数学名著译丛

一般拓扑学

〔美〕J.L. 凯莱 著
吴从炘 吴让泉 译
蒲保明 等 校

科学出版社
www.sciencep.com

数学名著译丛

一般拓扑学

〔美〕J. L. 凯莱　著
吴从炘　吴让泉　译
蒲保明 等　校

科学出版社
北京

图字:01-2010-1593

内 容 简 介

本书是关于一般拓扑的一部经典著作. 书中系统地介绍了一般拓扑的基本知识. 正文共分七章, 包括拓扑空间、Moore-Smith 收敛、乘积空间和商空间、嵌入和度量化、紧空间、一致空间、函数空间. 此外, 还有一章预备知识和一个附录. 每章之后有大量问题, 作为正文的补充和延伸, 有助于读者更好地理解正文的内容. 书末由译者加写了一个附录, 介绍了早期不分明拓扑学发展的概貌.

本书正文七章由吴从炘翻译, 其余由吴让泉翻译. 增添的附录由吴从炘撰写.

本书可供高等院校数学系师生及有关的专业工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

一般拓扑学/(美) J. L. 凯莱著; 吴从炘, 吴让泉译. —北京: 科学出版社, 2010

ISBN 978-7-03-027118-1

I. 一… II. ①J.… ②吴… ③吴… III. 一般拓扑 IV. O189.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 055633 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 张小霞
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 4 月第 二 版 开本: B5(720×1000)
2010 年 4 月第一次印刷 印张: 14 1/4
印数: 1—3 000 字数: 277 000

定价: 48.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

序

本书系统地介绍了一般拓扑学的部分内容, 这些内容已被证明在某些数学分支中是很有用处的, 尤其希望它成为学习近代分析的基础. 只是由于朋友们的极力劝说, 我才没有将本书命名为《青年数学分析工作者须知》.

本书是根据作者 1946—1947 年在芝加哥大学、1948—1949 年在加利福尼亚大学、1950—1951 年在杜兰大学 (Tulane University) 几种不同的讲义为基础而写成的, 原打算把它作为参考书和教科书. 这两个目的有些不太一致, 特别是作为一本参考书, 它应提供这方面一个相当全面的概括, 因此在内容上比正规教程叙述得要更广泛一些, 其中许多细节主要是为作参考书而安排的, 例如, 为了包含所有最常用的术语, 我作了相当大的努力, 并把它们都罗列在索引中. 但是, 另一方面, 因为它又是一本教科书, 所以对前几章论述得相当详细. 由于同样的原因, 加入了一章预备知识, 虽然不是系统论述的一部分, 但它包罗了本书主要部分所必需的那些题材, 并且我发现这些题材对许多学生来说还是新颖的. 在这一章里比较重要的结果是有关集论方面的一些定理, 而它们的系统论述已在附录中给出. 附录与本书的其余部分是完全独立的, 除此而外, 本书每一部分都是与其前面的论述相关联的.

本书的叙述方式有一些与众不同之处. 有时在节前加上一个星号, 表示该节是一段题外之言. 许多同样或者更有意义的题材, 放在问题中加以论述, 而这些问题可看成是讨论的整体的一部分. 这些问题中有少数是习题, 其主要目的在于帮助理解所使用到的概念. 还有一些是反例, 它们划分出了可能成为定理的界限. 有些小理论就其本身而言是有趣味的, 又有一些是一般拓扑在不同领域中应用的引论. 最后附有参考文献, 以便有兴趣的读者 (喜爱独立思考者) 可以进一步深入学习. 书末的文献中包含了有关本书议题的绝大部分近代贡献和一些早期的突出成就, 以及少数 “交叉领域” 的参考文献.

我采用了一个特殊的约定①, 每个证明的结尾用 | 来表示. 这个记号是属于哈尔莫斯 (Halmos) 的.

J. L. 凯莱

1955 年 2 月于加利福尼亚伯克利分校

① 原文中还有另一约定, 即对经常出现的 “if and only if ”, 用哈尔莫斯的缩写 “iff” 去代替它. —— 译者

目　　录

第0章 预备知识

理解本书的唯一前提,只需要知道实数的少数性质和具有适当程度的数学修养. 以后要用到的所有定义和基本定理都汇集于这一章里. 这里的论述在一定程度上是自成系统的. 但是,特别是在数系的讨论中,有不少细节被略去了. 本章最深刻的一些结果是集论的定理,而它的系统论述在附录中给出. 由于这一章本来是打算当作参考资料的,因此建议读者先复习一下前两节,然后开始学第一章,当感到需要的时候,可再利用本章的其余部分. 许多定义当它们第一次在书中出现时,我们予以重述.

0.1 集

我们将要论及集和集的元. "集"、"类"、"族" 均为同义语①,而符号 $\in$ 表示元的从属关系. 所以,当且仅当 x 是 A 的一个元 (一个元素,或一个点) 时,方可写为 $x \in A$. 两个集是恒等的,当且仅当它们有相同的元,并且相等通常总是意指恒等,因此,$A = B$ 的充要条件是:对于每一个 $x, x \in A$ 当且仅当 $x \in B$.

