



高等学校数学系列教材

线性代数

(修订版)

主编 王锋 陈林珠

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

哈尔滨工程大学出版社

线性代数

(修订版)

主 审 唐向浦

主 编 王 锋 陈林珠

副主编 卜长江 沈 艳

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

全书共分五章： n 阶行列式、矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵和二次型，并附有习题参考答案或提示。本书内容结构严谨，逻辑清晰，例题和习题较多，便于教学。

本书可作为工科院校各专业的教材，也可供有关科技人员参考。

线 性 代 数

(修订版)

主编 王锋 陈林珠

责任编辑 程小东

*

哈尔滨工程大学出版社出版发行

哈尔滨市南通街145号 哈工程大学11号楼

发行部电话(0451)2519328 邮编:150001

新 华 书 店 经 销

肇 东 粮 食 印 刷 厂 印 刷

*

开本 850mm×1 168mm 1/32 印张 6.25 字数 170 千字

2003 年 1 月第 3 版 2003 年 1 月第 1 次印刷

印数: 17 001—21 000 册

ISBN 7-81007-871-2

0·60 定价:9.00 元

前 言

本书是根据国家教委审定的高等工业学校《线性代数课程教学基本要求》编写的。编写过程中,我们总结了多年的教学经验,认真听取了数学教研室广大教师提出的宝贵意见,从教学角度出发进行仔细推敲,使内容安排更加合理,逻辑清晰,通俗浅显,简明流畅,并配置了大量的例题和习题,便于教与学。

本书由哈尔滨工程大学数力系代数学专家唐向浦教授主审,在此我们表示衷心感谢!

由于我们水平有限,书中难免有不妥之处,恳请广大读者批评指正。

编者

1998年6月

第三版前言

本版是在第二版的基础上修改而成。这次修改广泛吸取了使用本书的教师所提出的意见,从教学角度出发进行仔细推敲,改写了一些重要概念的论述,更换了部分例题和习题,对书中一些不妥之处和错误,作了改正,使内容和系统更加完整,便于教学。

本书第一章和第二章由王锋修改,第三章和第四章由卜长江修改,第五章由沈艳修改。

本次修改得到哈尔滨工程大学应用数学系全体同志的帮助,在此我们表示衷心地感谢。

2002 年 12 月

目 录

第一章 n 阶行列式	1
§ 1.1 二、三阶行列式	1
§ 1.2 排列	6
§ 1.3 n 阶行列式	9
§ 1.4 行列式的性质	15
§ 1.5 行列式按行(列)展开	25
§ 1.6 克莱姆法则	34
第二章 矩阵	40
§ 2.1 矩阵的概念及其运算	40
§ 2.2 方阵的逆阵	60
§ 2.3 分块矩阵	70
§ 2.4 矩阵的秩	77
§ 2.5 矩阵的初等变换	82
§ 2.6 初等矩阵	87
第三章 线性方程组	95
§ 3.1 线性方程组及其同解变换	95
§ 3.2 方程组可解性判别定理	99
§ 3.3 求解方程组举例	103
第四章 向量组的线性相关性	106
§ 4.1 n 维向量的概念	106
§ 4.2 线性相关与线性无关	108
§ 4.3 有关向量组线性相关性的若干结论	112
§ 4.4 向量组的秩	115
§ 4.5 向量空间	122

§ 4.6 线性方程组解的结构	128
第五章 相似矩阵和二次型	136
§ 5.1 向量的内积	136
§ 5.2 向量的正交化及正交矩阵	140
§ 5.3 方阵的特征值和特征向量	146
§ 5.4 相似矩阵	151
§ 5.5 二次型及其标准型	158
§ 5.6 用配方法及初等变换法化二次型为标准型	165
§ 5.7 正定二次型	170
§ 5.8* 约当标准型简介	174
习题答案(参考)	176

第一章 n 阶行列式

本章主要讨论以下三个问题:

1. n 阶行列式的概念;
2. 行列式的性质及计算方法;
3. 克莱姆(Cramer)法则.

基本要求:掌握以上三个方面的基本概念;熟练地掌握行列式的计算方法和 Cramer 法则.

§ 1.1 二、三阶行列式

一、二阶行列式

引例 解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

解 $(1) \times b_2 - (2) \times b_1$ 得 $(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$;

$(1) \times a_2 - (2) \times a_1$ 得 $(a_1b_2 - a_2b_1)y = c_2a_1 - c_1a_2$.

