



SHIYONG WEIJIFEN

实用微积分

詹勇虎 主编



东南大学出版社

高等职业教育经济管理类专业教材

实 用 微 积 分

主 编 詹勇虎

参 编 (按姓氏笔画排序)

王 勇 朱张兴

顾慰华 诸炜鑫



东南大学出版社

内 容 提 要

本书是一本为高等职业教育经济管理类专业编写的微积分教材,内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学。

本书是根据高职高专应用性人才的培养目标,以“掌握概念、强化应用、培养技能”为重点,体现了以应用为目的,理论必需,适度够用的原则。注重培养运用数学知识解决实际问题的能力,注重培养数学建模的能力,充分体现数学的应用性。在内容的选取上,削减了繁杂的计算,淡化了数学理论,重视日常的、经济的应用。在课程体系方面给出几何解释、图形表示等,使抽象的概念、定理和结论尽量直观容易理解,还特别注意讲授解题思路,将数学的思想与经济管理中的实际问题紧密结合起来,从而达到学以致用、学以致用的教学目的。

本书既可以作为高等职业技术学院、高等专科学校经济管理类专业的教材,亦可作为成人教育、高等教育自学考试及企事业单位培训和学生自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

实用微积分/詹勇虎主编. —南京:东南大学出版社,
2005.6

ISBN 7-81089-922-8

I. 实... II. 詹... III. 微积分—高等学校:技术
学校—教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 044762 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 南京玉河印刷厂印刷

开本:787 mm×1092 mm 1/16 印张:11.25 字数:280 千字

2005 年 6 月第 1 版 2005 年 6 月第 1 次印刷

印数:1—4 000 册 定价:18.00 元

(凡因印装质量问题,可直接向发行部调换。电话:025—83795802)

高等职业教育经济管理类专业教材编委会

主 任 宁宣熙

副主任 (按姓氏笔画排序)

王传松 王树进 迟镜莹 杭永宝

都国雄 钱廷仙 詹勇虎

秘书长 张绍来

委 员 (按姓氏笔画排序)

丁宗红 王水华 广银芳 邓 晶 华 毅 刘大纶

刘树密 刘葆金 祁洪祥 阮德荣 孙全治 孙国忠

严世英 杜学森 杨晓明 杨海清 杨湘洪 李从如

吴玉林 邱训荣 沈 彤 张 军 张 震 张建军

张晓莺 张维强 张景顺 周忠兴 单大明 居长志

洪 霄 费 俭 顾全根 徐汉文 徐光华 郭 村

黄宝凤 梁建民 敬丽华 蒋兰芝 潘 丰 潘绍来

出版说明

高等职业教育经济管理类专业建设研讨会于2003年12月13日在南京工业职业技术学院召开,参加会议的有来自江苏、安徽、广东、天津、黑龙江、河南、山东、浙江等省市的25所院校的校长、系主任、任课老师等近50位代表。

会议讨论了当前高等职业教育的现状、问题以及课程改革、教材建设等相关议题。与会代表认为,为贯彻高等职业教育的要求,即基础适度够用、加强实践环节、突出职业教育,经常性地开展专业建设的交流研讨,有计划地进行高等职业教育经济管理类专业课程改革的探讨和编写适用的教材十分必要。为了加强院校之间的横向交流与协作,与会代表赞同在原“高等职业教育经济管理类专业建设协作组”的基础上组建“高等职业教育经济管理类专业建设协作网”。

协作网是一个自愿的、民间的、服务型的、非营利性的组织,其目的是在各高等职业技术学院之间建立一个横向交流、协作的平台,开展专业建设、教师培训、教材编写、实验与实习基地的协作等方面的服务,以推进高等职业教育经济管理专业的教学水平的提高。

本次会议总结了第一批教材建设的经验,肯定了成绩,对第二批教材建设提出了更高的要求,建议利用5年的时间,经过反复修订,争取出版一批高质量的高等职业教育经济管理类教材。

“高等职业教育经济管理类专业建设协作网”首批会员单位名单:

南京正德职业技术学院

南京钟山职业技术学院

江苏经贸职业技术学院

南京人口管理干部学院

无锡商业职业技术学院

南京化工职业技术学院

常州建东职业技术学院

常州工程职业技术学院

南京交通职业技术学院

江阴职业技术学院

扬州职业大学

天津滨海职业技术学院

安徽新华职业技术学院

山东纺织职业技术学院

浙江机电职业技术学院

南京商友资讯电子商务应用研究所

东南大学出版社

南京工业职业技术学院

南京金肯职业技术学院

南通纺织职业技术学院

镇江市高等专科学校

常州轻工职业技术学院

常州信息职业技术学院

常州纺织服装职业技术学院

南京铁道职业技术学院

无锡南洋职业技术学院

淮阴工学院

黄河水利职业技术学院

江苏农林职业技术学院

黑龙江农业经济职业技术学院

东南大学经济管理学院

广东番禺职业技术学院

苏州经贸职业技术学院

高等职业教育经济管理类专业教材编委会
2004年6月

序

高等职业教育是整个高等教育体系中的一个重要组成部分。近几年来,我国高等职业教育进入了高速发展时期,其中经济管理类专业学生占有相当大的比例。面对当前难以预测的技术人才市场变化的严峻形势,造就出大批具有技能且适应企业当前需要的生产和管理第一线岗位的合格人才,是人才市场也是时代的需要。

为培养出适应社会需求的毕业生,高等职业教育再也不能模仿、步趋本科教育的方式。要探索适合高等职业教育特点的教育方式,就要真正贯彻高等职业教育的要求,即“基础理论适度够用、加强实践环节、突出职业技能教育的方针”。为此,有计划、有组织地进行高等职业教育经济管理类专业的课程改革和教材建设工作已成为当务之急。

本次教材编写的特点是:面向高等职业教育系统的实际情况,按需施教,讲求实效;既保持理论体系的系统性和方法的科学性,更注重教材的实用性和针对性;对理论部分实施为实用而设、为实用而教;强调以实例为引导、以实训为手段、以实际技能为目标;深入浅出、简明扼要。为了做好教材编写工作,还要求各教材编写组组织具有高等职业教育经验的老师参加教材编写的研讨,集思广益、博采众长。

经过多方的努力,高等职业教育经济管理类专业教材已正式出版发行。这是在几十所高等职业院校积极参与,上百位具有高等职业教育教学经验的老师共同努力下,高效率工作的结果。

值此出版之际,我们谨向所有支持过本套教材出版的各校领导、教务部门同志和广大编写教师表示诚挚的谢意。

本次教材建设,只是我们在高等职业教育经济管理类专业教材建设上走出的第一步。我们将继续努力,跟踪教材的使用效果,不断发现新的问题;同时也希望广大教师和读者不吝赐教和批评指正。我们将不断根据新的形势变化与发展要求对教材进行修订,期望它能在几番磨炼中,成为一套真正适用于高等职业教育的优秀教材。

宁宣熙

2003年11月

前 言

众所周知,微积分是每个接受高等教育者都应该了解的数学分支,它既为学习其他课程打好应有的基础,同时也致力于提高学生的数学素养,因此微积分也是高职高专院校课程设置中的一门十分重要的文化基础课和工具课。

本教材是根据以培养高级应用性人才为目标,应具有较强的动手能力及一定的基础理论知识的要求,充分体现了实用性,在编写过程中,注意做到了以下几点:

(1) 充分体现趣味性. 在本教材的每一章中,增加了一个数学故事,提高了学生学习数学的兴趣,寓学于乐.

(2) 定位准确,针对性强. 以高职高专院校的培养目标为依据,以适用、够用、好用为指导思想,在体现数学思想为主的前提下删繁就简,深入浅出,做到既注重微积分的基础性,适当保持其学科的科学性与系统性,同时更突出它的工具性.

(3) 理论联系实际,注意把微积分与实际问题结合起来,在教材的各个部分都安排了实际应用的内容,有助于培养学生应用微积分解决实际问题的能力,概念的引入都尽可能从实际背景入手,有助于学生的理解与掌握.

参加本书编写的是多年来从事高校数学教学和高职高专高等数学教学的一线的老师. 教材中充分融进了我们自己的教学心得和体验,对教材的每一部分内容我们都结合实际反复推敲,力求使本书能够成为受高职高专院校师生欢迎的一本好的教材,但由于我们对高职高专教育数学课程教学内容体系改革的认识还不是很深刻,对传统的微积分内容和体系改革如何深化、方向是否找准都在探索之中,再加上编者水平有限,书中错误或不当之处在所难免,敬请读者与同行指正.