集将要借助于括号来构成,因此 $\{x : \cdots (关于\ x\ 的命题) \cdots\}$ 是使得关于 x 的命题是正确的所有点 x 的集. 也就是说,$y \in \{x : \cdots\ (关于\ x\ 的命题) \cdots\}$ 当且仅当关于 y 的相应命题是正确的. 例如,假定 A 是一个集,则 $y \in \{x : x \in A\}$ 当且仅当 $y \in A$. 因为具有相同元的两个集是恒等的,所以 $A = \{x : x \in A\}$,这即使不是一件惊奇的事实,也是一件使人愉快的事实. 在构造集的这一方案中,"x" 是一个哑变数,其含义是我们可以用不曾出现在这个命题中的任何其他变数来代替它. 于是 $\{x : x \in A\} = \{y : y \in A\}$,但是 $\{x : x \in A\} \neq \{A : A \in A\}$.

在这种形式下,关于集的构造有一个很有用的法则. 如果两个集是由两个不同的命题利用上面规定的方式构成的,同时假定这两个命题逻辑上是等价的,则构成的集是相等的. 这个法则可以通过证明构造成的集具有相同的元来说明它是合理的. 例如,假定 A 与 B 是两个集,则 $\{x : x \in A\ 或\ x \in B\} = \{x : x \in B\ 或\ x \in A\}$,因为 y 属于第一个集当且仅当 $y \in A$ 或 $y \in B$,而这种情况成立当且仅当 $y \in B$ 或 $y \in A$. 这一结论成立当且仅当 y 为第二个集的一个元. 下一节的所有定理正是用

① 这种说法不是绝对准确的,在附录内将要说明,由于技术上的原因,将把类分成不同的两种. 我们把"集" 这一术语保留给它们本身是类的元的那种类. 在此,集与类的区别不是十分重要的,除了唯一的一个并非无足轻重的例外,即每一个类当它在讨论中出现时 (在附录以前),也是一个集.

这种方法加以证明的.

0.2 子集与余集; 并与交

如果 A 与 B 是两个集 (或族), 则 A 是 B 的一个**子集 (子族)**当且仅当 A 的每个元是 B 的一个元. 在这种情况下, 我们可以说 A 被**包含**在 B 中或者 B **包含**A, 并写成下面的形式: $A \subset B$ 或者 $B \supset A$. 于是 $A \subset B$ 当且仅当对于每一 x 只要 $x \in A$, 则有 $x \in B$. 集 A 是 B 的一个**真子集**(A 真正地被包含在 B 中或 B 真正地包含 A) 当且仅当 $A \subset B$ 同时 $A \neq B$. 如果 A 是 B 的一个子集, 同时 B 又是 C 的一个子集, 那么显然 A 是 C 的一个子集. 如果 $A \subset B$ 同时 $B \subset A$, 则 $A = B$, 在这种情况下 A 的每一个元也是 B 的一个元, 反之亦然.

集 A 与 B 的**并 (和、逻辑和联合)**记作 $A \bigcup B$, 它是至少属于 A 或 B 之一的所有点的集, 也就是说 $A \bigcup B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. 在此采用 "或" 字并没有两者不可兼的意思. 也就是说既属于 A 又属于 B 的点也属于 $A \bigcup B$. 集 A 与 B 的**交 (逻辑积)**, 记作 $A \bigcap B$, 它是同时属于 A 与 B 之所有点的集, 也就是说, $A \bigcap B = \{x : x \in A \text{ 同时 } x \in B\}$. **空集**用 0 来表示①, 并定义为 $\{x : x \neq x\}$(任何一个伪命题可以用在此处来代替 $x \neq x$). 空集是任一集 A 的一个子集, 因为 0(没有一个元) 的每个元属于 A. 对于每一对集 A 与 B, 包含关系 $0 \subset A \bigcap B \subset A \subset A \bigcup B$ 皆成立. 两个集 A 与 B 叫做**不相交的**当且仅当 $A \bigcap B = 0$, 也就是说, A 的任何元都不是 B 的元. 两个集 A 与 B 叫做**相交的**当且仅当存在一个点同时属于这两个集, 因此 $A \bigcap B \neq 0$. 如果 $\mathscr{A}$ 是一个集族 ($\mathscr{A}$ 的元均为集), 那么 $\mathscr{A}$ 叫做一个**不相交族**当且仅当 $\mathscr{A}$ 的任意两个元都不相交.

一个集 A 的**绝对余集**记作 $\sim A$, 它是 $\{x : x \notin A\}$. A 关于一个集 X 的**相对余集**是 $X \bigcap \sim A$, 或者简单地记作 $X \sim A$. 这样的集又称为 X 与 A 之**差**. 对于每一个集 A 皆有 $\sim\sim A = A$ 成立; 关于相对余集的相应说法较复杂, 所以把它作为定理 2 的一部分来给出.

必须很仔细地区分 "元" 与 "子集". 仅有一个元 x 的集称为**单点集**, 并且 $\{x\}$ 来表示. 注意 $\{0\}$ 不是空集, 因为 $0 \in \{0\}$, 所以 $0 \neq \{0\}$. 在一般情况下 $x \in A$ 当且仅当 $\{x\} \subset A$.

