普通高等教育“十一五”国家级规划教材
高职高专公共基础课规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

（下）

张圣勤　主编

教师免费下载
www.cmpedu.com

赠电子课件

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
高职高专公共基础课规划教材

高 等 数 学

（下）

主　　编　张圣勤
本册主编　吕保献　聂　华
副 主 编　高汝林　杨晓冬
参　　编　黄勇林　姜玉娟　孟祥清　龙辉平
　　　　　陈　娜　赵宁军　徐秀艳
　　　　　晁世萍　李海洋　徐　燕
主　　审　解学祖

机 械 工 业 出 版 社

本书共分上、下两册，本册为下册. 内容包括空间解析几何，多元函数微积分初步，无穷级数，线性代数，概率，数理统计初步，数学实验——MATLAB 在数学中的应用(二).

本书可作为二年制或三年制工科类高职高专院校的教材，也可作为成人教育或自学考试用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下/张圣勤主编. —北京：机械工业出版社，2009.12

普通高等教育“十一五”国家级规划教材. 高职高专公共基础课规划教材

ISBN 978-7-111-28983-8

Ⅰ. 高… Ⅱ. 张… Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 200410 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑：李大国 责任编辑：李大国 责任校对：陈延翔
封面设计：王伟光 责任印制：李 妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2010 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm · 19.25 印张 · 371 千字
0001—4000 册
标准书号：ISBN 978-7-111-28983-8
定价：28.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	门户网：http://www.cmpbook.com
销 售 一 部：(010)68326294	教材网：http://www.cmpedu.com
销 售 二 部：(010)88379649	
读者服务部：(010)68993821	封面无防伪标均为盗版

前　　言

本书是根据教育部制定的三年制高等职业教育数学教学大纲和教学基本要求，组织机械行业部分高等职业技术院校长期从事高职数学教学的资深教师编写而成的. 本书可作为二年制或三年制工科类高职高专院校的教材，也可作为成人教育或自学考试用书.

在本书的编写过程中，以为我国的制造业逐步构建一套适合于高职高专教育的公共课程体系为指导思想，以“符合大纲要求，加强实际应用，增加知识容量，优化结构体系”为原则，以新世纪社会主义市场经济形势下制造业对人才素质的要求为前提，以高等数学在高职高专教育中的功能定位和作用为基础，在内容上删去了一些繁琐的推理和证明，与传统数学教材相比，增加了一些实际应用的内容，力求把数学内容讲得简单易懂，重点让学生接受高等数学的思想方法和思维习惯；在习题的编排上照顾到各专业的特点，力求做到习题难易搭配适当，知识与应用结合紧密，掌握理论与培养能力相得益彰；在结构的处理上注意与现行高中及中职教学内容的衔接，同时注意吸收国内外高职高专教材的优点，并照顾到机械行业高职高专各专业的特点和需要，适当精简结构，使之更趋合理. 为适应当今计算机应用的发展和大学生参加数学建模的需要，本书特意增加了 MATLAB 数学实验.

本书共分上、下两册，本册为下册. 内容包括空间解析几何，多元函数微积分初步，无穷级数，线性代数，概率，数理统计初步，数学实验——MATLAB 在数学中的应用(二).

本书配有全套的标准化教案、教学用 PPT 格式的课件，以及一套完整的数学教学辅助网站. 选用本书的教师可登录机械工业出版社教材服务网 www. cmpedu. com 下载，或发送电子邮件至 cmpgaozhi@ sina. com 索取. 咨询电话：010-88379375.

本套书由上海电机学院张圣勤担任主编，负责策划并最后统稿. 其中，本册由河南工业职业技术学院吕保献、新疆机电职业技术学院聂华担任主编，陕西工业职业技术学院高汝林、哈尔滨职业技术学院杨晓冬担任副主编. 参加编写的老师还有：云南机电职业技术学院黄勇林、陈娜，河南工业职业

技术学院李海洋，唐山科技职业技术学院孟祥清、晁世萍，新疆机电职业技术学院徐燕，湖南工业职业技术学院龙辉平，哈尔滨职业技术学院姜玉娟、徐秀艳，上海电机学院赵宁军. 本书由解学祖主审.

在本丛书的编写过程中，得到了各参编院校的各级领导的关心和支持，参阅了有关的文献和教材，在此对相关作者一并表示衷心的感谢.

由于时间仓促，加之作者水平有限，教材中疏漏错误之处在所难免，恳请使用本书的师生多提意见和建议，以便再版时更正.

