

分積微成速

原著者 Kleppner • Ramsey
譯著者 駱 傳 孝

曉園出版社

分積微成速

原著者 Kleppner • Ramsey

譯著者 駱 傳 孝

曉 園 出 版 社

序 言

在開始閱讀本書之前，我想應該先告訴你本書編寫的目的，它希望能讓你用最少的時間和精力學會微積分的基本技巧。它設計成自修的形式，使你在沒有人指導之下也能融會貫通。由於學習微積分最好的方法就是多做題目，你會發現書中有許多練習題。當你做完一個題目之後，可以很快的找到正確答案來核對。而你的學習路徑就依你答題的正確與否而有所不同。如果答對了，你就可依指示進入新的題材；如果答錯了，你就需要尋求進一步的解釋或者再多做一些練習。

我希望本書對各種不同背景的人都有幫助，雖然當初寫這本書的原意為了讓大一新生有足夠的微積分知識來學習物理學，而不必等到正式的微積分課程修習完畢。不過，很快地我們就發現本書在其他方面也很有用。舉例來說，對需要用到一些基本微積分的科系，如經濟學、商學、藥劑學和其他社會科學的大學生或研究生，他們可能根本沒有修過微積分，或者修過但早就忘光了，本書對他們就十分適合。另外對那些急於想要接觸大學課程的高中生，也會發現這本書正是他們所需要的。與其他教科書不同的是，本書強調微積分的技巧和應用，而非嚴謹的理論證明，因此特別適合初學者使用。無論是自修或是作為課堂上的教材，都可使初學者對微積分有個簡明的瞭解。最後，我們特別希望這本書對那些因為興趣而學習微積分的人有所助益。

由於本書讀者的背景不盡相同，因此我們一開始先複習一些

基本微積分會用到的代數和三角。如果你對這些高中課程都還記憶深刻，你可以迅速地瀏覽過去，如果你本來對這些課程就不太熟悉或者已經太久沒摸過數學了，那你就得多花一些時間來複習它。正如你將看到的，本書的編排極富彈性，你可以依個人的需要決定你在每一部份所花的時間。我們希望這樣的安排能夠使你節省許多時間，這也就是我們為什麼要將此書取名為“速成微積分”的原因。

哈佛大學
劍橋，麻塞州

Daniel Kleppner
Norman F. Ramsey

目 錄

1 一些基本概念 1

1.1 函 數.....	1
1.2 圖 形.....	9
1.3 線性及二次函數.....	17
1.4 三角學.....	29
1.5 指數及對數.....	53

2 微 分 67

2.1 極 限.....	67
2.2 速 度.....	84
2.3 導 數.....	100
2.4 函數的圖形和導數.....	107
2.5 微 分.....	117
2.6 幾個微分法則.....	128
2.7 三角函數的微分.....	144
2.8 對數與指數的微分.....	152
2.9 高階導數.....	165
2.10 極大點和極小點.....	170
2.11 微 分.....	180
2.12 複習及習題.....	186
2.13 結 論.....	192

3 積 分 193

3.1	不定積分	193
3.2	積 分	201
3.3	在一曲線下的面積	220
3.4	定積分	240
3.5	積分的一些應用	253
3.6	重積分	264
3.7	結 論	281

4 總複習 285

附錄 A 公式的推導 301

A1	三角函數的和角公式	301
A2	極限定理	302
A3	包含三角函數的極限	306
A4	x^n 的微分	309
A5	三角函數的微分	312
A6	兩函數乘積的微分	313
A7	鏈鎖法則	313
A8	e 的大小	314
A9	$\ln x$ 的微分	315
A10	兩變數均為另一個變數之函數時的微分	316
A11	$dy/dx = 1/(dx/dy)$ 的證明	317
A12	如果兩個函數的導數相等，則此二函數僅相差一常數的證明	318

附錄B 補充教材 319

B1	函數的另一種定義.....	319
B2	偏導數.....	320
B3	隱微分.....	324
B4	反三角函數的微分.....	326
B5	微分方程式.....	329
B6	推薦書目.....	333