下面两个定理表述出上面给出的各种定义之间最常用到的一些关系. 这些关系都是一些基本的事实, 今后用到时常常不再明确地指出来. 在此我们只证这两个定理的一部分.

定理 1 设 A 与 B 为一集 X 的两个子集, 则 $A \subset B$ 当且仅当下列条件之一成立:

① 空集往往用符号 $\varnothing$ 来表示, 以便同数 0 相区别.—— 译者注

$$A \bigcap B = A;\quad B = A \bigcup B;\quad X \sim B \subset X \sim A;$$
$$A \bigcap X \sim B = 0;\quad \text{或 } (X \sim A) \bigcup B = X.$$

定理 2 设 A, B, C 与 X 均为集, 则

(a) $X \sim (X \sim A) = A \bigcap X$.

(b) (交换律) $A \bigcup B = B \bigcup A$ 且 $A \bigcap B = B \bigcap A$.

(c) (结合律) $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$ 且

$$A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C.$$

(d) (分配律) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$ 且

$$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C).$$

(e) (De Morgan 公式) $X \sim (A \bigcup B) = (X \sim A) \bigcap (X \sim B)$ 且 $X \sim (A \bigcap B) = (X \sim A) \bigcup (X \sim B)$.

证明 (a) 的证明. 一个点 x 是 $X \sim (X \sim A)$ 的一个元当且仅当 $x \in X$ 同时 $x \notin X \sim A$. 由于 $x \notin X \sim A$ 当且仅当 $x \notin X$ 或 $x \in A$, 从而推出 $x \in X \sim (X \sim A)$ 当且仅当 $x \in X$ 并且不是 $x \notin X$ 便是 $x \in A$. 但这两种情况的第一种是不可能的, 所以 $x \in X \sim (X \sim A)$ 当且仅当 $x \in X$ 同时 $x \in A$, 也就是当且仅当 $x \in X \bigcap A$.

(d) 的第一部分之证明. 一个点 x 是 $A \bigcap (B \bigcup C)$ 的一个元当且仅当 $x \in A$ 同时不是 $x \in B$ 便是 $x \in C$. 这种情况又当且仅当 x 不是同时属于 A 与 B 便是同时属于 A 与 C. 故 $x \in A \bigcap (B \bigcup C)$ 当且仅当 $x \in (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$, 从而等式得证. |

如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 均为集, 则 $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \cdots \bigcup A_n$ 是这些集的并, 而 $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n$ 是它们的交. 由于结合律成立, 在计算并与交时, 把各集不论怎样结合起来都是无妨的. 我们还要考虑非有限集族的元的并, 有了这种并的记号是极其方便的. 考虑下面的情况: 对于一个我们称为指标集的集 A 的每一元 a, 假定给定一个集 X_a, 于是所有 X_a 的并用 $\bigcup\{X_a : a \in A\}$ 来表示, 而它被定义为对于 A 中某一 a 使得 $x \in X_a$ 之所有点 x 的集. 类似的方法, 对于在 A 中的 a 所有 X_a 的交用 $\bigcap\{X_a : a \in A\}$ 来表示, 而它被定义为 $\{x : \text{对于 } A \text{ 中的每一 } a, x \in X_a\}$. 一个很重要的特殊情况如下: 指标集本身是一个集族 $\mathscr{A}$ 并且对于 $\mathscr{A}$ 中每个 A, X_A 就是集 A, 这时上面的定义变成 $\bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\} = \{x : \text{对于 } \mathscr{A} \text{ 中的某一 } A, x \in A\}$ 同时 $\bigcap\{A : A \in \mathscr{A}\} = \{x : \text{对于在 } \mathscr{A} \text{ 中的每一个 } A, x \in A\}$.

关于集族的元的并与交有许多具有代数特征的定理, 但我们只需要下面的一个, 而它的证明被略去了.

定理 3 设 A 为一指标集, 并且对于在 A 中的每一 a, 令 X_a 为一个固定集 Y 的一个子集, 则

(a) 如果 B 是 A 的一个子集, 则 $\bigcup\{X_b : b \in B\} \subset \bigcup\{X_a : a \in A\}$ 且 $\bigcap\{X_b : b \in B\} \supset \bigcap\{X_a : a \in A\}$.

(b) (De Morgan 公式) $Y \sim \bigcup\{X_a : a \in A\} = \bigcap\{Y \sim X_a : a \in A\}$

$$\text{且 } Y \sim \bigcap\{X_a : a \in A\} = \bigcup\{Y \sim X_a : a \in A\}.$$

De Morgan 公式通常以扼要的形式叙述为: 并的余集等于余集的交, 并且交的余集等于余集的并.

应当强调指出, 适当地熟练这类集论的运算是很重要的. 附录中包含有一长串定理, 我们建议初学者把它作为练习 (参看关于类的初等代数那一节).