编　　者

目　录

第九章　空间解析几何

本章将为学习多元微积分提供一些空间解析几何的基本知识. 先建立空间直角坐标系，然后引进有广泛应用的向量概念，再以向量为工具，讨论空间的平面方程和直线方程，最后介绍一些常见的二次曲面的方程和图像.

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

空间解析几何学是用代数方法研究空间几何图形的科学. 首先要解决的基本问题就是空间位置. 在平面解析几何中，应用平面直角坐标系将平面上的点 M 与有序数对 (x,y) 建立一一对应关系，由此将平面曲线与二元方程建立一一对应关系. 为了建立空间图形与方程的联系，需要建立空间的点与有序数组间的一一对应关系，这种对应关系是通过建立空间直角坐标系来实现的.

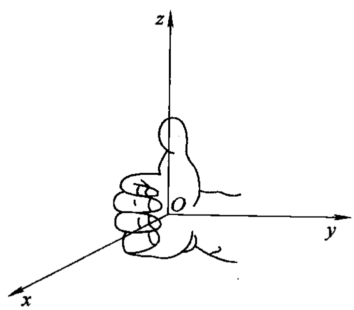

图　9-1

在空间任意取一定点 O，过点 O 作三条两两互相垂直的直线 Ox，Oy，Oz，并在各直线上确定出正方向，再取定单位长度. 这样就确定了一个直角坐标系 $Oxyz$，如图 9-1 所示. 点 O 称为坐标系的**原点**，三条直线 Ox，Oy，Oz 称为**坐标轴**，并依次称为 ***x* 轴**(**横轴**)，***y* 轴**(**纵轴**)与 ***z* 轴**(**竖轴**). 三个坐标轴的正向构成右手系，即用右手握着 z 轴，当右手四指从 x 轴正向以$\frac{\pi}{2}$的角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 9-1 所示.

在空间直角坐标系中，通过每两条坐标轴的平面称为**坐标平面**，并分别称为 ***xOy* 平面**，***yOz* 平面**，***zOx* 平面**. 三个坐标面把空间分为八个部分，每一部分称为一个**卦限**，其顺序规定如图 9-2 所示.

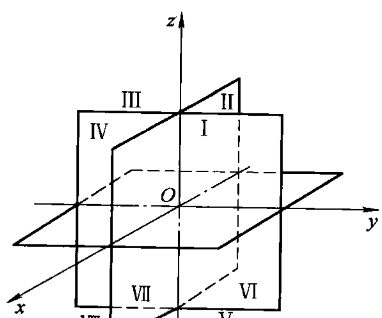

图　9-2

设 P 为空间坐标系中的任意一点，过点 P

分别作三个坐标轴的垂直平面，分别与 Ox，Oy 和 Oz 轴相交于点 A，B 和 C. 它们各自在轴上的坐标依次为 x，y 和 z. 于是空间一点 P 就唯一确定了一组有序数(x,y,z)，如图 9-3 所示. 反之，对任意一组有序实数(x,y,z)，可依次在 x 轴，y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x，y 和 z 的点 A，B，C，过点 A，B，C 分别作垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴的平面，这三个平面相交于唯一的一点 P. 可见任何一组有序实数(x,y,z)唯一确定空间一点 P. 所以通过空间直角坐标系，建立了空间的点 P 与一组有序实数(x,y,z)之间的一一对应关系. 称 x，y 和 z 为点 P 的坐标，通常记为 $P(x,y,z)$. x，y 和 z 依次称为点 P 的**横坐标，纵坐标**和**竖坐标**.

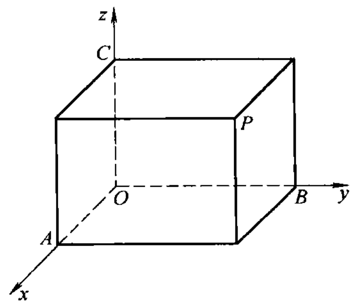

图 9-3

显然，原点的坐标为$(0,0,0)$；在 x 轴、y 轴、z 轴上的点坐标分别是$(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；在坐标面 xOy，yOz，zOx 上的坐标分别是$(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$.

二、空间两点间的距离公式和线段的中点坐标公式

和平面解析几何一样，可以用坐标来计算空间中两点之间的距离和线段的中点坐标.

1. 两点间的距离

设 P_1 和 P_2 两点的坐标分别是(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，求 P_1 和 P_2 之间的距离.

