算學小叢書

算學導論

A. N. Whitehead 著

徐韞知 譯

商務印書館發行

中華民國二十四年七月初版

算學小叢書 算學導論一册 (58738)
Introduction to Mathematics
每册定價大洋肆角
外埠酌加運費匯費

原著者 A. N. Whitehead
譯述者 徐韞知
發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者鄒光昭)

二九一八上 周

代序　研究算學應有的注意

在我國,作算學初步研究的人每會遇到兩層困難:第一,無論教科書或參考書,十分完善的都比較缺乏.或者取材過於簡單,或者說理過於艱深,兼之算學書的內容照例趨重專門化,以致重要的觀念反被蒙蔽.其次,除有特殊的指導者外,就一般說,對算學整個學問缺乏明確的認識,所以他們研究時程序零亂,用力大而收效微.這本書的貢獻就在,幫助讀者對算學能獲得一個明確的認識.原著者懷悌海 (A. N. Whitehead) 博士是英國有數的算學家和哲學家,主講劍橋大學有年,尤其對算理邏輯 (Mathematical logic) 有過不少的成就.這本書係他爲湯姆森 (J. Arthur Thomson) 教授等主編的"家庭大學現代知識文庫" (Home University Library of Modern Knowledge) 作的;並且經過六七度修正和再版,算得一部値得讀的名著.

我現在願意介紹的還不僅此.在原書的末尾,他提示出研究算學的程序以及重要的參考書.爲便利我們的讀者

起見,除他所提示的參考書,我再介紹幾本中文的算學的教科書和參考書,以供讀者選擇.

第一步研究的題目,除掉預先具備一點算術知識而外,應該是"初等幾何學"和"初等代數學".這兩科的研究應該短一點,只要認識所有必需的觀念就足夠了."代數學"方面應該學會"圖解"(The graphical representation)方法,若是實際上"初等解析幾何學"的觀念也就融會貫通.次一對研究主題應該是"初等三角學"和直線與圓的"解析幾何學"(卽"位標幾何學").學習後者,無妨時間短些;因爲它實在包容在代數學裏面.然後,讀者預備來研究"圓錐曲線",對於幾何的圓錐曲線儘可只費一點時間學習.而大部分時間應注意解析的圓錐曲線.但是在所有這些研究中間,應特別注意,除掉例證基本的觀念所必需者外,不必過於繁複.

現在,照同樣的方式進一步繼續研究"微分學"和"積分學".優良的教師最好在"代數學"和"位標幾何"的講授內,就用特例說明這兩個題目.此外,還應該讀一本簡短的關於"三度空間幾何學"(Three dimensional geometry)的書籍.

算學這一步初等的研究對於不以算學爲專科的讀者們當然是恰到好處;而對於具充分的算學研究興趣的人,這也是不可少的基本的知識.然後他再準備進一步將研究範圍推廣,但是却不應奢望全部都能夠把握.這門科學已經發展到這樣廣大精深的地步,恐怕當世的算學家就無一個能夠敢存這種奢望.

說到初步研究完畢以後應讀的重要書籍,我們現在可以介紹幾種: Cremona 的 Pure Geometry (英譯本,牛津 Clarendon Press 出版), Hobson 的 Treatise on Trigonometry (商務印書館有過譯本,不過書名變更), Chrystal 的 Treatise on Algebra (兩卷), Salmon 的 Conic Sections 和 Analytical Geometry of Three dimensions. Lamb 的 Differential Calculus, Wilson 的 Advanced Calculus, 以及 Osborne 的 Differential and Integral Calculus. 餘外,微分方程的書籍初學最好讀 Cohen 的 Differential Equations,程度較深可讀馬君武先生譯 Kiepert 原著的 Differential-Gleichungen (商務印書館出版), 而 Forsyth 的 A Treatise on Differential Equations 也値得一讀.讀者當然無須本本都用相