注记 4 在大多数集论的早期著作中, 与对实数的通常运算相类似, 两个集 A 与 B 的并曾记作 $A+B$, 且交记作 AB. 一些相同的代数定律也成立. 然而, 由于迫不得已的原因, 下面不采用这种习惯的用法. 通常集论运算是在一个群、一个域或者一个线性空间内取的. 如果 A 与 B 是一个 (记作加法的) 群的两个子集, 则集 $\{c : c = a + b$, 对于 A 内的某个 a 与 B 内的某个 $b\}$ 自然选用记号 "$A+B$", 同时很自然地用 $-A$ 来表示集 $\{x : -x \in A\}$. 由于在系统地应用刚才定义的集进行运算时, 集的并、交以及余集也要出现, 可见, 本书采用的记号似乎是最合理的. 本书关于集的构造所用的记号是现今使用最广的一种, 但是 "使得 …… 所有 x 的集" 也用记号 $\underset{x}{E}$ 表示. 这类记号有下面的弱点: 那就是必须确定哪一个是哑变数. 现通过下面的例子来说明这种论点. 所有正数平方的集可以很自然地用 $\{x^2 : x > 0\}$ 表示, 继之 $\{x^2 + a^2 : x < 1 + 2a\}$ 也有很自然的含义. 不幸的是后者可能有三种自然的含义, 即 $\{z :$ 对于某个 x 与某个 $a, z = x^2 + a^2$ 且 $x < 1 + 2a\}$, $\{z :$ 对于某个 $x, z = x^2 + a^2$ 且 $x < 1 + 2a\}$, 以及 $\{z :$ 对于某个 $a, z = x^2 + a^2$ 且 $x < 1+2a\}$. 这些集是完全不同的, 因为第一个集既不依赖 x 也不依赖 a, 第二个集依赖 a, 而第三个集依赖 x. 用稍许专门一点的术语来讲, "x" 与 "a" 在第一个集里都是哑的, "x" 在第二个集里是哑的, 而 "a" 在第三个集里是哑的. 为了避免含混, 每当应用括号记号时, 第一个括号之后和冒号之前恒用哑变数来占据.

最后, 考虑另一记法的特点是有意义的. 在读像 "$A \bigcap (B \bigcup C)$" 这种表达式时括号是最要紧的. 然而, 若选用一种与此稍许不同的记法就可避免这一点. 如果我们用 "$\bigcup AB$" 代替了 "$A \bigcup B$", 同时对于交也用类似的方法, 于是所有的括号能够被略去 (这种避免括号的一般方法, 在数理逻辑里是有名的). 在这种修改的记号里第一分配律和对并的结合律可表述为 $\bigcap A \bigcup BC = \bigcup \bigcap AB \bigcap AC$ 同时 $\bigcup A \bigcup BC = \bigcup \bigcup ABC$. 这种速写记法读起来也方便, 例如, $\bigcup AB$ 读为 A 与 B 之并.

0.3 关　　系

集的概念在此论述中被取作基础, 所以我们面临的任务是用集的术语去定义其他必需的概念, 尤其是必须定义序与函数的概念. 但这些概念均可当作关系来处理, 而关系又能够很自然地被当作具有某种特殊结构的集来定义. 因此, 本节提供关系代数的定义和初等定理的一个简要陈述.

假定我们已给某确定的对象的序偶之间一种关系 (在直观的意义下). 其基本的想法是: 关系可表示为所有相互有关的对象的序偶之集. 例如, 一个数和它的立方构成之所有序偶的集可称为立方关系. 自然, 为了使用这种实现方法, 需要有方便的序偶概念, 而这个概念能够用集的术语来定义①. 在此我们需要的基本事实是: 每一序偶有一个第一坐标与一个第二坐标, 并且两个序偶相等 (恒等) 当且仅当它们有相同的第一坐标与相同的第二坐标. 具有第一坐标 x 与第二坐标 y 的序偶用 (x,y) 来表示. 于是, 当且仅当 $x=u$ 且 $y=v$ 时 $(x,y)=(u,v)$.

为了方便起见, 我们推广构造集的方法, 使记号 $\{(x,y):\cdots\}$ 表示合于 …… 的所有序偶 (x,y) 之集. 然而, 严格地说, 这种规定并不是必要的. 因为同一个集可用较详细的说明: $\{z:$ 对于某个 x 与某个 $y, z=(x,y)$ 且 $\cdots\cdots\}$ 而得到.

一个**关系**是一个序偶的集, 即一个关系是一个集, 而它的每个元是一个序偶. 如果 R 是一个关系, 我们用 xRy 简记 $(x,y)\in R$. 同时当且仅当 xRy 时, 我们称 $x\boldsymbol{R}$-**相关于**y. 一个关系 R 的**定义域**是 R 中成员的所有第一个坐标之集, 而它的**值域**是所有第二个坐标之集. 用式子的写法 R 的**定义域**$=\{x:$ 对于某个 $y,(x,y)\in R\}$ 且 R 的**值域**$=\{y:$ 对于某个 $x,(x,y)\in R\}$. 最简单的关系之一是 x 为某一指定集 A 的元而 y 为某一指定集 B 的元所构成之所有序偶 (x,y) 的集. 这个关系是 A 与 B 的**笛卡儿乘积**, 并用 $A\times B$ 来表示. 于是 $A\times B=\{(x,y):x\in A$ 且 $y\in B\}$. 如果 B 非空, 则 $A\times B$ 的定义域为 A. 因此每个关系显然是它的定义域与值域的笛卡儿积的一个子集.