總複習題 335

總複習題答案 341

表 345

符號索引 349

索引 353

一些基本概念

1

1.1 函 數

1

雖然“微積分”這個名稱聽起來很恐怖，其實它並不是一門很難的學問。當然你不可能在一夜之間就把它學會，但是只要你肯努力，就可以很快的學會它的基本觀念。

這本書將使你對微積分有所瞭解。在整本書看完後，你應該可以處理許多問題，並且有足夠的基礎去學習更深入的課程。最重要的是你要動手去做，由做題目的過程中你會發現微積分的樂趣。

你所要做的工作就是回答問題和做題目，你的回答決定了學習的路徑。如果你答對了就可以直接進入下一個進度。反之，你做錯了就必須仔細研究答案的解說，並且多做一些題目來看看你是否真的懂了。無論如何，你總能在做完一個題目後，立刻找到正確答案來檢驗。

大部分的題目都是選擇題，各種可能的答案列成 $[a | b | c | d]$ 的形式，在其中一欄圈出你的選擇，正確的答案列於次頁最下面。有些問題必須用文字來解答，在適當的空格中填入你的答案，正確的答案即列於下一個欄位中。

如果你答對了，但是仍然感覺自己需要多加練習，只要按著做錯題目的指示去做就可以了。要切記：貪快，並沒有什麼好處。

進入第 2 欄

2

如果你想先知道本書在講些什麼，下面是它的大綱：第一章是複習一些以後會用到的概念；第二章講微分；第三章講積分；最後一章第四章對前面各章所學到的列出一個簡明的綱要。另外本書還包含了兩個附錄——一個是書中所用到的一些關係式的證明；另一個是討論一些補充課題。此外還有一些附有答案的補充題以及各種有用的表格。

由於我們必須由一些定義開始，所以第一節幾個欄位的寫法較本書其他部分正式得多。

首先我們要複習函數的定義。如果你對此已很熟悉，並且對自變數與因變數的觀念十分清楚，你可以直接跳到第 2 節（14 欄）閱讀。（事實上，在本章中許多地方你都可以跳過，但是也可能有些東西是你所不清楚的，所以花點時間複習一下也是有益的。）

進入第 3 欄

3

函數的定義要用到集合(set)的觀念。你知道集合是什麼嗎？如果你知道，進入第4欄；否則繼續往下讀。

一個集合就是一堆個體湊集而成的群體，這些個體不一定是實際的物體，描述集合的重點就是要對任一特定物能夠很明確的知道它是否屬於此集合。所有組成集合的個體，稱為此集合的元素(element)。一個集合可以用列出它所有元素的方法來描述。例如：數23, 7, 5, 10的集合；或是：張三，李四及王五的集合。

我們也可以用集合構成的法則來描述集合。例如：所有的正偶數（此集合包含了無窮多個元素）。或是：太陽系中所有的行星。

所有實數的集合是一個特別常用的集合，它包含了所有的正實數和負實數，例如5, -4, 0, $1/2$, -3.482, $\sqrt{2}$ 等等，但是它並不包含含有 $\sqrt{-1}$ 的數。

在日常生活中，「集合」的觀念是很普通的。譬如你班上的同學就成一個集合，家裏所有的傢俱也可以看作一個集合。

進入第4欄

4

在下面的空格中，列出所有小於10之正奇數所形成之集合的元素。

答案在第5欄

5

下面就是小於 10 之正奇數集合的所有元素：

$$1, 3, 5, 7, 9$$

進入第 6 欄

6

現在我們準備開始講函數了，由於函數的嚴密定義太過正式，我們先看一個例子。

在某些報紙上，我們可以看到當天各小時的溫度記錄表。由此記錄表，對當天各小時都有一個特定的溫度與它相關。在數學中，這種介於兩種不同事物（或量）之間的關係，我們稱為函數（function）。