等的精神閱讀，儘可以就個人的興趣選讀一種或數種．然後再就自己的特殊興趣，選習幾本程度更深的書籍，而對某一門或某幾門算學作精深的研究．如果他的興趣在"解析學"，他就應該注意選讀關於分數原理變數原理以及變分原理的書籍，如 Pierpont, Hobson, Forsyth 等人的著作；而商務大學叢書熊慶來先生所著高等算學分析和這本書所取材的 Goursat 原著 Mathematical Analysis (英譯本凡二卷) 就是最基本的讀物．如果他專門於"幾何學"，那麼 Cremona, Salmon 等人的書就應該詳加研習，而 Eisenhart 的 Differential Geometry 也是一本必需的讀物．餘如 Weber 的算學叢書中譯本 (商務出版)，胡濬濟先生的整數論，園正造的羣論 (商務有譯本出版)，Panton and Burnsid 的方程式論 (商務有譯本出版)，Bôcher 的 Higher Algebra，只要讀者對"高等代數學"有興趣，這些都是值得注意的，當然，讀者研究的時候，不必泥守現在的成法；而且現在所提述的仍不過是各種算學比較初等的書籍，掛一漏萬自然難免，這就要看讀者善爲活用了．

徐韞知　淞滬戰後三週日於南京旅次

目　次

算學導論

第一章

算學的抽象性質

算學的研究開始往往易致失望. 由這門科學重要的應用, 精密的觀念, 以及峻嚴的方法等方面, 在在都使我們希望對整個學問有一終南捷徑的導論之必要. 我們熟知, 得算學的幫助, 旣可以權衡天空中羣星的輕重, 亦可以測度水滴內益兆分子的數目. 可是這門偉大學問有時卻如哈孟雷特 (Hamlet) 的父親的精靈, (見莎士比亞樂府) 同樣游移飄忽, "倏爾在此, 倏爾在彼, 倏爾不知所終", 有非我們理智力所能捉摸者; 其實並非言之過甚, 以這樣精靈神通之廣大, 用我們如此簡陋的方法, 自難免有猶甚於此的迷惘. 其最顯著者, 卽在初等算學書內, 有許多平常的結果且不免流露出類此的情形.

每當學校中講授這門科學的基本觀念時候, 多不能拋脫向來專用以應付特殊問題的專門方式; 所以會造成這

門科學名不符實的結果. 不幸的初學遂不免頭緒紛紜, 而莫衷一是. 當然, 專門的技巧是寶貴的理智活動首要的必需的因素: 如果我們一定認拼讀單字爲必要, 而又弄不清楚每個文字的形式, 那就不能夠欣賞彌爾敦 (Milton) 的韻節, 或雪萊 (Shelley) 的熱情. 從這方面說, 學問是無王者之路的. 但是, 如果只着眼專門的方式, 撇開普遍的觀念, 錯誤當然相等. 這樣, 就要走到書呆子的路上.

本書各章的目的並無教授算學的意思, 只不過使讀者從最初學習起, 得以明瞭這門科學所研究的對象, 以及它何以必定是應用於自然現象方面的精確思考的根本. 完全爲舉例起見, 各章中提到詳細的推論; 同時爲注意使一般理解更爲普遍化, 卽使間有讀者不懂的專門方法或符號, 也僅限於供說明之用.

大多數人第一次都是由"算術"和"算學"發生關係. 平常用"二和二成四"這個觀念代表各人都聽得到的一個簡單的"算學命題" (Mathematical proposition). 所以, 如果可能發現這門科學最顯明的特徵, 那麼"算術"就是一個很好的研究題目. 現在, 我們首先看到關於"算術"的事實是: 它適用於各種事物, 於聲, 於味; 上至天, 下至地,

以至心的觀念, 體的骨骼, 都適用到. 事物的性質是完全無關的; 在所有事物中間, 二和二成四總是眞實的. 這樣我們可以將"算學"主要的特徵寫做: "將所有的事物看成單純的事物, 而不管和這些事物有關的特別的情緒或感覺, "算學"就是研究可以適用於這類事物的性質和觀念的學問". 這就是"算學"被人稱做"抽象的科學"的緣故.

