

1979—1980



中 学

国际数学竞赛题解

**1979—1980
中学国际数学竞赛题解**

顾可敬

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

(长沙市展览馆路14号)

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1981年4月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：5.375 字数：120,000

印数：1—81,000

统一书号：13204·28 定价：0.47元

前 言

一九八一年七月，第二十二届中学国际数学奥林匹克竞赛将在美国举行。很多国家将派出自己的优秀代表参加这次盛会。编者撰写此书，为的是向广大中学师生及国内数学界提供最近两年国际数学竞赛的情况，以资学习参考。

这本小册子编集了1979和1980两年间三次国际数学竞赛的有关资料。它包括情况介绍、试题和解答。这三次竞赛是：1979年在英国伦敦举行的第二十一届国际数学奥林匹克竞赛，1980年分别在芬兰举行的四国数学竞赛和在卢森堡举行的五国数学竞赛。书末还备有三个附录，给出了一些有关方面的基础知识。

考虑到我国目前中学所采用的教材和师资情况，这本小册子对于每一道题都给出证明和解算的详细过程，并在有些题解之外还作了一些评注。书末所备的三个附录，是企图使要用到的知识“自给自足”。读者不必另外去寻找有关的参考书，仅仅看懂这几个附录，就可以掌握事先尚未学过的知识和方法，去解决问题。

广大读者应该怎样使用这本题解集呢？匈牙利数学家赛赣(G. Szegő)说过一段很精辟的话。他说：“我们不应该忘记，解任何一道有价值的题目，很少有容易得来而毋需刻苦钻研的。相反地，它往往是几天、几星期或者几个月竭尽脑力的结果。为什么年轻人愿意花费这么多精力呢？这大概是对某种价值本能的偏爱，即把智力创造和精神成就看得高于物质利益的态度。

这种价值标准的建立只能是社会风尚和文化环境长期熏陶发展的结果，那是很难通过政府的帮助甚至是学术上对数学学科加强培训来加速进行的。向年轻人显示智力创作之美，使他们体验到从事伟大和成功的智力创造后的满足，是确立这种价值标准最有效的手段。”我们希望读者不要急于去看题解，而要“动员”你自己所知道的所有数学知识，向一个个竞赛题“发起进攻”，“战”而胜之。当你有了“自己”解法后，再去读题解和评注时，就一定会比你一上来就去看题解，有多得多的收获，因为再没有比一个卷起袖子亲身经历一番实践的人更能知道其间的难处和妙处、乐处和苦处。你切莫失掉这样一种综合运用你的数学知识的最好的锻炼机会！

最后，我要感谢美国纽约州立大学阿尔巴尼分校的荣誉退休教授、美国数学奥林匹克评奖委员会的顾问努拉·D·特纳女士(Nura, D. Turner)，英国伦敦韦斯特菲尔特学院[SmP(The School Mathematisc Project)]的执行理事助理保罗·斯克鲁顿(Paul Scruton)先生，卢森堡的卢辛·基弗(Lucien Kieffer)教授。他们在来信中向我介绍了那几次国际数学竞赛的情况，也附寄来有关的资料，我谨致衷心的感谢！

编者

1980年12月于上海

目 录

一	情况介绍	(1)
二	竞赛试题	(11)
三	题解	(18)
	第廿一届国际数学奥林匹克	(18)
	1980年芬兰等四国国际数学竞赛	(51)
	1980年卢森堡等五国国际数学竞赛	(103)
四	补充知识	(125)
	附录一 初等数论的一些基础知识	(125)
	附录二 实数的 p 进制展开	(138)
	附录三 k 阶常系数线性递归方程的解	(145)

情况介绍

我们在这里要向读者较为详细地介绍三次国际数学竞赛的情况。

第廿一届国际数学奥林匹克

国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad, 缩记为IMO), [注] 自1959年由罗马尼亚倡议并于该年在布加勒斯特举办第一届竞赛以来, 逐年轮流在各国举行, 从未间断。这个竞赛起先只局限于东欧诸国, 从1967年第9届开始, 逐步扩大到西欧、美国。自1977年以来每年都至少有二十个国家参加这个竞赛。