把式中 x 或 y 的系数 $a_1b_2 - a_2b_1$ 叫二阶行列式,记为

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

同理

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

若 $D \neq 0$, 可得到

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D} \quad (3)$$

把(3)式的 x, y 代入方程组, 可以验证它是满足方程组的, 这就是二元线性方程组的唯一的一组解.

定义 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 定义为 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中 $a_{ij} (i, j=1, 2)$ 为二阶行列式的第 i 行第 j 列的元素.

例1 解方程组

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 4 \times 1 = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

所以

$$x = \frac{D_1}{D} = -\frac{5}{2}, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{2}$$

二、三阶行列式

引例 解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases}$$

解 如前面的方法, 先从第一、第二两个方程中消去 z , 再从

第一、第三两个方程中消去 z , 最后从所得的两个方程中消去 y , 就得到

$$(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1)x = k_1b_2c_3 - k_1b_3c_2 + k_2b_3c_1 - k_2b_1c_3 + k_3b_1c_2 - k_3b_2c_1 \quad (4)$$

把 x 的系数叫三阶行列式, 记为

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

显然(4)式右边是 D 中的 a_1, a_2, a_3 分别换成 k_1, k_2, k_3 而得到的结果, 所以右边是

$$D_1 = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(4)式可以写成 $Dx = D_1$. 同理可以得到 $Dy = D_2$, $Dz = D_3$, 这里 D_2 是 D 中的 b_1, b_2, b_3 分别换成 k_1, k_2, k_3 所得到的行列式, D_3 是 D 中的 c_1, c_2, c_3 分别换成 k_1, k_2, k_3 所得到的行列式.

若 $D \neq 0$, 则可得到

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D} \quad (5)$$

把(5)式代入方程组可以验证它们是方程组的解, 所以(5)式是三元线性方程组的唯一的一组解.

定义 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2$$

为了便于记忆,可以依下列方法计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

取在实线上的三个元素作乘积,冠以“+”号,则得三项

$$+ a_1 b_2 c_3, + b_1 c_2 a_3, + c_1 a_2 b_3$$

又取在虚线上的三个元素作乘积,冠以“-”号,则得三项

$$- c_1 b_2 a_3, - b_1 a_2 c_3, - a_1 b_3 c_2$$

于是行列式 $D = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3$

$$- c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

这种作法叫对角线法则。

例2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

解 由对角线法则得

$$\begin{aligned} D &= 1 \times 2 \times 2 + (-2) \times 1 \times 3 + 3 \times 2 \times 0 \\ &\quad - 3 \times 2 \times 3 - (-2) \times 2 \times 2 - 1 \times 0 \times 1 \\ &= 4 - 6 + 0 - 18 + 8 - 0 \\ &= -12 \end{aligned}$$

例3 解方程组

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 1 \\ x - 5y + 3z = 2 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

所以方程组的解为

$$x = \frac{D_1}{D} = -\frac{11}{8}, \quad y = \frac{D_2}{D} = -\frac{9}{8}, \quad z = \frac{D_3}{D} = -\frac{3}{4}$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$(6) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ m & n & e \end{vmatrix}$$

2. 利用行列式解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

3. 验证下列等式成立:

$$(1) \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a+a_1 & b \\ c+c_1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(5) \begin{vmatrix} a_1 & b_1+ka_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+ka_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+ka_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(6) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

§ 1.2 排 列

一、全排列及其逆序数

n 元排列: 由自然数 $1, 2, \dots, n$ 构成的不重复的全排列称为 n 元排列, 排列中的每个数称排列中的元素, 一切 n 元排列的集合记为 A_n , A_n 中含有 $n!$ 个排列.

例如自然数 $1, 2, 3$ 的一切全排列为 $123, 132, 231, 312, 213, 321$, 所以 $A_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$, A_3 中含有 $3!$ 个排

列.

在 n 元排列中规定 $123\cdots(n-1)n$ 为标准排列,即按递增的顺序排列起来的.在 A_n 的其它排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说有一个逆序.一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数,逆序数为奇数的排列叫奇排列,逆序数为偶数的排列叫偶排列.

逆序数的求法: 设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为一个 n 元排列,考察数 $p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的数有 t_i 个,说 p_i 这个数的逆序数是 t_i , 则排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 的逆序数

$$t(p_1 p_2 \cdots p_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^n t_i$$

例 1 求排列 451326 的逆序数.

