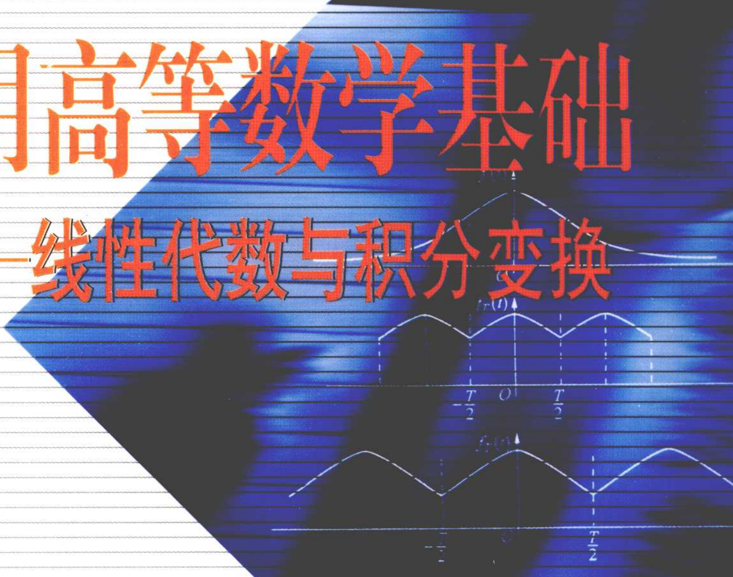
21世纪 高等职业教育通用教材

应用高等数学基础

——线性代数与积分变换



徐　玲　主编
张　峰　主审

上海交通大学出版社

21 世纪高等职业教育通用教材

应用高等数学基础

——线性代数与积分变换

主　编　徐　玲
主　审　张　峰
副主编　吴叶民　沐雨芳

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书根据高职院校机电类专业对线性代数和积分变换的要求编写.内容包括行列式、矩阵、线性方程组、傅里叶变换和拉普拉斯变换等。每章均配有内容提要、小结、习题和自测题，便于教学和自学。为加强高职学生计算机解题的能力，书中还介绍了Matlab在线性代数和积分变换中的应用。

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学基础．线性代数与积分变换／徐玲主编．
上海：上海交通大学出版社，2007
21世纪高等职业教育通用教材
ISBN 978-7-313-04380-1

Ⅰ.应… Ⅱ.徐… Ⅲ.①线性代数-高等学校：技术学校-教材②积分变换-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第030451号

应用高等数学基础
——线性代数与积分变换
徐 玲 主编
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路877号 邮政编码 200030)
电话：64071208 出版人：韩建民
上海市崇明裕安印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本：880mm×1230mm 1/32 印张：7.625 字数：214千字
2007年1月第1版 2007年1月第1次印刷
印数：1-3 050
ISBN978-7-313-04380-1/O·195 定价：13.00元

21 世纪高等职业教育通用教材

编 审 委 员 会

主 任 名 单

（以姓氏笔画为序）

序

发展高等职业教育，是实施科教兴国战略、贯彻《高等教育法》与《职业教育法》、实现《中国教育改革与发展纲要》及其《实施意见》所确定的目标和任务的重要环节；也是建立健全职业教育体系、调整高等教育结构的重要举措。

近年来，年轻的高等职业教育以自己鲜明的特色，独树一帜，打破了高等教育界传统大学一统天下的局面，在适应现代社会人才的多样化需求、实施高等教育大众化等方面，做出了重大贡献。从而在世界范围内日益受到重视，得到迅速发展。

我国改革开放不久，从1980年开始，在一些经济发展较快的中心城市就先后开办了一批职业大学。1985年，中共中央、国务院在关于教育体制改革的决定中提出，要建立从初级到高级的职业教育体系，并与普通教育相沟通。1996年《中华人民共和国职业教育法》的颁布，从法律上规定了高等职业教育的地位和作用。目前，我国高等职业教育的发展与改革正面临着很好的形势和机遇：职业大学、高等专科学校和成人高校正在积极发展专科层次的高等职业教育；部分民办高校也在试办高等职业教育；一些本科院校也建立了高等职业技术学院，为发展本科层次的高等职业教育进行探索。国家学位委员会1997年会议决定，设立工程硕士、医疗专业硕士、教育专业硕士等学位，并指出，上述学位与工程学硕士、医学科学硕士、教育学硕士等学位是不同类型的同一层次。这就为培养更高层次的一线岗位人才开了先河。