编 者

2005 年 3 月

目 录

1 函数	(1)
1.1 引言	(2)
1.1.1 学一点数学	(2)
1.1.2 经济关系的数学表示——经济数学模型	(3)
1.1.3 相关关系和函数关系	(4)
1.2 函数	(5)
1.2.1 函数的定义	(5)
1.2.2 函数的表示法	(8)
1.2.3 函数的几种特性	(9)
习题 1.1	(14)
1.3 反函数与基本初等函数	(15)
1.3.1 反函数的概念	(15)
1.3.2 基本初等函数	(17)
习题 1.2	(21)
1.4 经济函数	(21)
1.4.1 需求函数	(21)
1.4.2 供应函数	(22)
1.4.3 生产函数	(22)
1.4.4 消费函数	(23)
1.4.5 成本函数	(23)
1.4.6 收入函数	(23)
1.4.7 利润函数	(23)
1.4.8 经济函数在经济管理中的应用	(24)
1.5 复合函数、初等函数	(25)
1.5.1 复合函数	(25)
1.5.2 初等函数	(28)
1.5.3 初等函数的分类	(29)
习题 1.3	(29)
2 极限与连续	(31)
2.1 引出极限概念的实例	(32)
2.2 函数极限的定义	(35)
2.3 无穷小量与无穷大量	(38)
2.3.1 无穷小量	(38)
2.3.2 无穷大量	(38)

2.3.3 无穷小的性质	(39)
2.3.4 无穷小量与无穷大量的关系	(39)
2.3.5 无穷小量的比较	(40)
习题 2.1	(41)
2.4 极限的四则运算	(42)
2.5 两个重要极限	(45)
2.5.1 第一个重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	(45)
2.5.2 第二个重要极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	(46)
2.6 极限概念在经济学中的几个应用	(48)
2.6.1 指数模型·极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的经济学意义	(48)
2.6.2 永续年金问题	(49)
2.6.3 存款货币的创造机制	(50)
习题 2.2	(51)
2.7 函数的连续性	(52)
2.7.1 函数的增量	(52)
2.7.2 函数连续性的定义	(53)
2.7.3 初等函数的连续性	(55)
2.8 函数的间断点	(57)
2.8.1 函数间断点的定义	(57)
2.8.2 间断点的分类	(59)
习题 2.3	(60)
3 导数与微分	(62)
3.1 导数的概念	(63)
3.1.1 经济学中边际成本的概念	(63)
3.1.2 导数的定义	(63)
3.1.3 导数的几何意义	(65)
3.1.4 左、右导数的定义	(66)
3.1.5 可导与连续的关系	(67)
习题 3.1	(67)
3.2 导数的基本公式与运算法则	(68)
3.2.1 一些基本初等函数的导数公式	(68)
3.2.2 函数的和、差、积、商的求导法则	(69)
3.2.3 反函数的导数	(71)
3.2.4 复合函数求导法则	(72)
3.2.5 隐函数求导法和对数求导法	(73)
3.2.6 基本初等函数的求导公式	(74)
习题 3.2	(75)

3.3 高阶导数	(76)
3.3.1 高阶导数的概念	(76)
3.4 函数的微分	(77)
3.4.1 微分的概念	(77)
3.4.2 微分的几何意义	(79)
3.4.3 微分公式与微分运算法则	(79)
3.4.4 微分形式的不变性	(80)
3.4.5 微分在近似计算中的应用	(80)
习题 3.3	(81)
4 导数的应用	(83)
4.1 函数的单调性与极值	(83)
4.1.1 函数单调性的判定法	(83)
4.1.2 函数的极值	(84)
习题 4.1	(88)
4.2 曲线的凹向与拐点	(88)
习题 4.2	(90)
4.3 函数的最值及其在经济学中的应用	(90)
4.3.1 函数的最值	(90)
4.3.2 经济应用举例	(91)
习题 4.3	(93)
4.4 变化率在经济学中的应用	(93)
4.4.1 弹性函数	(93)
4.4.2 需求弹性	(94)
4.4.3 供给弹性	(94)
习题 4.4	(95)
5 不定积分	(96)
5.1 不定积分的概念	(97)
5.1.1 原函数	(97)
5.1.2 不定积分	(98)
5.2 不定积分的性质与基本积分公式	(98)
5.2.1 不定积分的性质	(98)
5.2.2 基本积分公式	(99)
5.3 不定积分法一: 直接积分法	(100)
5.4 不定积分法二: 换元积分法	(102)
5.4.1 第一类换元法(凑微分法)	(102)
5.4.2 第二类换元积分法	(109)
5.5 分部积分法	(112)
习题 5.1	(115)