一个关系 R 之**逆**是用对调属于 R 的每个序偶而得到的, 并以 R^{-1} 来表示. 于是 $R^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in R\}$ 并且当且仅当 $yR^{-1}x$ 时 xRy. 例如, 对所有的集 A 与 B, $(A\times B)^{-1}=B\times A$. 一个关系 R 之逆的定义域恒为 R 的值域, 并且 R^{-1} 的值域为 R 的定义域. 如果 R 与 S 是两个关系, 它们的**合成**$R\circ S$(有时写成 RS) 定义为: 对于某个 y, 使 $(x,y)\in S$ 且 $(y,z)\in R$ 的所有序偶 (x,z) 之集. 合成一般是不可交换的. 例如, 如果 $R=\{(1,2)\}$ 且 $S=\{(0,1)\}$, 则 $R\circ S=\{(0,2)\}$, 但 $S\circ R$ 却是空集. 在集 X 上的**恒等**关系 (**在** X **上恒同**) 是指对于在 X 中的 x, 所有形为

① 这个问题的确切说法将在附录中给出. 那里采用了 Wiener 的序偶定义. 用这种方式巧妙地表示关系之思想是属于 Perice 的, 基本关系代数的清晰论述能在 Tarski[1] 中找到.

(x,x) 的序偶所成之集, 而它用 Δ 或 $\Delta(X)$ 来表示. 这个名字是由每当 R 是一个值域及定义域均为 X 之子集的关系时, 恒有 $\Delta \circ R = R \circ \Delta = R$ 成立而产生的. 恒等关系又被称为**对角线**, 此名暗示了它在 $X \times X$ 中的几何位置.

如果 R 是一个关系, 而 A 是一个集, 则所有与 A 中的点 R- 相关的点所构成的集 $R[A]$ 被定义为 $\{y$: 对于 A 中的某个 $x, xRy\}$. 如果 A 是 R 的定义域, 则 $R[A]$ 是 R 的值域, 并且对于任意的 A, 集 $R[A]$ 被包含在 R 的值域中. 如果 R 与 S 是两个关系且 $R \subset S$, 则对于每个 A, 显然 $R[A] \subset S[A]$.

对于关系有大量的运算, 下面的定理就是其中的一部分.

定理 5 设 R, S 与 T 皆为关系, 又设 A 与 B 是两个集, 则

(a) $(R^{-1})^{-1} = R$ 且 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

(b) $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$ 且 $(R \circ S)[A] = R[S[A]]$.

(c) $R[A \bigcup B] = R[A] \bigcup R[B]$ 且 $R[A \bigcap B] \subset R[A] \bigcap R[B]$.

更一般地, 如果对于一个非空指标集 A 的每个元 a, 给定一个集 X_a, 则

(d) $R[\bigcup\{X_a : a \in A\}] = \bigcup\{R[X_a] : a \in A\}$ 且 $R[\bigcap\{X_a : a \in A\}] \subset \bigcap\{R[X_a] : a \in A\}$.

证明 作为一个例子, 我们证明等式: $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$. 一个序偶 (z,x) 是 $(R \circ S)^{-1}$ 的一个元当且仅当 $(x,z) \in R \circ S$, 而这种情况就是当且仅当对于某个 $y, (x,y) \in S$ 并且 $(y,z) \in R$. 所以 $(z,x) \in (R \circ S)^{-1}$ 当且仅当对于某个 $y, (z,y) \in R^{-1}$ 且 $(y,x) \in S^{-1}$. 可这正好是 (z,x) 属于 $S^{-1} \circ R^{-1}$ 的条件. |

有几种特殊类型的关系, 由于它们经常在数学中出现, 所以给它们起了名字. 这里暂且不谈序与函数, 因为它们在下一节里将被详加讨论. 下面所列举的类型也许是最有用的.

下面始终假定 R 是一个关系, X 是所有属于 R 的定义域或值域的点构成的集, 即 $X = (R$ 的定义域$)\bigcup(R$ 的值域$)$.

关系 R 叫做**自反的**当且仅当 X 的每个点 R- 相关于它自己时, 而这完全等价于要求恒等关系 Δ(或 $\Delta(X)$) 是 R 的一个子集.

倘若只要 xRy 便有 yRx, 则称关系 R 是**对称的**. 用代数式子表示, 即为 $R = R^{-1}$. 在另一极端, 称关系 R 叫做**反对称的**当且仅当不出现 xRy 与 yRx 同时成立的情况. 换言之, 称 R 为反对称的当且仅当 $R \bigcap R^{-1}$ 为空集.

称关系 R 为**传递的**当且仅当若 xRy 且 yRz 则 xRz. 用关系合成的术语来讲, 关系 R 是传递的当且仅当 $R \circ R \subset R$. 于是推出如果 R 是传递的, 则 $R^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ R)^{-1} \subset R^{-1}$. 所以传递关系之逆仍是传递的. 如果 R 既是传递的又是自反的, 则 $R \circ R \supset R \circ \Delta$, 故 $R \circ R = R$. 用习惯上的术语来讲, 这样的一个关系在合成之下是幂等的.

