.

解读失分点

失分点: 本题的错误主要体现在利用不等式的性质进行推理的过程, 在不等式的性质中, 乘方和开方的条件都需要不等式两边非负, 这是不少学生注意不到的地方, 其实是思维漏洞所在, 诸如若 $a > b$, 且 $ab > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; 若 $a > b$, 且 $ab < 0$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 不等式成立的条件要引起足够的重视, 因为不等式的性质可以说贯穿于整个高中数学知识中.



三、针对训练

- 命题“若 $a > b$, 则 $2^a > 2^b - 1$ ”的否命题为_____.
- 已知集合 $A = \{-1, 3, 2^m - 1\}$, $B = \{3, m^2\}$. 则满足 $B \subseteq A$ 的实数 m 的个数为_____.
- 设 A, B 是全集 U 的两个子集, 则“ $A \subseteq B$ ”是“ $\complement_U A \cup B = U$ ”的_____条件.
- 满足 $M \subseteq \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 且 $M \cap \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\}$ 的集合 M 有_____个.
- 关于函数 $f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($x \in \mathbf{R}$), 有下列命题: ① 由 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 可得 $x_1 - x_2$ 必是 π 的整数倍; ② $y = f(x)$ 的表达式可改写为 $y = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; ③ $y = f(x)$ 的图像关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称; ④ $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = -\frac{\pi}{6}$ 对称. 其中正确的命题的序号是_____. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)
- 把下面不完整的命题补充完整, 并使之成为真命题: 若函数 $f(x) = 3 + \log_2 x$ 的图像与 $g(x)$ 的图像关于_____对称, 则函数 $g(x) =$ _____. (注: 填上你认为可以成为真命题的一种情形即可, 不必考虑所有可能的情形)
- 非空集合 G 关于运算 $\oplus$ 满足: (1) 对任意的 $a, b \in G$, 都有 $a \oplus b \in G$; (2) 存在 $e \in G$, 使得对一切 $a \in G$, 都有 $a \oplus e = e \oplus a = a$, 则称 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”. 现给出下列集合和运算: ① $G = \mathbf{N}$, $\oplus$ 为整数的加法; ② $G = \{\text{偶数}\}$, $\oplus$ 为整数的乘法; ③ $G = \{\text{平面向量}\}$, $\oplus$ 为平面向量的加法; ④ $G = \{\text{二次三项式}\}$, $\oplus$ 为多项式的加法; ⑤ $G = \{\text{虚数}\}$, $\oplus$ 为复数的乘法. 其中 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”的是_____. (写出所有“融洽集”的序号)
- 设 $f(n) = 2n + 1$ ($n \in \mathbf{N}$), $I = \mathbf{N}$, $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Q = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, 记 $A = \{n \mid f(n) \in P, n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{n \mid f(n) \in Q, n \in \mathbf{N}\}$, 则 $(A \cap \complement_I B) \cup (B \cap \complement_I A) =$ ()
A. $\{0, 3\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{1, 2, 6, 7\}$
- 对任意实数 a, b, c , 给出下列命题: ① “ $a = b$ ”是“ $ac = bc$ ”的充要条件; ② “ $a + 5$ 是无

理数”是“ a 是无理数”的充要条件;③“ $a > b$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的充分条件;④“ $a < 5$ ”是“ $a < 3$ ”的必要条件.其中真命题的个数是()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. 集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-1}{x+1} < 0 \right\}$, $B = \{ x \mid |x-b| < a \}$, 若“ $a=1$ ”是“ $A \cap B \neq \emptyset$ ”的充分条件, 则实数 b 的取值范围是()

- A. $-2 \leq b < 0$ B. $0 < b \leq 2$
C. $-3 < b < -1$ D. $-2 < b < 2$

11. “ $m = \frac{1}{2}$ ”是“直线 $(m+2)x + 3my + 1 = 0$ 与直线 $(m-2)x + (m+2)y - 3 = 0$ 相互垂直”的()

- A. 充要条件 B. 充分不必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

12. 命题“若函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内是减函数, 则 $\log_a 2 < 0$ ”的逆否命题是()

- A. 若 $\log_a 2 \geq 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内不是减函数
B. 若 $\log_a 2 < 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内不是减函数
C. 若 $\log_a 2 \geq 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内是减函数
D. 若 $\log_a 2 < 0$, 则函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在其定义域内是减函数

13. 若非空集合 A, B, C 满足 $A \cup B = C$, 且 B 不是 A 的子集, 则()

- A. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的充分条件但不是必要条件
B. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的必要条件但不是充分条件
C. “ $x \in C$ ”是“ $x \in A$ ”的充要条件
D. “ $x \in C$ ”既不是“ $x \in A$ ”的充分条件也不是“ $x \in A$ ”的必要条件

14. $A = \{ x \mid x^2 - 2ax - 8 < 0 \}$, $B = \{ x \mid |x-a| < |a-1| \}$, 若 $A \cap B = B$, 求实数 a 的取值范围.