由于多种原因, 这个竞赛不是由一个永久性的国际组织来掌管的。它既没有章程, 也没有常设的委员会。在每年竞赛时, 由各国的领队组成一个临时的国际评审委员会, 料理竞赛中的命题、批改考卷、评奖等各项事务, 最后通过协商, 由一国自荐担任下届竞赛的东道国, 并由该国领队向其它各国发出口头邀请。但正式的组织工作要由下届东道国的教育部向各国教育部发出正式邀请才算有效。

1979年第廿一届国际数学奥林匹克是在英国伦敦举行的, 按照惯例, 正式竞赛分两场: 第一试于1979年7月2日上午举

[注] 读者如果想了解IMO历届的情况, 可参阅笔者为《科学画报》所写的一篇短文中的一张表格。该文刊于1980年第2期12~13页。

行，第二试是在次日上午。每次都是四小时，三个题，满分是廿分。参加这一届竞赛的共有23个国家，选手166名。其中19个国家是派足了八名选手的，而巴西、古巴、越南、卢森堡派出的选手都不足八名，因此按照惯例，这四国的代表队不计团体总分。这一届的团体总分是苏联队第一名，得267分。（满分应是 $40分 \times 8 = 320分$ 。）往下的五个名次见下表：

名 次	一	二	三	四	五	六
国 名	苏 联	罗马尼亚	西 德	英 国	美 国	东 德
团 体 分	267	240	235	218	199	180

按照不成文的规定，竞赛的评审委员会是不向任何团体优胜者颁发奖状的，而只向个人优胜者颁发奖状。这次竞赛共颁发了83个奖状，正好是总选手人数的一半。其中37分以上的得一等奖，共7名；29分至36分的得二等奖，共32名；20分至28分的得三等奖，共42名。在这一届竞赛中，得满分共四人。其中捷克队一人，苏联队两人，越南队一人。越南队那位得满分的选手还获得这届竞赛唯一的一分特别奖状。这次越南虽然只派了四名选手，但成绩之好，令人瞩目。

在这次竞赛的六道题中，第一题最难，第四题最易，从竞赛成绩的统计资料中就可以明显地看出。而评审委员会却把最难的一题只设分6分，还放在第一试的头道。看来他们对选手们情况估计不足，有欠妥当（详细分析请看本书关于该题目的解答、评注部分）。

为了使广大的国内数学爱好者能够详细地了解这届国际奥

林匹克的竞赛情况，我们在下面的表一至表三中，列出了这届竞赛的成绩记载与统计资料。表一是按选手来排列的，表二是按题号来排列的，而表三则是各队选手成绩的原始记录。在表二中用到的“平均”是指对该题的占分（即6分或7分）而言的。而“折合成百分制后的平均”是假设该题为100分后来折算的。

这次竞赛的平均成绩是19.77分（40分制），折合为百分制是49.4分。

参加这届竞赛的国家共同协商，初步拟定于1980年在蒙古乌兰巴托举行第22届国际数学奥林匹克。但由于一些尚未获知的原因，这次竞赛未能按此计划实现。这样就使历时21年、从未发生间断的国际数学奥林匹克第一次中断了一年。因此一些欧洲国家只得举办一些小型的国际数学竞赛来代替。这些小型竞赛共有两个，这就是下面要介绍的。而1981年的国际数学奥林匹克将由美国任东道国，按计划将于7月初在华盛顿和纽约两地举行。

1980年芬兰等四国国际数学竞赛

这次竞赛共有四国参加。他们是芬兰、英国、匈牙利和瑞典。东道国是芬兰，竞赛地点选在芬兰南端波的尼亚湾和芬兰湾交汇处的阿维南马群岛中马里安哈米纳处。

正式竞赛于1980年7月2日和3日两个上午进行。竞赛的诸项工作都是仿照IMO的格式进行的。总的说来，这次竞赛的题目难度都较大。因此，平均成绩只有11.06分（40分制），用百分制换算，则为27.6分，下面的表四和表五列出了这次竞赛的成绩统计。前10名获奖者都奖得函数型或可编程序型的计算器一架。