我們所獲得的這個結果是值得注意的. 有人自然會以爲, 抽象的科學因爲缺少關於各種事物實際方面的思考, 對於人生就不能說有很大的重要. 史威甫特 (Swift) 在所著革里維遊記 (Gulliver's voyage to Laputa) 上, 關於此點就表現出兩種心思. 他把拉蒲達 (Laputa) 這個小國家的算學家描寫成呆戇無用的空想者, 須得用驚堂木纔打得斷他們的注意. 還有, 算學的成衣匠用一個象限儀來量他的身長, 得數後再用一個直尺和一個圓規化成其他的長短, 結果製出一套極不配身的衣服來. 在另一方面, 拉蒲達的算學家因爲他們有空氣中浮遊磁島的新奇發明, 遂得統治這個地方並且保持着他們至高無上的地位. 其實, 史威甫特當時最不應該對數學家說風涼話的. 正在這

個時候，形成近代文化的偉大力量之一的牛頓 (Newton) 格致原理 (Principia) 剛好寫就. 所以，史威甫特直不會對地震說風涼話一樣.

但是，僅替算學的功績開個清單是不夠表現得出它的重要的. 現在應該先費一點工夫，從根本上來探求，算學既然極其抽象，何以總一定是思想方面最重要題目之一的理由. 最先，何以事物結局的規律的解釋總必定變成與"算學"有關.讓我們將這一點弄個明白.

現在試注意所有事變相互間的關係：看見電光的時候，我們就聽得雷聲；聽得風聲的時候，我們就看到海中的波瀾；在肅殺的秋天，就會有滿徑的落葉. 隨處都有規律在支配着，所以當已經看到某些情形的時候，我們可以預料其他情形的發現. 觀察這類相互間的關係，並且用一種冷靜頭腦來證明這個變化不斷的世界間的事變只不過是少數叫做"定律"(Laws) 的普遍關係的例子，這就促成科學的進步. 科學研究的目的是：發現變中的常，和特別中的普遍. 用科學的眼光來說，一個蘋果落地，一個行星繞日運動，以及大氣和地球相結都一律看成是引力定律的例子. 將最複雜莫測的情形分析成固定不移的定的例子，具

有這個可能的就是近代的研究.

爲要完全實現這個科學的理想,當然需要有若干個定律;現在先就這類定律研究一下.我們對周圍世界上所有特別事件的知識係由感覺獲得的:有的目視,有的耳聽,有的口嘗,有的鼻嗅,有的推擋,有的磨擦,有時感到寒燠,有時感到疼痛.這些正都是我們親身的感覺;我的牙痛不能作你的牙痛,同時我的眼界不必是你的眼界.但是我們卻將這些感覺的本原歸結到形成世界外表的事物中間的關係上面.所以,牙醫生拔去的只是病牙,並非牙痛.並且不僅這樣,我們也企圖將這個世界設想成一組聯貫的事物,這組事物形成人類所有知識的基礎.這種事物境界並非在我的感覺中是這個,在你的感覺中是那個;而其實兩個人卻共同一個.在牙醫生和病人雙方,總不外是同一個病牙.還有,我們所聞所觸和所見也其實是同一個世界.

所以,由此就容易明瞭,我們敍述這些外物間的關係時,實不應僅憑某些特殊的感覺,甚至還不應僅憑某些特殊人物的感覺.外物境界所有事變經過都能能適合的定律應該竭力用一種不偏不倚的包羅萬象的方式來敍述;無論盲聾,無論天才或凡庸,所接觸到的這種定則總應該是

一律的.

但是到我們旣經拋棄我們的直接感覺時,所遺留的具備有明顯性確定性和普遍性的最有用的部分就構成我們對事物的抽象形體性質的一般觀念;實卽是上述抽象的算學的觀念.由是,逐漸發揮這種意義,使人們漸傾向到宇宙性質的說明一種算學說明的探求,因爲由這個方式,只能形成事物因果共同的一個普遍的觀念,撇開特殊人物或特殊感覺的關涉.舉個例來說,用膳時有人拏"一個蘋果"作題目:"在我眼裏,在你手裏,以及在他的鼻裏和口裏是甚麼東西?"這樣的答案當然是相同的.但是到最後的解決,科學係用"分子"(Molecules)的位置和運動,來敍述一個蘋果;這一個敍述不管我你和他,同時也無分視聽嗅和味.所以,算學的觀念因爲是抽象的,正就是這一種事物因果科學敍述所需的東西.