15. 已知非空集合 $A = \{ x \mid x^2 + px + q = 0, x \in \mathbf{R} \}$, $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$, $C = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, 且 $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = A$, 求 $p+q$ 的值.

16. 已知 $c > 0$, 设 P : 函数 $y = c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减; Q : 不等式 $x + |x-2c| > 1$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 如果命题 P 和 Q 有且仅有一个正确, 求 c 的取值范围.



四、参考答案

1. 若 $a \leq b$, 则 $2^a \leq 2^b - 1$

2. 3

解题分析: 依题意, $B \subseteq A$, 则 $m^2 = 2^m - 1$ ($\because m \in \mathbf{R}, \therefore m^2 = -1$ 不可能; 由集合中元素的互异性知 $m^2 = 3$ 不可能), 在同一坐标系中作出函数 $y = m^2 + 1$ 和 $y = 2^m$ 的图像 (见图 1-5), 由图可知, 两函数的图像有三个不同的交点, 故满足条件的实数 m 有 3 个.

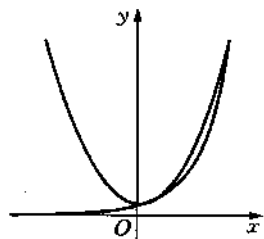


图 1-5

3. 充分非必要条件

解题分析: 依题意, 由图 1-6 可知, 当 $A \subsetneq B$ 时, $\complement_U A \cup B = U$ 显然成立, 所以充分性成立; 当 $\complement_U A \cup B = U$ 时, $A \subsetneq B$ 和 $A = B$ 均可能成立, 所以必要性不成立.

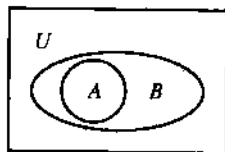


图 1-6

4. 2

解题分析: 依题意, $M = \{a_1, a_2\}$ 或 $M = \{a_1, a_2, a_4\}$.

5. ②③

解题分析: ① 由 $f(x_1) = f(x_2) = 0$ 得 $2x_1 + \frac{\pi}{3} = k_1\pi$, $2x_2 + \frac{\pi}{3} = k_2\pi$ ($k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$),

$\therefore x_1 - x_2 = \frac{k_1 - k_2}{2}\pi$, 从而 $k_1 = 1$, $k_2 = 0$ 时, 命题不成立;

② $f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 命题成立;

③ $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4\sin\left[2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 0$, $\therefore$ 命题成立;

由③知, ④不成立.

6. 解题分析: ① x 轴; $g(x) = -3 - \log_2 x$; ② y 轴; $g(x) = 3 + \log_2(-x)$;

③ 原点; $g(x) = -3 - \log_2(-x)$; ④ $y = x$; $g(x) = 2^{x-3}$; 等等.

7. ①③

解题分析: ① 设 $m, n \in \mathbb{N}$, 则 $m \oplus n = m + n \in \mathbb{N}$, 且 $0 + m = m + 0 = m$, $\therefore G = \mathbb{N}$ 关于整数的加法为“融洽集”; ② 设 m 是任意偶数, 若存在偶数 e , 使得 $m \oplus e = e \oplus m = m$, 即 $me = em = m$, 于是 $m = 0$ 或 $e = 1$, $m = 0$ 与 m 的任意性矛盾, $e = 1$ 与 e 为偶数矛盾, 故 $G = \{\text{偶数}\}$ 关于整数的乘法不为“融洽集”; ③ 因为向量加向量还是向量, 且对于任意向量 $\vec{a}$, 都有 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, $\therefore G = \{\text{平面向量}\}$ 关于平面向量的加法是“融洽集”; ④ 设 $a = x^2 + 1$, $b = -x^2 + 2$, 则 $a + b = 3$, 不是二次三项式, $\therefore G = \{\text{二次三项式}\}$ 关于多项式的加法不是“融洽集”; ⑤ 设 $a = 1 + i$, $b = 1 - i$, 则 $a \cdot b = 2$, 不是虚数, $\therefore G = \{\text{虚数}\}$ 关于复数的乘法不是“融洽集”.