过点 P_1，P_2 分别作平行于坐标平面的平面，如图 9-4 所示. 它们构成一个长方体，P_1P_2 是长方体的一条对角线. 因为 P_1BP_2 是直角三角形，所以

$$P_1P_2^2 = P_1B^2 + BP_2^2$$

又因为 P_1AB 也是直角三角形，所以

$$P_1B^2 = P_1A^2 + AB^2$$

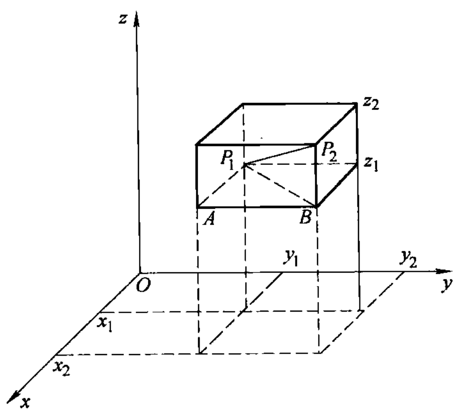

图 9-4

则

$$P_1P_2 = \sqrt{P_1A^2 + AB^2 + BP_2^2}$$

其中，$P_1A = x_2 - x_1$，$AB = y_2 - y_1$，$BP_2 = z_2 - z_1$，则

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} \tag{9-1}$$

式(9-1)就是**空间中两点间的距离公式**.

特别的，从原点 $O(0,0,0)$ 到任意一点 $M(x,y,z)$ 的距离 OM 为

$$OM=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{9-2}$$

例 1 求点 $P_1(1,2,2)$ 和点 $P_2(-1,0,1)$ 间的距离.

解 根据两点间的距离公式得

$$P_1P_2=\sqrt{(-1-1)^2+(0-2)^2+(1-2)^2}=3$$

2. 线段的中点坐标

设空间中两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$，点 $P(x,y,z)$ 为线段 P_1P_2 中点，则中点 P 的坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2} \tag{9-3}$$

式(9-3)称为**中点坐标公式**.

例 2 M 为两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(-1,2,3)$ 所连结成的线段的中点，求点 M 的坐标.

解 设 $M(x,y,z)$，则由中点坐标公式得

$$x=\frac{1-1}{2}=0,\ y=\frac{2+2}{2}=2,\ z=\frac{3+3}{2}=3$$

即点 M 的坐标为$(0,2,3)$.

习题 9-1

1. 在空间直角坐标系中描出下列各点：

$A(-1,2,3)$ $B(6,2,-4)$ $C(-2,-6,3)$

2. 指出点 $P_1(1,-1,-1)$，$P_2(-2,3,-4)$，$P_3(-1,-3,4)$所在的卦限.
3. 求定点 $M(4,-3,5)$到原点与各坐标轴的距离.
4. 设 $A(4,-7,1)$，$B(6,2,x)$，且线段 AB 的距离等于 11，求点 B 的未知坐标.
5. 设线段 AC 的中点坐标 $B(1,-2,4)$，其中 $C(3,0,5)$，求点 A 的坐标.

第二节 空间向量

一、向量的概念及其表示法

在自然科学和工程技术中经常会遇到一类量，如力、加速度、位移、电场强度等，这种量既有大小又有方向，称为**向量**(**或矢量**)；另一类量，如长度、质量、温度、面积等，这种量只有大小，称为**常量**(**或标量**).

空间中的一条线段，以它的一个端点为起点，另一端点为终点，并规定以起点指向终点为线段的方向，这种规定了方向的线段称为**有向线段**. 如以 M 为起点，N 为终点的有向线段可记为$\overrightarrow{MN}$，如图 9-5 所示. 在数学上常用有向线段表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表

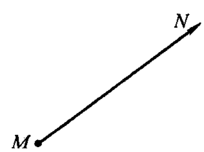

图 9-5

示向量的方向. 也可用小写粗体字母 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 等表示向量.

向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小叫做向量的**模**(或向量的长度), 记作 $|\boldsymbol{a}|$. 模为 1 的向量叫做**单位向量**. 模为零的向量叫做**零向量**, 记作 $\boldsymbol{0}$. 零向量没有确定的方向. 例如, 当几个力的矢量和为零时, 它们的合力就是零向量.

在实际问题中, 有些向量与其起点有关, 有些向量与起点无关. 起点可以任意选取的向量, 称为**自由向量**. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 大小相等、方向相同, 则称这两个向量**相等**, 记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 向量在空间经过平移后所得的向量与原向量是相等的. 和向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等、方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**反向量**, 记为 $-\boldsymbol{a}$. 也称 $-\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**.