解 在排列 451326 中,

4 排在首位,逆序数 $t_1 = 0$;

5 的前面比 5 大的数没有,其逆序数 $t_2 = 0$;

1 的前面比 1 大的数有 4 和 5,其逆序数 $t_3 = 2$;

3 的前面比 3 大的数有 4 和 5,其逆序数 $t_4 = 2$;

2 的前面比 2 大的数有 4, 5, 3, 其逆序数 $t_5 = 3$;

6 是最大的数,逆序数 $t_6 = 0$.

于是此排列的逆序数 $t(451326) = 0 + 0 + 2 + 2 + 3 + 0 = 7$. 此排列为奇排列.

例 2 求排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数.

解 元素 $n, n-1, \cdots, 2, 1$ 的逆序数依次为 $t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = 2, \cdots, t_{n-1} = n-2, t_n = n-1$. 所以 $t[n(n-1)\cdots 21] = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

二、对换

对换: 把一个排列中某两个数的位置互换,而其余的数不动,这

种产生新排列的变换叫做对换.将相邻两个元素对换,叫相邻对换.

定理 1 对换改变排列的奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1 \cdots a_i a b b_1 \cdots b_m$, 对换 a 与 b , 变为

$$a_1 \cdots a_i b a b_1 \cdots b_m$$

显然, $a_1, \dots, a_i; b_1, \dots, b_m$ 这些元素的逆序数经过对换并不改变, 而 a, b 两元素的逆序数改变为: 当 $a > b$ 时, 经对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1; 当 $a < b$ 时, 经对换 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变. 所以排列 $a_1 \cdots a_i b a b_1 \cdots b_m$ 与排列 $a_1 \cdots a_i a b b_1 \cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1 \cdots a_i a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$, 把它作 m 次相邻对换, 调成 $a_1 \cdots a_i a b b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$, 再作 $m+1$ 次相邻对换, 调成

$$a_1 \cdots a_i b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$$

综上, 经 $2m+1$ 次相邻对换, 排列 $a_1 \cdots a_i a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n$ 调成排列 $a_1 \cdots a_i b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n$, 所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数, 偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1 知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数, 而标准排列是偶排列(逆序数为 0), 因此知推论成立.

习题 1.2

1. 求下列排列的逆序数, 从而决定其奇偶性:

(1) 53124

(2) 13572468

(3) 987654321

(4) $246 \cdots (2n) 135 \cdots (2n-1)$

2. 选择 i 和 j 使

(1) 1274*i*56*j*9 为奇排列;

(2) 1i25j4897 为偶排列.

§ 1.3 n 阶行列式

一、 n 阶行列式的定义

由三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1)$$

看出:

1. (1)式右边的每一项都恰是三个元素的乘积,这三个元素位于不同的行、不同的列.因此(1)式右端的任意项除正负号外,可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标(称行标)排成标准排列 123, 而第二个下标(称列标)排成 $p_1p_2p_3$, 它是 1,2,3 三个数的某个全排列. 这样的排列共有 6 种, 对应(1)式右端共含 6 项.

2. 各项的正负号与列标的排列对照:

带正号的三项列标排列是: 123, 231, 312;

带负号的三项列标排列是: 132, 213, 321.

计算知前三个排列都是偶排列, 而后三个排列都是奇排列. 因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$, 其中 t 为列标排列的逆序数.

综上, 三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3 \in A_3} (-1)^{t(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $t(p_1p_2p_3)$ 是列标排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数, Σ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

仿此,可以把三阶行列式推广到 n 阶行列式.

定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n \in A_n} (-1)^{\epsilon(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

n 阶行列式简记为 $\Delta(a_{ij})$, 数 a_{ij} 称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 的第 i 行第 j 列的元素.

按此定义的二阶、三阶行列式,与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的. 当 $n=1$ 时, $|a| = a$, 不要与绝对值记号相混淆.

定义表明,为了计算 n 阶行列式,首先作所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积;把构成这些乘积的元素按行标排成自然顺序,然后由列标所成的排列的奇偶性来决定这一项的符号;一共有 $n!$ 项.

例1 证明对角行列式(对角线上的元素是 λ_i ,未写出的元素都是0).

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

证 n 阶行列式的一般项为 $(-1)^{\epsilon(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$, 由于行列式中出现很多的零,所以不等于零的项数就大大减少了,先看看哪些项不为零,然后再来决定它们的符号. 显然若 $p_1 \neq 1$, 则 $a_{1p_1} = 0$, 从而相应项就等于零,因此只须考虑 $p_1 = 1$ 的那些项;同