函數的正式定義我們列於下面。（如果你曾學過函數的定義與它不大相同的話，請參考附錄 B 1 第 319 頁。）

若集合 A 中的每一元素，在集合 B 中恰有一元素與它關連，這種結合就稱為一個由 A 至 B 的函數。集合 A 稱為此函數的定義域（domain）。

進入第 7 欄

7

通常我們利用一個符號，例如 x ，來代表集合 A （函數的定義域）中的任一元素。此時，符號 x 就稱為自變數（independent variable）。如果用符號 y 代表 x 經由此函數所對應到的集合 B 中之元素，我們稱 y 為因變數（dependent variable）。我們給這兩個變數定義這樣的名稱是相當合理的：在函數的正常應用中，我們在集合 A 中自由的選一個值給自變數 x ， x 的值是自由決定的而不受其他變數的影響。在自變數 x 的值決定了以後，經由函數我們可以得到因變數 y 的值， y 的值是因為 x 值的選定而得到的，所以稱為因變數。

進入第 8 欄

8

讓我們再用第 6 欄各小時溫度的例子來看看是否已清楚的明白這些定義。在下面的空格中填入適當的字。

在此記錄中溫度與時間的結合為一由時間對應到溫度的 _____。如果我們用 h 來表示一天中的各小時， T 來表示溫度，則自變數為 _____，而因變數為 _____。

答案在第 9 欄

9

你應該已經寫出此結合爲一由時間對應到溫度的函數了吧，其中 h 爲自變數， T 爲因變數。

如果你答對了，表示你已清楚了函數的定義，可以跳到第 11 欄。如果還有些混淆，請再讀第 10 欄。

10

由第 6 欄中的定義，由於對一天中的各小時恰有一個溫度與它對應，所以此結合爲一由時間對應到溫度的函數。一天中各小時的集合就是定義中的集合 A 。因此，代表此集合中之元素的 h 爲自變數，溫度 T 爲因變數。這個術語是十分合理的，因爲我們可以自由的選擇一天中的任一時間 h ，並且經由此函數，得到因所選之 h 而決定的溫度 T 。

如果現在你覺得對這些定義已經瞭解了，可以進入第 11 欄。如果還不太確定，應再重讀第 3 欄至第 10 欄。

11

現在我們來研究如何表明一個函數。一個最直接的方法就是將兩集合對應的元素詳細的列出來。另一個方法就是將如何由自變數找出因變數的規則表示出。通常此規則都是用一個方程式表示。例如，一個由自變數 t 對應到因變數 S 的函數，可以用方程式

$$S = 2t^2 + 6t.$$

來表示。由於對任一 t 值，都恰對應到一個 S 值，所以此方程式定義了一個函數。

嚴格的說，在我們還沒有給定自變數所允許的值（定義域）時，此函數並不算是完整的表明。對此，我們有一個簡單的約定：除非特別說明，自變數可以為任一實數，其對應的因變數也是一個實數。所以在上面的例子中， t 可為任意實數。另外，如果我們所給的函數定義為 $y = \sqrt{x}$ ，則 x 被限制為所有的非負實數，因為此時任一負實數將會對應不到一個實數。

在大多數的數學討論中，自變數與因變數通常都使用純數字（pure number），例如 5.1 或 $\sqrt{7}$ 。然而在應用中的變數通常都有其測量單位，例如 5.1 秒或 $\sqrt{7}$ 哩。

12

通常，我們用一個字母來代表函數，例如 f 。如果自變數為 x ，則由函數 f 所對應到的因變數通常寫作 $f(x)$ ，讀作“ f of x ”。在符號 $f(x)$ 之括弧內的量代表自變數的值。因此， $f(x)$ 的意思並不像 $5(3+2)=25$ 中的括弧所代表的乘法。剛開始你也許會對括弧的使用感到有些困惑，但是很快你就能分辨清楚。使用這個符號最大的好處就是我們可以很清楚的用它來表示自變數 x 所對應的因變數值，例如當 $x=3$ 時，其對應的因變數值即為 $f(3)$ 。