二、向量的运算

1. 向量的加法与减法

由力学知道, 如果有两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 作用在同一质点上, 那么它们的合力 $\boldsymbol{F}$ 可按平行四边形法则求得. 仿此, 对向量加法定义如下.

定义 1 把两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起, 以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形, 那么从起点到平行四边形的对角顶点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**, 记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, 如图 9-6 所示.

这种求向量和的方法称为**平行四边形法则**. 由于向量可以平行移动, 所以, 如果把向量 $\boldsymbol{b}$ 平行移动, 使其起点与向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合, 那么从向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点到向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量即为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和, 这种求向量和的方法称为**三角形法则**, 如图 9-7 所示.

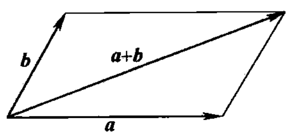

图 9-6

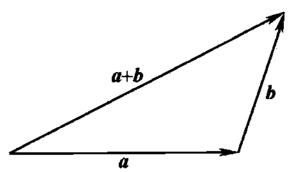

图 9-7

向量的减法可定义为: $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$, 如图 9-8 所示.

2. 向量与数的乘法

定义 2 向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量, 规定向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\boldsymbol{a}$ 不为零向量时, 若 $\lambda>0$, 则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向; 若 $\lambda<0$, 则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向; 若 $\lambda=0$, 则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量, 方向不确定.

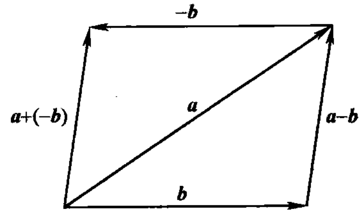

图 9-8

向量的加法与数乘满足如下规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

（2）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$

（3）分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

从数与向量乘法的定义可以得到：两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\neq0)$.

把与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，称为 **$\boldsymbol{a}$ 的单位向量**，记为 $\boldsymbol{e}_a$. 显然有

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\text{或}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a \tag{9-4}$$

三、向量的坐标表示式

设空间直角坐标 $Oxyz$ 中有一个向量 $\boldsymbol{a}$，由于向量可以平行移动，把向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点移到坐标原点 O，假设 M 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点，其坐标为 (a_x,a_y,a_z)，则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，如图 9-9 所示. 显然向量 $\boldsymbol{a}$ 与数组 (a_x,a_y,a_z) 之间具有一一对应的关系. 称 (a_x,a_y,a_z) 为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**，记作

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\} \tag{9-5}$$

式(9-5)就是向量的坐标表示式. a_x，a_y，a_z 也称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的**投影**. 为了便于计算，在 x，y，z 轴分别取单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，称它们为这一坐标系的**基本单位向量**，如图 9-9 所示.

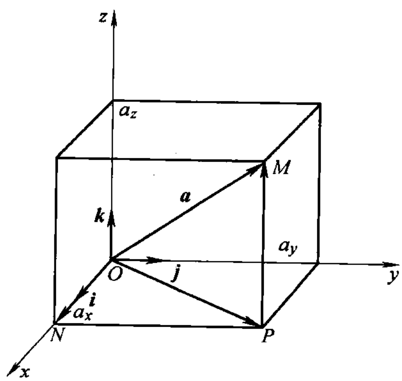

图　9-9

由向量加法的三角形法则有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}$$

即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{9-6}$$

式(9-6)就是 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的**分解式**.

例 1　设向量 $\boldsymbol{a}=\{8,-2,6\}$，$\boldsymbol{b}=\{10,4,-4\}$，求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{a}$.

解　
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})-(10\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})\\&=(8-10)\boldsymbol{i}+(-2-4)\boldsymbol{j}+[(6-(-4)]\boldsymbol{k}\\&=-2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$3\boldsymbol{a}=3(8\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k})=24\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+18\boldsymbol{k}$$

如图 9-10 所示，在空间直角坐标系中若求以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，则由向量的减法得

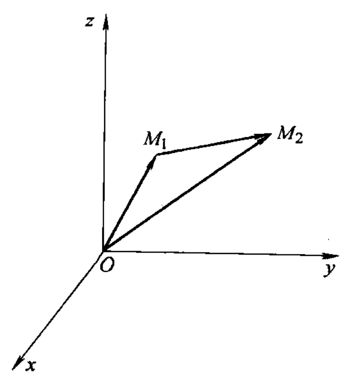

图　9-10

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})$$

即
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k} \tag{9-7}$$

例 2 设 $M_1(5,1,-2)$，$M_2(-4,0,3)$为已知两点，求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 由式(9-7)得
$$\overrightarrow{M_1M_2}=(-4-5)\boldsymbol{i}+(0-1)\boldsymbol{j}+[3-(-2)]\boldsymbol{k}=-9\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$$

四、向量的模和方向余弦

向量有二个特征：大小和方向，而向量的大小又叫做向量的**模**，向量的模可以用向量的坐标表示. 由式(9-7)得向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模为
$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{9-8}$$

式(9-8)也是空间两点之间的**距离公式**.