一个**等价**关系是一个既自反又对称和传递的关系. 等价关系具有很简单之结构. 现在我们来描述它. 假定 R 是一个等价关系且 X 是 R 的定义域, X 的一个子集 A 是一个等价类 (一个 R- 等价类) 当且仅当在 A 中存在一个元 x 使得 A 与合于 xRy 之所有 y 的集恒等. 换句话说, A 为一个等价类当且仅当在 A 中存在 x 使得 $A = R[\{x\}]$. 关于等价关系的基本结论证明了所有等价类的族 $\mathscr{A}$ 是互不相交的, 并且点 xR- 相关于点 y 当且仅当 x 与 y 都属于同一等价类. 用类 A 中的 x 与 y 所构成的所有序偶之集是简单的 $A \times A$. 由此导出下面定理之简明叙述.

定理 6　*一个关系 R 是一个等价关系当且仅当存在一个互不相交族 $\mathscr{A}$ 使得 $R = \bigcup\{A \times A : A \in \mathscr{A}\}$.*

证明　如果 R 是一个等价关系, 则 R 是传递的: 若 yRx 且 zRy, 则 zRx. 换句话说, 如果 xRy, 则 $R[\{y\}] \subset R[\{x\}]$. 但由于 R 是对称的 (只要 yRx 便有 xRy). 于是推出: 如果 xRy, 则 $R[\{x\}] = R[\{y\}]$. 假定 z 同时属于 $R[\{x\}]$ 与 $R[\{y\}]$, 则 $R[\{x\}] = R[\{z\}] = R[\{y\}]$, 所以两个等价类不是重合便是互不相交. 如果 y 与 z 属于等价类 $R[\{x\}]$, 则由 $R[\{y\}], = R[\{x\}]$ 推得 yRz, 换句话说, 也就是 $R[\{x\}] \times R[\{x\}] \subset R$. 故对所有等价类 $A, A \times A$ 的并是 R 的一个子集, 又由于 R 是自反的, 所以如果 xRy, 则 $(x,y) \in R[\{x\}] \times R[\{x\}]$. 故 $R = \bigcup\{A \times A : A \in \mathscr{A}\}$. 反过来的简单证明在此省略. |

我们的兴趣经常在于了解: 一个关系在属于它的定义域的一个子集的那些点上的性质, 并且对于那些点关系所具有的性质, 经常对所有的点却不成立. 已给一个集 X 和一个关系 R, 可以构造一个新的关系 $R\bigcap(X \times X)$, 它的定义域是 X 的一个子集. 为了方便起见, 我们说关系 R **在** X **上具有性质**, 或关系 R **限制在** X **上具有性质**当且仅当 $R\bigcap(X \times X)$ 具有此性质. 例如, R 在 X 上传递当且仅当 $R\bigcap(X \times X)$ 是一个传递关系. 这等于说定义的性质对于在 X 中的点成立. 在这种情况下只要 x, y 及 z 都是 X 中使得 xRy 且 yRz 的点, 则 xRz.

0.4　函　　数

现在函数的概念必须用已经引进的概念来定义. 如果我们考虑到下面的事实, 这种企图并不困难. 不管一个函数是什么, 而它的图像作为序偶的集确有一个显然的定义. 此外, 没有关于函数的信息不能由它的图像导出. 简而言之, 没有什么原因要我们全力去找一个函数与它的图像之间的区别.

一个**函数**是使得没有两个不同元具有相同之第一坐标的一种关系. 于是称 f 是一个函数当且仅当 f 的元都是序偶, 并且只要 (x,y) 与 (x,z) 为 f 的元, 则 $y = z$. 一个函数与它的图像之间我们不加以区分.

对应、**变换**、**映射**、**算子**以及**函数**, 这些术语均为同义语. 如果 f 是一个函数

且 x 是它的定义域 (f 的所有元中第一个坐标之集) 内的一个点, 则 $f(x)$ 或 f_x 是 f 的第一个坐标为 x 的唯一的元之第二个坐标. 点 $f(x)$ 是 f 在 x 的**值**, 或者是在 f 的映射下 x 的**象**, 并且称 f 对于 x **指定值** $f(x)$, 或者把 x **变成**$f(x)$. 称一个函数 f **在** X 上当且仅当 X 是它的定义域 (f 的元中第二个坐标之集有时称为值集). 如果 f 的值域是 Y 的一个子集, 则 f 是**到** Y, 或**到** Y **内的**. 一般来讲, 在下述意义下, 一个函数是多对一的, 即可能有许多序偶具有同一第二个坐标, 这也就是说, 函数在许多点上取同一值. 称一个函数是**一对一**的当且仅当不同的点有不同的象, 也就是说假定逆关系 f^{-1} 仍是一个函数.