進入第 13 欄

13

在數學中，我們最常使用符號 x 來代表自變數， f 代表函數，而用 $y=f(x)$ 來代表因變數。當然我們也可以用其他的符號來代表自變數、函數及因變數。例如： $z=H(r)$ ，讀作“ z 等於 H of r ”。對第 11 欄中的例子， $S=2t^2+6t$ ，我們也可以將其改寫成

$$F(t) = 2t^2 + 6t,$$

此時

$$S = F(t)$$

現在，我們對函數的抽象意義已有所瞭解，接著我們要討論函數的圖形。

進入下一節第 14 欄

1.2 圖形

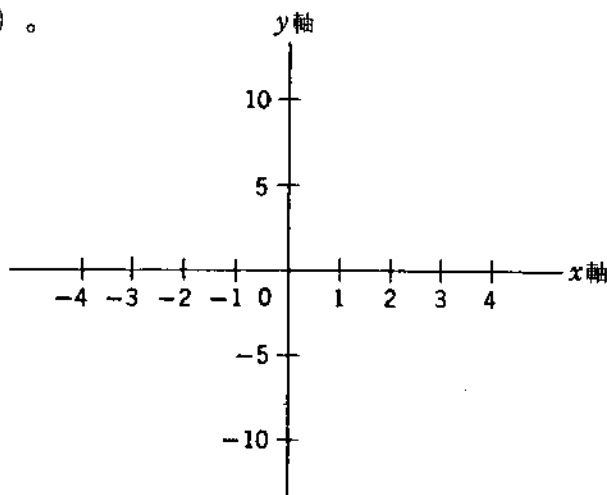
14

如果你對函數的繪圖十分熟悉，你可以跳至 19 欄。否則

進入第 15 欄

15

表示一個函數 $y=f(x)$ 最簡單的方法就是畫出它的圖形。先複習一下，我們是如何建立座標軸的。首先，我們建立兩條互相垂直的直線，並讓其中一條位於水平方向，另一條位於鉛直方向。在水平方向的這條直線，我們通常稱為橫軸 (horizontal axis) 或 x 軸 (x -axis)；而鉛直線稱為縱軸 (vertical axis) 或 y 軸 (y -axis)。兩軸的交點稱為原點 (origin)，而兩軸合起來稱為座標軸 (coordinate axis)。

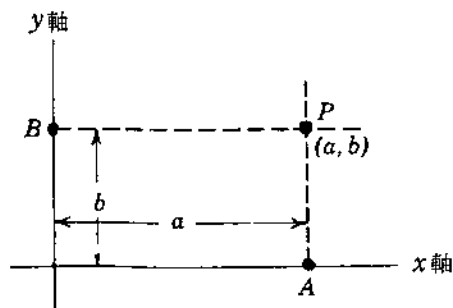


在建立座標軸以後，我們再選擇一個適當的單位長，並以原點為 0 開始在 x 軸上以向右為正，向左為負的方式在軸上刻度。同樣的，我們也在 y 軸以向上為正，向下為負的方式建立一個刻度。在 x 軸與 y 軸上的刻度並不一定要相同， y 與 x 可以有不同的因次和大小，例如可分別代表距離與時間。

進入第 16 欄

16

我們可以用下面的方法來表示經由函數所關連的一個特定數對：令 a 代表自變數 x 的某一特定值，且令 b 表示 $y = f(x)$ 所對應的值。因此， $b = f(a)$ 。在 x 軸上，我們用我們所取的刻度找到對應於 a 的點，即下圖中的 A 點。在 y 軸上，我們找到對應於 b 的點，即圖中的 B 點。



現在我們畫一條通過 A 且與 x 軸垂直的直線，再畫一條通過 B 且與 y 軸垂直的直線。此二直線的交點 P ，可代表一個數對 (a, b) ，分別對應於 x 和 y 。

數 a 通常稱為 P 的 x 值或橫座標 (abscissa)，數 b 通常稱為 P 的 y 值或縱座標 (ordinate)。在用符號 (x, y) 來表示一點時，我們通常規定先寫橫座標 x ，再寫縱座標 y 。

爲了複習這些名詞，請讀者在下面的選擇中，圈出正確的答案。
點 $(5, -3)$ 的

橫座標爲 $[-5 \mid -3 \mid 3 \mid 5]$

縱座標爲 $[-5 \mid -3 \mid 3 \mid 5]$

(請記住，凡是像這類的選擇題，其答案均列於次頁的下端。在進入下一欄之前，請先檢驗你的答案。)

進入第 17 欄