表一

第21届IMO各国队员的成绩统计

序号	国名	代号	队中各名队员的得分								每队总分	一等 奖	二等 奖	三等 奖	特别 奖
			1号	2号	3号	4号	5号	6号	7号	8号					
1	奥地利	A	20	23	13	16	21	15	19	25	152			4	
2	比利时	B	3	3	22	6	2	6	7	17	66			1	
3	保加利亚	BG	9	20	23	16	24	23	13	22	150			5	
4	巴西	BR	5	5	2	4	3								
5	古巴	C	10	5	11	9									
6	捷克斯洛伐克	CS	16	20	24	17	23	40	12	26	178	1		4	
7	法国	F	14	12	15	19	37	11	28	19	155	1		1	
8	芬兰	SF	16	18	14	1	4	6	7	23	89			1	
9	西德	FRG	21	14	35	33	39	30	34	29	235	1	5	1	
10	英国	GB	23	23	34	30	32	34	21	21	218		4	4	
11	东德	GDR	33	13	31	20	19	19	26	19	180		2	2	
12	希腊	GR	6	2	7	6	7	5	3	21	57			1	
13	匈牙利	H	15	20	16	18	34	22	17	34	176		2	2	
14	以色列	IS	13	4	28	16	11	20	12	15	119			2	
15	荷兰	NL	22	10	17	18	11	8	11	33	130		1	1	
16	波兰	PL	13	9	8	24	21	29	29	27	160		2	3	
17	罗马尼亚	R	35	23	17	33	32	28	39	33	240	1	4	2	
18	瑞典	S	14	10	17	29	13	22	9	29	143		2	1	
19	苏联	SU	19	27	36	34	36	40	36	40	267	2	4	1	
20	美国	USA	17	9	27	17	39	24	32	34	199	1	2	2	
21	越南	VN	32	29	33	40						1	3		1
22	南斯拉夫	YU	13	27	13	11	23	26	24	35	172		1	4	
23	卢森堡	LUX	7												
得奖人数总计												8	32	42	1

表二

第21届IMO各题的得分统计

序号	国 名	第①题 FRG 6分	第②题 BG 7分	第③题 SU 7分	第④题 USA 6分	第⑤题 IS 7分	第⑥题 FRG 7分	各 队 人员数
1	奥 地 利	12	12	28	38	30	32	8
2	比 利 时	0	8	15	20	10	13	8
3	保 加 利 亚	14	28	22	35	17	34	8
4	巴 西	5	2	0	2	5	5	5
5	古 巴	5	6	6	10	5	3	4
6	捷克斯洛伐克	14	27	40	38	37	22	8
7	法 国	14	18	34	32	16	41	8
8	芬 兰	8	14	25	29	11	10	8
9	西 德	36	46	50	37	17	49	8
10	英 国	10	33	48	40	35	52	8
11	东 德	19	27	34	39	26	35	8
12	希 腊	2	11	12	18	8	6	8
13	匈 牙 利	6	24	36	45	29	36	8
14	以 色 列	3	16	26	33	17	24	8
15	荷 兰	5	10	38	37	16	24	8
16	波 兰	1	28	28	48	19	36	8
17	罗 马 尼 亚	31	34	44	42	40	49	8
18	瑞 典	6	26	23	41	23	24	8
19	苏 联	36	45	49	48	41	48	8
20	美 国	9	40	32	28	38	52	8
21	越 南	18	22	27	23	24	20	4
22	南 斯 拉 夫	26	35	15	35	30	31	8
23	卢 森 堡	2	0	0	4	1	0	1
总 分		274	512	632	722	495	646	166人
平 均		1.65	3.09	3.81	4.35	3.00	3.89	19.77
折合成百分制后的平均		27.5%	44.1%	54.4%	72.5%	42.6%	55.6%	49.4%