高等职业教育本身具有鲜明的职业特征，这就要求我们在改革课程体系的基础上，认真研究和改革课程教学内容及教学方法，努力加强

教材建设。但迄今为止，符合职业特点和需求的教材却还不多。由泰州职业技术学院、上海第二工业大学、金陵职业大学、扬州职业大学、彭城职业大学、沙洲职业工学院、上海交通高等职业技术学校、上海交通大学技术学院、上海汽车工业总公司职工大学、立信会计高等专科学校、江阴职工大学、江南学院、常州技术师范学院、苏州职业大学、锡山职业教育中心、上海商业职业技术学院、潍坊学院、上海工程技术大学等百余所院校长期从事高等职业教育、有丰富教学经验的资深教师共同编写的《21世纪高等职业教育通用教材》，将由上海交通大学出版社等陆续向读者朋友推出，这是一件值得庆贺的大好事，在此，我们表示衷心的祝贺。并向参加编写的全体教师表示敬意。

高职教育的教材面广量大，花色品种甚多，是一项浩繁而艰巨的工程，除了高职院校和出版社的继续努力外，还要靠国家教育部和省（市）教委加强领导，并设立高等职业教育教材基金，以资助教材编写工作，促进高职教育的发展和改革。高职教育以培养一线人才岗位与岗位群能力为中心，理论教学与实践训练并重，两者密切结合。我们在这方面的改革实践还不充分。在肯定现已编写的高职教材所取得的成绩的同时，有关学校和教师要结合各校的实际情况和实训计划，加以灵活运用，并随着教学改革的深入，进行必要的充实、修改，使之日臻完善。

阳春三月，莺歌燕舞，百花齐放，愿我国高等职业教育及其教材建设如春天里的花园，群芳争妍，为我国的经济建设和社会发展作出应有的贡献！

叶春生

2000年5月

前　　言

我国的高等教育体制改革正在不断深化，作为其重要组成部分的高等职业教育正在蓬勃发展。我们需要培养一大批具有必要理论知识和较强实践能力，生产、建设、管理、服务第一线急需的专门人才。其中理论教学应“以应用为目的，以必需、够用为度，以掌握概念、强化应用为教学重点”。为适应和满足高等职业教育的改革，我们组织编写了《应用高等数学基础——线性代数与积分变换》。

本教材内容简练，实用性强；每章都配有内容提要、习题和自测题，以满足实践教学和学生自学的要求。

本书内容分成两部分：第一部分为线性代数，包含了行列式、矩阵、线性方程组等内容；第二部分为积分变换，包含了傅里叶变换和拉普拉斯变换的内容；附录中包含了 Matlab 在线性代数和积分变换中的应用。

本书的主要特色体现在以下三方面：

(1) 在保留核心内容的前提下，教学课时有较大幅度的压缩，以适应高职教育高等数学课程少学时的教学需要。

(2) 本书的内容叙述通俗易懂，并且每章配有内容提要、小结、习题和自测题，便于实践教学和学生自学的需要。

(3) 本书引入了计算机软件 Matlab，体现了教学改革的方向。

本书由徐玲任主编，吴叶民、沐雨芳任副主编，张峰任主审，参加编写的还有王洁明、李彦、沈婴和徐亚舟。

由于编者的水平和时间所限，书中不当之处在所难免，盼望广大读者、专家、学者给予批评指正。

编者

2007 年 1 月

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇　积分变换

第一篇　线性代数

第 1 章　行列式

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，此外还介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

1.1　行列式的概念

1.1.1　二阶和三阶行列式

在初等数学中，我们用加减消元法求解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2. \end{cases}$$

为了方便使用和记忆，我们可将上面出现的四个数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 之间的特定算式简记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1-1}$$

其中：数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1-1)的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义，可用对角线法则来记忆(参见图 1-1)：把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线，

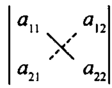


图 1-1

于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积与副对角线上两元素之积的差.