8. A

解题分析: 依题意, $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $\therefore (A \cap \complement_U B) \cup (B \cap \complement_U A) = \{0, 3\}$.

9. B

解题分析: ① $2 \times 0 = 3 \times 0$ 成立, 但 $2 \neq 3$, 所以命题错误; ② 反证法, 假设 a 是有理数, 不妨设 $a = \frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, m, n 互质), 则 $a + 5 = \frac{m}{n} + 5 = \frac{m + 5n}{n}$ 是有理数, 与 $a + 5$ 是无理数矛盾; 反之亦然, 所以命题成立; ③ $-3 < -2$, 但 $(-3)^2 > (-2)^2$, 所以命题错误; ④ $a \geq 5 \Rightarrow a \geq 3$, 所以必要性成立.

10. D

解题分析: 依题意, $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | b-1 < x < b+1\}$, 当 $A \cap B \neq \emptyset$ 时, $b+1 \leq -1$ 或 $b-1 \geq 1$, 解得 $b \leq -2$, 或 $b \geq 2$,

$\therefore A \cap B \neq \emptyset$ 时, $-2 < b < 2$, 故选 D.

11. B

解题分析: 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, 直线 $(m+2)x + 3my + 1 = 0$ 与直线 $(m-2)x + (m+2)y - 3 = 0$ 垂直, 所以条件充分, 但当 $m = -2$ 时, 这两直线也垂直, 所以条件不必要.

12. A

解题分析: “小于”的否定词是“不小于”即“大于或等于”; “是”的否定词是“不是”.

13. B

解题分析: $A \cup B = C$, 且 B 不是 A 的子集, $\therefore A \subsetneq C$. 故 $x \in A \Rightarrow x \in C$; $x \in C \not\Rightarrow x \in A$.

14. $a \geq -\frac{7}{2}$

解题分析: 如图 1-7 所示: $A = \{x \mid (x-a)^2 \leq a^2 + 8\}$;

$B = \{x \mid (x-a)^2 \leq (a-1)^2\}$,

$\therefore A \cap B = B$, 即 $B \subseteq A$,

$\therefore (a-1)^2 \leq a^2 + 8$, 解得 $a \geq -\frac{7}{2}$.

15. $p+q=0$ 或 2 或 8

解题分析: 依题意, $A = \{2\}$, 或 $A = \{4\}$, 或 $A = \{2, 4\}$.

若 $A = \{2\}$, 则 $p = -4$, $q = 4$, $p+q = 0$;

若 $A = \{4\}$, 则 $p = -8$, $q = 16$, $p+q = 8$;

若 $A = \{2, 4\}$, 则 $p = -6$, $q = 8$, $p+q = 2$.

16. $\{c \mid 0 < c \leq \frac{1}{2}, \text{ 或 } c \geq 1\}$

解题分析: 设命题 P, Q 成立的 c 的取值范围分别为 P, Q ,

$\therefore$ 函数 $y = c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, $\therefore P = \{c \mid 0 < c < 1\}$;

在同一坐标系内作出函数 $y = |x - 2c|$ 和 $y = 1 - x$ 的图像, 由图 1-8 可知,

不等式 $x + |x - 2c| > 1$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则 $2c > 1$, 即 $Q = \{c \mid c > \frac{1}{2}\}$, 又命题 P 和 Q 有且仅有一个正确,

$\therefore (P \cap \complement_{\mathbf{R}} Q) \cup (Q \cap \complement_{\mathbf{R}} P) = \{c \mid 0 < c \leq \frac{1}{2}, \text{ 或 } c \geq 1\}$.

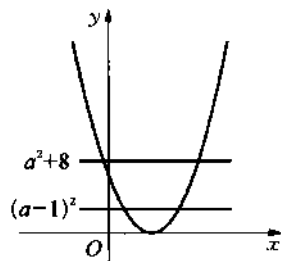


图 1-7

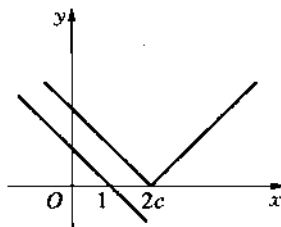


图 1-8