表三

第21届IMO各国选手成绩的原始记录

奥地利

比利时

保加利亚

队员	题						队员	题						队员	题					
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
1	0	1	7	4	1	7	20	1	0	0	0	2	1	3	1	0	0	6	0	3
2	6	1	1	5	7	3	23	2	0	1	0	0	1	3	2	0	0	7	6	0
3	0	3	1	3	1	5	13	3	0	0	7	5	3	7	22	3	1	7	0	5
4	0	0	3	5	1	7	16	4	0	0	1	4	0	1	6	4	6	3	0	4
5	6	0	2	5	7	1	21	5	0	0	0	1	1	0	2	5	0	7	7	3
6	0	2	0	5	5	3	15	6	0	4	0	1	0	1	6	6	1	7	7	6
7	0	1	7	5	1	5	19	7	0	0	0	5	1	1	7	7	0	4	0	4
8	0	4	7	6	7	1	25	8	0	3	7	4	2	1	17	8	6	0	1	1
	12	12	28	38	30	32	152		0	8	15	20	10	13	66		14	28	22	35

巴西

古巴

捷克斯洛伐克

队员	题						队员	题						队员	题					
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
1	2	2	0	0	0	1	5	1	0	5	3	0	1	1	10	1	1	0	0	6
2	3	0	0	0	1	1	5	2	0	0	1	1	2	1	5	2	6	0	6	1
3	0	0	0	0	1	1	2	3	3	0	2	4	2	0	11	3	0	7	7	6
4	0	0	0	1	2	1	4	4	2	1	0	5	0	1	9	4	0	0	6	6
5	0	0	0	1	1	1	3	5							5	5	0	7	7	1
6							6	6							6	6	7	7	6	7
7							7	7							7	0	2	0	6	3
8							8	8							8	1	4	7	6	7
	5	2	0	2	5	5	19		5	6	6	10	5	3	35		14	27	40	38

芬兰

法国

西德

队员	题						队员	题						队员	题					
	1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6
1	0	1	7	6	1	1	16	1	0	0	7	5	0	2	14	1	0	2	1	6
2	0	4	6	4	2	2	18	2	0	4	0	5	1	2	12	2	0	4	7	1
3	0	0	4	6	2	2	14	3	0	0	4	4	1	6	15	3	6	7	7	6
4	0	0	0	0	0	1	1	4	0	2	7	2	1	7	19	4	6	5	7	6
5	0	2	0	0	1	1	4	5	6	7	7	5	5	7	37	5	6	7	7	5
6	0	0	0	4	2	0	6	6	2	0	1	2	0	6	11	6	6	7	7	1
7	0	0	1	3	1	2	7	7	6	0	4	4	7	7	28	7	6	7	7	6
8	0	7	7	6	2	1	23	8	0	5	4	5	1	4	19	8	0	7	7	6
	0	14	25	29	11	10	89		14	18	34	32	16	41	155		36	46	50	37

续表一

美 国

队员	题					
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	7	6	2	7
2	0	6	7	5	2	3
3	0	7	7	6	7	7
4	4	2	4	6	7	7
5	6	0	7	5	7	7
6	0	7	7	6	7	7
7	0	3	7	2	2	7
8	0	7	2	4	1	7
	10	33	48	40	35	52

218

东 德

队员	题					
	1	2	3	4	5	6
1	6	7	7	5	1	7
2	0	0	2	6	2	3
3	6	2	5	4	7	7
4	0	4	7	6	2	1
5	0	0	7	6	1	5
6	6	0	2	4	6	1
7	0	7	0	5	7	7
8	1	7	4	3	0	4
	19	27	34	39	26	35

180

希 腊

队员	题					
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	4	0	1	1
2	0	1	0	1	0	0
3	0	0	0	5	1	1
4	2	0	1	1	1	1
5	0	1	0	5	1	0
6	0	2	0	0	2	1
7	0	0	0	1	1	1
8	0	7	7	5	1	1
	2	11	12	18	8	6

57

匈 牙 利

队员	题					
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	7	6	1	1
2	6	0	1	5	5	3
3	0	3	0	5	5	3
4	0	0	7	5	2	4
5	0	7	7	6	7	7
6	0	0	7	6	2	7
7	0	7	0	6	0	4
8	0	7	7	6	7	7
	6	24	36	45	29	36