类似地,定义由 3^2 个数组成的符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示数值

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为三阶行列式,可按图 1-2 中便于记忆的对角线法则来得到.

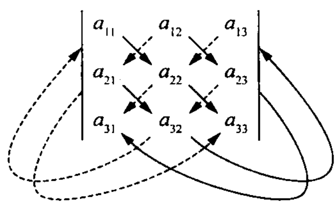


图 1-2

图 1-2 中三条实线上的三个元素的乘积都带正号,位于三条虚线上的三个元素的乘积都带负号,它们的代数和就是三阶行列式的值,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1-2}$$

容易验证,三阶行列式可以通过比它低一阶的二阶行列式的展开式来计算:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \tag{1-3}$$

其中三个二阶行列式分别是在原来的三阶行列式 D 中划去第一行元素 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 所在的第一行和第 j 列的元素，剩下的元素保持原来的相对位置所组成的二阶行列式，而每一项的符号等于 $(-1)^{1+j}$，即

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1-4}$$

例 1.1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解 ***方法 1***(利用对角线法则)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} &= 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4- \\ &\quad 1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3) \\ &=-4-6+32-4-8-24 \\ &=-14.\end{aligned}$$

方法 2(按第一行展开)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}\times1\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times2\times\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}+ \\ &\quad (-1)^{1+3}\times(-4)\times\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &=-8-14+8 \\ &=-14.\end{aligned}$$

例 1.2 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & x^2 \end{vmatrix}=0$.

解 方程左端的二阶行列式 $D=1\times x^2-1\times x=x^2-x$，由 $x^2-x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=1$.

1.1.2 n 阶行列式

三阶行列式可以按第一行展开成三个二阶行列式的代数和，同样可用三阶行列式来定义四阶行列式；依此类推，按照这一规律在定义了 $n-1$ 阶行列式的基础上，便可得到 n 阶行列式的定义.

定义 1.1（n 阶行列式递推定义法） 由 n^2 个数组成的符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 n 阶行列式，其值为

$$(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$称为 n 阶行列式的元素，通常将 n 阶行列式简记为 Δ 或用大写字母(如 D)表示.

n 阶行列式从左上角到右下角的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 的连线称为主对角线，从右上角到左下角的元素 $a_{1n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n1}$ 的连线称为副对角线.

定义 1.2 在 n 阶行列式中，把元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的元素按原次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 又记$(-1)^{i+j}M_{ij}=A_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

因而 n 阶行列式的定义可简述如下：n 阶行列式等于它的第一行

各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}.$$

上式简称为将行列式 D 按第一行展开的展开式.

例 1.3 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

解 $D=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix}+$

$$(-3)\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2\times3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}+$$

$$3\times\left[1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}\right]$$

$$=-6\times3+3\times3$$

$$=-9\ .$$

下面来计算几种特殊的 n 阶行列式，其中未写出的元素都是 0 .

例 1.4 称仅在对角线上有非零元素的行列式为对角行列式. 试证：对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

证明 第一式,同学们自证.

对第二个行列式,注意到降阶时,元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 在第 $n,n-1,\cdots,2,1$ 列,故有

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}_n = \lambda_1(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} & & & \lambda_2 \\ & & \lambda_3 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= \lambda_1(-1)^{1+n}\lambda_2(-1)^{1+(n-1)} \begin{vmatrix} & & & \lambda_3 \\ & & \lambda_4 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}_{n-2} = \cdots$$

$$= (-1)^{1+n}\cdot(-1)^{1+(n-1)}\cdot\cdots\cdot(-1)^{1+2}\cdot(-1)^{1+1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$= (-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 1.5 称对角线以上(下)的元素都为 0 的行列式为下(上)三角行列式. 试证:下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 按 n 阶行列式的定义,依次降低其阶数,每次都仅有一项不为 0,故有