为了表示向量的方向，设向量$\overrightarrow{M_1M_2}$与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角分别为 α，β，γ，如图 9-11 所示，称 α，β 和 γ 为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的**方向角**，规定$0\leqslant\alpha$，β，$\gamma\leqslant\pi$. 一个向量的三个方向角确定了，其方向也就确定了. 方向角的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的**方向余弦**. 它们同样可确定向量的方向.

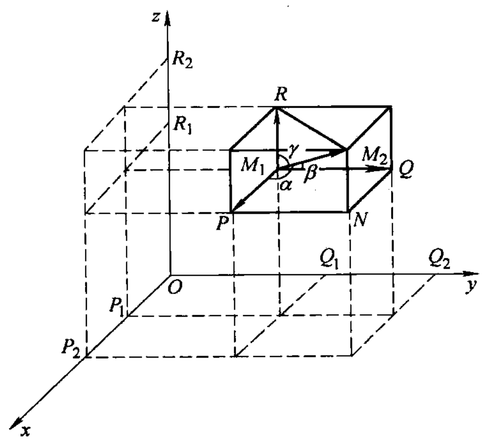

图 9-11

由图 9-11 得
$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x_2-x_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}\\[2ex] \cos\beta=\dfrac{y_2-y_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}\\[2ex] \cos\gamma=\dfrac{z_2-z_1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}\end{cases} \tag{9-9}$$

且
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{9-10}$$

例 3 已知三力 $\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{F}_3=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 作用于同一点，求合力的大小及方向余弦.

解 合力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k})+(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})+(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$
$$=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$$

所以合力大小
$$|\boldsymbol{F}|=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5$$

其方向余弦为　$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{4}{5}$，$\cos\gamma=0$

例 4　设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos\beta=\frac{2}{3}$，且 $|\boldsymbol{a}|=3$，求 $\boldsymbol{a}$.

解　由式(9-10)得

$$\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=1-\frac{1}{9}-\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$$

所以，$\cos\gamma=\pm\frac{2}{3}$. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $\{a_x,a_y,a_z\}$，由式(9-9)得

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=3\times\frac{1}{3}=1$$

$$a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=3\times\frac{2}{3}=2$$

$$a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma=3\times\left(\pm\frac{2}{3}\right)=\pm2$$

所以 $\boldsymbol{a}=\{1,2,2\}$ 或 $\boldsymbol{a}=\{1,2,-2\}$.

例 5　一船欲从河的南岸驶向北岸，已知水速从东向西 6m/min，问船应以多大的速率并与河岸成多大的角度航行，才能使船的实际航行方向垂直于河岸且前进速率为 8m/min?

解　取船的出发点为坐标原点，x 轴与河的南岸叠合，如图 9-12 所示，设水速为$\boldsymbol{v}_0$，船速为$\boldsymbol{v}_1$，船的实际航行速度为$\boldsymbol{v}$，则按题意得：$\boldsymbol{v}=8\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{v}_0=-6\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_1$，所以$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0=8\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{i}=\{6,8,0\}$，$|\boldsymbol{v}_1|=\sqrt{6^2+8^2+0^2}=10$，$\cos\alpha=0.6$，$\alpha=\arccos0.6\approx53°7'48''$.

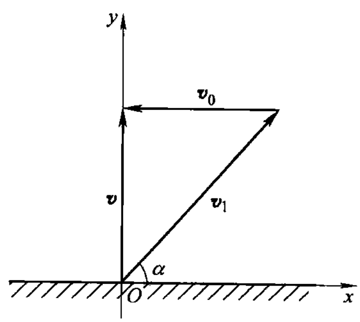

图　9-12

习题　9-2

1. 已知 $P_1(1,-2,3)$ 和 $P_2(4,-2,1)$ 两点，求$\overrightarrow{P_1P_2}$的模和方向余弦.
2. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的夹角相等，求它的方向余弦和方向角.
3. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ 的单位向量.
4. 已知 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$ 平行，求 m，n.
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为$(2,0,-1)$，$|\boldsymbol{a}|=3$，$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{1}{2}$，试求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式及终点坐标.
6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{3,-1,2\}$，它的起点坐标为$(2,0,-5)$，求它的终点坐标.
7. 从点 $M(2,-1,7)$ 沿向量 $\boldsymbol{a}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$ 的方向取线段长 $|MN|=34$，求点 N 的坐标.