176

以 色 列

队员	题					
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	7	5	0	1
2	1	0	0	1	2	0
3	0	5	4	5	7	7
4	0	0	0	6	5	5
5	2	5	1	2	0	1
6	0	5	7	5	1	2
7	0	1	2	5	2	2
8	0	0	5	4	0	6
	3	16	26	33	17	24

119

荷 兰

队员	题					
	1	2	3	4	5	6
1	0	3	5	5	2	7
2	0	0	0	5	1	4
3	0	0	7	6	3	1
4	5	1	7	4	0	1
5	0	0	7	1	0	3
6	0	0	0	6	2	0
7	0	0	5	4	1	1
8	0	6	7	6	7	7
	5	10	38	37	16	24

130

波 兰

队员	题					
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	3	6	1	3
2	0	0	1	6	0	2
3	0	0	0	6	0	2
4	0	7	3	6	7	1
5	0	0	7	6	1	7
6	0	7	7	6	2	7
7	1	7	7	6	1	7
8	0	7	0	6	7	7
	1	28	28	48	19	36

160

罗 马 尼 亚

队员	题					
	1	2	3	4	5	6
1	6	7	2	6	7	7
2	0	1	7	4	4	7
3	1	2	0	5	2	7
4	6	0	7	6	7	7
5	6	7	7	6	2	4
6	0	7	7	4	7	3
7	6	7	7	5	7	7
8	6	3	7	6	4	7
	31	34	44	42	40	49

240

瑞 典

队员	题					
	1	2	3	4	5	6
1	0	7	3	0	3	1
2	0	0	2	6	1	1
3	0	4	1	6	5	1
4	6	3	5	6	2	7
5	0	5	0	5	2	1
6	0	0	7	6	2	7
7	0	0	1	6	1	1
8	0	7	4	6	7	5
	6	26	23	41	23	24

143

续表二

苏 联

队 员	题						
	1	2	3	4	5	6	
1	0	0	7	6	1	5	19
2	0	7	0	6	7	7	27
3	6	7	7	6	2	7	35
4	6	7	7	6	7	1	34
5	6	7	7	6	3	7	36
6	6	7	7	6	7	7	40
7	6	3	7	6	7	7	36
8	6	7	7	6	7	7	40
36 45 49 48 41 48							267

美 国

队 员	题						
	1	2	3	4	5	6	
1	0	7	0	0	7	3	17
2	0	1	0	0	1	7	9
3	0	4	3	6	7	7	27
4	1	0	7	0	2	7	17
5	6	7	7	5	7	7	39
6	2	7	1	6	1	7	24
7	0	7	7	5	6	7	32
8	0	7	7	6	7	7	34
9 40 32 28 38 52							199

越 南

队 员	题						
	1	2	3	4	5	6	
1	0	5	7	6	7	7	32
2	6	7	6	5	3	2	29
3	6	3	7	6	7	4	33
4	6	7	7	6	7	7	40
5							
6							
7							
8							
18 22 27 23 24 20							134

南 斯 拉 夫

队 员	题						
	1	2	3	4	5	6	
1	1	3	4	1	1	3	13
2	1	6	0	6	7	7	27
3	0	7	0	5	0	1	13
4	0	1	4	2	1	3	11
5	6	4	1	6	1	5	23
6	6	7	0	5	7	1	26
7	6	0	2	6	6	4	24
8	6	7	4	4	7	7	35
26 35 15 35 30 31							172

卢 森 堡

队 员	题						
	1	2	3	4	5	6	
1	2	0	0	4	1	0	7
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
2 0 0 1 0 7							

表四

1980年芬兰等四国国际数学竞赛成绩统计

序号	国 名	代 号	队 中 各 名 队 员 的 得 分								每 队 总 分	获 奖 人 数
			1 号	2 号	3 号	4 号	5 号	6 号	7 号	8 号		
1	芬 兰	SF	3	18	1	3	6	9	19	1	60	2
2	英 国	GB	10	8	11	5	12	4	17	17	84	2
3	匈 牙 利	H	20	28	9	12	15	18	16	16	134	5
4	瑞 典	S	6	11	10	26	9	4	2	8	76	1
得奖人数总计											10	