這一點每因爲一般人眼界過狹,以致多數誤解.畢達哥拉士(Pythagoras)在說"數"(Number)是一切事物的本源的時候,業已暗示到一點.直到近代,一般相信一切事物最終的解釋要從牛頓力學中尋求;這個信仰正不啻說:一切的科學日臻完善,它所有的觀念也就隨同日漸算學化.

第二章

變數

當第一個人，大概是一個希臘人，無須特別指明某種某個特殊的事物，即證明關於同類"某幾個"(Some)事物或異類"任何個"(Any)事物的命題時，這就是"算學"(Mathematics)成爲科學之始．希臘人最初提到的這些命題是關於幾何學方面的；因此，"幾何學"(Geometry)是聰明的希臘人的算學的學問．自從"幾何學"產生以後，中間希臘的算學家雖然隱約的透露過一點"代數學"的觀念；但是"代數學"(Algebra)眞正的開始卻還在幾百年之後．

因爲用"文字"(Letters)來代替"算術"(Arithmetic)中的數目，"代數學"中間就容納了"任何個"(Any)和"某幾個"(Some)兩個觀念．於是，根據 $2+3=3+2$，在"代數學"中我們更使其普遍化，改爲：如果 x 和 y 代表

任何兩個數目，那麼 $x+y=y+x$. 再者代替說 $3>2$; 我們推廣後就說，如果 x 爲"任何"數目，就有"某個"數目（或，"某幾個"數目）y, 可以辦到 $y>x$. 我們剛纔或許注意到，後邊這個假設——因爲嚴格說，究竟是一個假設——對於"哲學"和"算學"兩方面都是非常重要的；因爲賴有這個假設，我們的腦海中得容納進"無限"(Infinity) 的觀念. 或許有人說，利用文字代替自然數的方式既已拋棄，因爲同時暗示算學上用文字代"任何個"數和"某幾個"數兩個觀念有種種方便之故，纔會需要容納進"阿剌伯數碼"(Arabic numerals). 羅馬人一定會限制過年代的紀數，比方他們記爲 $MDCCCCX$ 的樣子，我們就寫做 1910, 留下文字作別個用途.不過，這段言論只是一種揣測之辭. 到"代數學"產生以後，牛頓和萊布尼茨 (Leibniz) 又有"微分學"(Differential calculus) 的發明，再後，關於這些觀念的算學研究也卻暫告停頓不進；直到最近幾年，算學界認識清楚"任何個"和"某幾個"兩個基本觀念與算學的重要關係，結果纔重新開拓出最近算學各種研究的境界.

爲使讀者對這兩個基本觀念的實在情形正確了解起

見,我們現在先做幾個代數題來說明:

(1) 對"任何"數 x,　$x+2=2+x$;　?

(2) 對"某個"數 x,　$x+2=3$;

(3) 對"某幾個"數 x,　$x+2>3$.

第一點,應注意如此地所用的"某幾個"的意義包含的可能程度. 因爲 $x+2=2+x$ 係無論 x 爲何種數都適用,當然"某個"數 x 也適用. 這樣照此地的用法,"某幾個"卻包含任何個的意義. 其次,在第二個例中,$x+2=3$ 實際只有一個數 x, 卽只有 1 這個數. 這樣,"某幾個"或者只是一個數. 但是在第三個例中,凡大於 1 的數 x, 都可以辦到 $x+2>3$. 因此,可作這個例中"某幾個"的答案的數就有無限個. 所以"某幾個"可算是"任何個"和"唯一個"二者中間的東西,不過這兩種極端情形也包括在內.

照理,(2) 和 (3) 兩個題目改換成如下的問題:

(2') 要甚麼數 x, 可以 $x+2=3$;

(3') 要甚麼數 x, 可以 $x+2>3$.

就 (2') 來說,$x+2=3$ 是一個"方程式"(Equation), 並且容易得到它的解答爲 $x=3-2=1$. 在我們提出"方程