第三节　向量的数量积与向量积

一、两向量的数量积

1. 数量积的概念

物体受重力 $\boldsymbol{G}$ 作用沿斜面下滑，如图9-13 所示，重力的方向是垂直向下的，而物体位移 $\boldsymbol{s}$ 的方向与斜面平行，重力方向与位移方向之间的夹角为 θ，由力学知道，力 $\boldsymbol{G}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{G}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$$

这里功 W 是一个数量，这个数量称为力 $\boldsymbol{G}$ 和位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积，在电学和其他科学中也会经常遇到类似的问题，由此有如下向量的数量积概念.

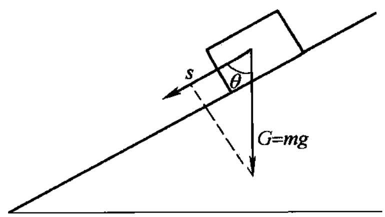

图　9-13

定义 1　设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为任意两向量(图 9-14)，它们的夹角为 θ，称 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**. 用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{9-11}$$

由向量积的定义可知，在上面常力做功问题中，$W=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{s}$.

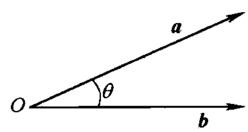

图　9-14

向量的数量积满足以下运算规律：

(1) 交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(2) 结合律　$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$

(3) 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

由向量积的定义还可得到如下结果：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$

(2) 对两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；反之，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\cos\theta=0$，得 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 所以两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3) 对基本单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\ \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$$

2. 两向量数量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，按数量积的运算规律，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

$$=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}$$
$$+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$$
$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{9-12}$$

这就是数量积的坐标表示式.

从式(9-12)可知，两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0 \tag{9-13}$$

当 θ 为不为零的两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角时，由数量积的定义得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \tag{9-14}$$

例 1　设三点 $A(1,1,1)$，$B(2,2,1)$，$C(2,1,2)$，求$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$的夹角 θ.

解　由$\overrightarrow{AB}=\{1,1,0\}$，$\overrightarrow{AC}=\{1,0,1\}$得

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{1\times1+1\times0+0\times1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

例 2　在 xOy 平面上，求一单位向量与已知向量 $\boldsymbol{p}\{-4,3,7\}$ 垂直.

解　因为向量在 xOy 平面上，所以所求向量可设为$\{a,b,0\}$，又因为它与向量 $\boldsymbol{p}$ 垂直并且是单位向量，所以有

$$\begin{cases}-4a+3b=0\\a^2+b^2=1\end{cases}$$

解此方程组得　$a=\dfrac{3}{5}$，$b=\dfrac{4}{5}$或 $a=-\dfrac{3}{5}$，$b=-\dfrac{4}{5}$

故所求的向量为$\left\{\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5},0\right\}$或$\left\{-\dfrac{3}{5},-\dfrac{4}{5},0\right\}$.

二、两向量的向量积

1. 向量积的概念

由物理学知，力 $\boldsymbol{F}$ 对某中心 O 的力矩 $\boldsymbol{M}$ 是一向量(图 9-15)，它的模为

$$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OA}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$$

其中，θ 是向量$\overrightarrow{OA}$与力 $\boldsymbol{F}$ 的夹角. 向量 $\boldsymbol{M}$ 同时垂直于$\overrightarrow{OA}$和 $\boldsymbol{F}$，向量 $\boldsymbol{M}$，$\overrightarrow{OA}$和 $\boldsymbol{F}$ 的正向符合右手规则. 由此可抽象出向量积的概念.

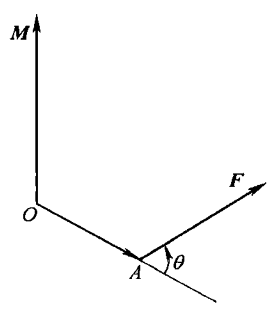

图　9-15

定义 2　给定两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角为 $\theta(0\leqslant$