表五

1980年芬兰等四国国际数学竞赛成绩统计

序号	国 名	第①题 GB 6 分	第②题 S 7 分	第③题 H 7 分	第④题 H 6 分	第⑤题 SF 7 分	第⑥题 GB 7 分	各 队 人员数
1	芬 兰	19	7	0	27	7	0	8
2	英 国	27	4	0	34	5	14	8
3	匈 牙 利	37	0	17	44	17	19	8
4	瑞 典	4	0	6	32	7	27	8
总 分		87	11	23	137	36	60	32人
平 均		2.72	0.34	0.72	4.13	1.13	1.88	11.06
折合成百分 制后的平均		45.3%	4.9%	10.3%	71.4%	16.1%	26.8%	27.6%

1980年卢森堡等五国国际数学竞赛

这次竞赛有比利时，英国，卢森堡，荷兰和南斯拉夫共五国参加。卢森堡任东道主，地点选在该国的默尔希处。正式竞赛于1980年的7月10日和11日两个上午举行，相对来说，这次的竞赛题较容易。由于筹备时间较短，加之卢森堡是一个不足400万人口的小国，财力有限，故各参加国人员食宿费用均需自理。又因为卢森堡能提供的住宿设施有限，所有这些都限制了参加国的数目。这次竞赛的评奖团由各国领队组成，共五人，由英国队领队任主席。按照议定，只公布优胜者和竞赛成绩较好者的总分，而不公布每名选手的成绩（但通知每人自己），所以我们只能知道这次竞赛总共发了19个奖，其中一等奖（37分至40分）1名，二等奖（30分至36分）7名，三等奖（22分至29分）1名。有关的统计资料列在表六中。

表六 1980年卢森堡等五国国际数学竞赛发奖统计

序号	国名	代号	一等奖	二等奖	三等奖
1	比利时	B			1
2	英国	GB		3	4
3	卢森堡	L			1
4	荷兰	NL	1	1	1
5	南斯拉夫	YU		3	4
得奖人数总计			1	7	11

二 竞赛试题

第廿一届国际数学奥林匹克

[1979年于英国韵伦敦]

第一试

[1979年7月2日(星期一)上午]

① p, q 是自然数, 而

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

证明 p 能被 1979 除尽.

(西德, 6分)[注]

② 有一棱柱其顶和底分别是五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 和 $B_1B_2B_3B_4B_5$. 今将这两个五边形的各边和所有的线段 $A_iB_j (i, j = 1, 2, \dots, 5)$ 都涂成红色或绿色. 每一个以棱柱的顶点为顶点以及以涂了色的边为边的三角形一定有两边有相异的颜色. 请证明: 此棱柱的顶和底两个五边形的总共十条边必定是同一种颜色.

(保加利亚, 7分)

③ 同一平面上有两圆相交, A 是其一交点. 今有两点分

[注] 括号内的国家与分数分别是该题的命题国与该题所占的分数.

别从A出发，各绕一圆周环行，且旋转方向相同（指同是顺时针转或同是反时针转），旋转时的线速度每点都是匀速的。在绕了一圈以后，两点同时又在A点会合。请证明：在此平面上存在一点P，使P在任何时候与上述两点是等距离的。

（苏联，7分）

第二试

〔1979年7月3日（星期二）上午〕

④ 给定一个平面 π ，以及在此平面内的一点P和不在此平面内的一点Q。今在平面 π 内寻找点R，使

$$\frac{QP + PR}{QR}$$

达到最大值。

（美国，6分）

⑤ 求所有的实数 a ，使之存在非负实数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 满足

$$\sum_{k=1}^5 kx_k = a,$$

$$\sum_{k=1}^5 k^3 x_k = a^2,$$

$$\sum_{k=1}^5 k^5 x_k = a^3.$$

（以色列，7分）

⑥ A和E是一正八角形一对相对的顶点。一个青蛙从A点