一个函数是一个集, 因此两个函数 f 与 g 恒等当且仅当它们有相同的元, 显然这种情况也就是当且仅当 f 的定义域与 g 的定义域是相同的, 并且对于在此定义域中的每个 $x, f(x) = g(x)$. 所以我们可以用指定函数的定义域和函数在此定义域每个元上的值来确定一个函数. 如果 f 是在 X 上到 Y 的一个函数, 并且 A 是 X 的一个子集, 则 $f\bigcap(A \times Y)$ 也是一个函数. 它称为 f 在 A 上的**限制**, 并用 $f|_A$ 来表示, $f|_A$ 的定义域为 A, 同时对于在 A 中的 x, $(f|_A)(x) = f(x)$. 一个函数 g 是 f 在某个子集上的限制当且仅当 g 的定义域是 f 定义域的一个子集, 并且对于在 g 定义域中的 $x, g(x) = f(x)$, 即当且仅当 $g \subset f$. 函数 f 被称为 g 的一个**扩张**当且仅当 $g \subset f$. 于是, f 是 g 的一个扩张当且仅当 g 是 f 在 f 的定义域的某个子集上的限制.

如果 A 是一个集且 f 是一个函数, 则依照对任意关系给出的定义, 有 $f[A] = \{y$: 对在 A 中的某个 $x, (x,y) \in f\}$. 相当于说 $f[A]$ 等于 $\{y$: 对在 A 中的某个 $x, y = f(x)\}$, 集 $f[A]$ 称为在 f 的映射下 A 的象. 如果 A 与 B 是两个集, 则由定理 5, $f[A\bigcup B] = f[A]\bigcup f[B]$ 且 $f[A\bigcap B] \subset f[A]\bigcap f[B]$, 类似的公式对任意交与任意并也成立. 一般来说, $f[A\bigcap B] = f[A]\bigcap f[B]$ 不成立. 因为互不相交的集可能有相交的象. 如果 f 是一个函数, 则集 $f^{-1}[A]$ 称为在 f 的映射下 A 的**逆** (**逆象**、**反象**). 逆满足下面的代数规则.

定理 7　*如果 f 是一个函数, 而 A 与 B 是两个集, 则*

(a) $f^{-1}[A \sim B] = f^{-1}[A] \sim f^{-1}[B]$;

(b) $f^{-1}[A\bigcup B] = f^{-1}[A]\bigcup f^{-1}[B]$;

(c) $f^{-1}[A\bigcap B] = f^{-1}[A]\bigcap f^{-1}[B]$.

更一般地, 如果对于非空指标集 C 的每一个元 c, 有一个集 X 存在, 则

(d) $f^{-1}[\bigcup\{X_c : c \in C\}] = \bigcup\{f^{-1}[X_c] : c \in C\}$;

(e) $f^{-1}[\bigcap\{X_c : c \in C\}] = \bigcap\{f^{-1}[X_c] : c \in C\}$.

证明　将仅证明 (e).

点 x 为 $f^{-1}[\bigcap\{X_c : c \in C\}]$ 之元的充要条件是 $f(x)$ 属于此交, 而这种情况当且仅当对于在 C 中的 $c, f(x) \in X_c$. 但后面的条件等价于对每个 C 中的 $c, x \in$

$f^{-1}[X_c]$, 也就是说, $x \in \bigcap\{f^{-1}[X_c : c \in C]\}$. ∎

上面的定理经常扼要地说成: 一个函数的逆保持相对余集、并以及交. 应当注意这些公式的正确性, 并不依赖于集 A 与 B 为 f 值域的子集. 当然, $f^{-1}[A]$ 同 A 与 f 值域交的逆象是相同的, 然而, 这里将记号 (相应的对于 f 映射下象的记号) 限制在值域 (分别地, 定义域) 的子集上是不方便的.

两个函数的合成经简单的论证可知它仍是一个函数. 如果 f 是一个函数, 则 $f^{-1} \circ f$ 是一个等价关系, 因为当且仅当 $f(x) = f(y)$ 时, $(x, y) \in f^{-1} \circ f$. 合成 $f \circ f^{-1}$ 是一个函数. 它是在 f 的值域上的一个恒等关系.

注记 8 　关于函数 f 在 x 点的值还有另外一些记号. 除了 $f(x)$ 与 f_x 之外, 下面的记号: $(f, x), (x, f), fx, xf$ 以及 $\cdot fx$ 均有人采用. 头两个记号在处理具有某些对偶性时是极其方便的. 在那里考虑一个函数族 F, 每个的定义域都在指定的 X 上, 并且以对称的形式来看待 F 与 X 有预期的好处. fx 与 xf 这两个记号显然是我们已采用记号的缩写; 至于说 "f" 是写在 "x" 的左边还是右边, 显然是一个爱好的问题. 这两个记号也有记号 "$f(x)$" 所具有的不便之处. 在某些相当复杂的情况下, 除非加上大量括号, 记号的含义是不够明确的. 最后的记号 (已为 Morse 所采用) 免除了这种困难, 它含义明确同时不需要括号 (参看关于并与交的注记 4).

对于一个函数, 约束变量的记号是需要的, 例如, 定义域是所有实数的集, 而在 x 点取值为 x^2 的函数应该有一个较简单的记述方法. 可以从这种特殊的情况出发, 把 x 视为实数集上的恒等函数, 那么在此情况下 x^2 便有理由为一平方函数. 这种经典的手法是把函数与它在 x 的值都用 x^2 来表示. 一种消除混淆的建议是用 $x \to x^2$ 来记平方函数, 现在建议的这种记号正在逐渐地被广泛采用. 自然它也不是万能的. 比如记述 $(x \to x^2)(t) = t^2$ 就需要加以解释. 最后应该注意到虽然箭头这种记号无疑将要作为标准形式而加以使用. 但是 Church 的 λ- 规定仍具有技术上的方便 (平方函数可写成 $\lambda x : x^2$). 为了消除混淆, 不加括号是必要的.

0.5　序

一个**序** (**半序**、**拟序**)是一个传递关系. 一个关系 $<$ **序化** (**半序化**)一个集 X 当且仅当它在 X 上是传递的. 如果 $<$ 是一个序并且 $x < y$, 则通常称 x **在** y **之前**或者 x **小于** y (关于序 $<$), 并称 y **在** x **之后**或者 y **大于** x. 如果 A 包含在一个被 $<$ 序化的集 X 中, 则 X 中的一个元素 x 叫 A 的一个**上界**当且仅当对于在 A 中的每个 y 不是 $y < x$ 便是 $y = x$. 类似地, 如果 x 小于或等于 A 中的每个元, 则元素 x 称为 A 的一个**下界**. 自然, 一个集可能有许多不同的上界. 一个元素 x 称为 A 的**最小上界**或者**上确界**当且仅当它是一个上界并且它小于或等于所有其他上界 (换言之, 上确界是一个上界, 同时又是所有上界集的下界). 以同样的方法, **最大下**

界或者**下确界**是一个元素, 此元素是一个下界并且大于或等于所有其他下界. 称一个集 X 是**有序完备**的 (关于序 $<$) 当且仅当 X 的每个有上界的非空子集具有上确界. 这个关于上界的条件完全等价于对于下界的相应论述稍稍有点使人感到奇怪. 也就是说:

定理 9　*一个集 X 关于一个序是有序–完备的: 当且仅当它的每个有下界之非空子集具有下确界.*

证明　假定 X 是有序–完备的, 而且 A 是它的一个有下界的非空子集. 令 B 为 A 的所有下界的集, 于是 B 非空, 并且确保了非空集 A 的每个元是 B 的上界. 故 B 有一个最小上界, 设为 b, 从而 b 小于或等于 B 的每个上界, 特别是 b 小于等于 A 的每个元, 所以 b 是 A 的下界. 另一方面, b 自身是 B 的一个上界, 也就是说 b 大于等于 A 的每个下界. 故 b 是 A 的最大下界.

逆命题也可以用类似的论述来证明, 或者可以直接把刚证明的结果应用到 $<$ 的逆关系上. ❙

应该注意到序的定义的条件是很弱的. 例如 $X \times X$ 是 X 的一个序, 但它没什么意思. 关于这个序 X 的每个元是所有子集的上界, 事实上是一个上确界. 比较有意义的序需要满足附加的条件: 如果 x 小于等于 y, 同时 y 又小于等于 x, 则 $x = y$. 在这种情况下, 对于一个集至多存在一个上确界与一个下确界.

线性序 (**完全**、或者**简单序**) 是一个序, 它使得

(a) *如果 $x < y$ 且 $y < x$, 则 $x = y$.*

(b) *只要 x 与 y 都是 $<$ 的定义域和值域的并的不同元, 则不是 $x < y$ 便是 $y < x$.*

应注意到一个线性序无需是自反的. 但是我们约定 $x \leqq y$ 当且仅当 $x < y$ 或者 $x = y$. 如果 $<$ 是一个线性序, 则关系 $\leqq$ 恒为一个自反的线性序, 下面称一个关系**线性序化**一个集 X 当且仅当这个关系在 X 上的限制是一个线性序. 一个集具有一个将它线性序化的关系称为一个**链**. 显然, 上确界与下确界在链中都是唯一的. 尽管有许多讨论应用到较少限制的序上显然成立, 但本节剩下的定理仍侧重于链.

在一个集 X 上到一个集 Y 的函数 f 称为关于 X 内的序 $<$ 与 Y 内的序 $\prec$ 是**保序的** (**单调的**)当且仅当只要 u 与 v 均为在 X 中使得 $u \leqq v$ 的点, 便有 $f(u) \prec f(v)$ 或 $f(u) = f(v)$. 如果 Y 的序 $\prec$ 是简单的 $Y \times Y$, 或者如果 X 的序是空关系, 则 f 必然是保序的. 于是不能期望一一对应的保序函数之逆恒为保序的. 然而, 如果 X 与 Y 是两个链, 并且 f 是一对一的同时单调的, 则 f^{-1} 必然是保序的. 因为如果 $f(u) \prec f(v)$ 且 $f(u) \neq f(v)$, 但由保序的性质 $v < u$ 是不可能的.

有序完备链具有一个很特别的性质. 假定 X 与 Y 是两个链, X_0 是 X 的一个子集, 并且 f 是在 X_0 上到 Y 的一个保序函数. 问是否存在一个 f 的保序扩张, 它的定义域为 X? 除非对 f 加上某些限制, 不然回答是 "否定的". 因为如果 X 是所