6 定积分	(118)
6.1 定积分的概念与性质	(118)
6.1.1 定积分问题的实例	(118)
6.1.2 定积分的定义	(120)
6.1.3 定积分的几何意义	(121)
6.1.4 定积分的性质	(122)
习题 6.1	(123)
6.2 牛顿-莱布尼茨公式	(124)
习题 6.2	(125)
6.3 定积分的换元积分法与分部积分法	(126)
6.3.1 定积分的换元积分法	(126)
6.3.2 定积分的分部积分法	(129)
习题 6.3	(129)
6.4 无穷区间上的广义积分	(130)
6.4.1 变上限的定积分	(130)
6.4.2 无穷区间上的广义积分	(131)
习题 6.4	(132)
6.5 定积分在经济分析中的应用	(132)
6.5.1 由边际函数求原经济函数	(132)
6.5.2 边际函数求最优化问题	(134)
习题 6.5	(135)
7 多元函数微分学	(136)
7.1 空间解析几何简介	(137)
7.1.1 空间直角坐标系	(137)
7.1.2 空间两点之间的距离	(137)
7.1.3 曲面与方程	(138)
习题 7.1	(140)
7.2 二元函数的概念	(140)
7.2.1 二元函数的定义	(140)
7.2.2 二元函数的定义域及其几何意义	(140)
习题 7.2	(141)
7.3 二元函数的极限与连续	(142)
7.3.1 二元函数的极限	(142)
7.3.2 二元函数的连续	(143)
习题 7.3	(144)
7.4 偏导数与全微分	(144)
7.4.1 偏导数的定义及计算方法	(144)
7.4.2 高阶偏导数	(146)
7.4.3 全微分	(147)

习题 7.4	(147)
7.5 二元复合函数的求导法则	(148)
习题 7.5	(149)
7.6 二元隐函数的求导法则	(149)
习题 7.6	(151)
7.7 二元函数的极值与条件极值	(151)
7.7.1 二元函数的极值	(151)
7.7.2 二元函数的条件极值	(152)
习题 7.7	(154)
7.8 二元函数微分学在经济分析中的应用	(154)
7.8.1 边际成本	(154)
7.8.2 求最大利润的问题	(155)
习题 7.8	(156)
习题参考答案	(157)
参考文献	(165)

函数

数学史上的一座丰碑

大家可曾知道,在漫长的数学发展史上,具有划时代意义的事件是微积分的创立.因为微积分的诞生,标志着数学的发展历程,由常量数学(初等数学)进入了变量数学(高等数学)的发展阶段,人类社会进化到了由个体作坊的手工生产步入社会化的机器大生产的现代文明阶段.可以说,没有微积分的数学成果,就不会有现代文明社会,因为现代科学技术及其物质文明的创造,都要在微积分的数学基础上才能发展起来.

可是,大家不禁要问,这微积分的开拓者或者创始人是谁呢?要回答这个问题,就得翻开历史了.打开历史卷宗,我们就会知道,当人类进入 17 世纪的时候,才产生了微积分.因为历史告诉我们,17 世纪最伟大的数学成果,是解析几何和微积分的产生.这两项数学成就,在人类的历史上产生了划时代的意义.可是,你知道为其立下丰功伟绩的数学家是谁吗?是赫赫有名的法国数学家费尔马和笛卡儿以及英国的大数学家及物理学家牛顿和德国的大数学家及自然科学家莱布尼茨.

费尔马和笛卡儿在 17 世纪上半叶潜心研究并且创立了解析几何学.其中我们经常使用的笛卡儿坐标法,就是这时期的重要成果.由于笛卡儿建立了坐标系,引进了变量和函数的概念,从而把几何学和代数学密切联系起来了.这是数学发展的一个转折点,也是变量数学发展的一个重要里程碑,人称变量数学发展的“第一个决定性步骤”.

之后,牛顿和莱布尼茨在 17 世纪后半叶,几乎是同时,但却是各自独立地完成了微积分的创建工作,人称变量数学发展的“第二个决定性步骤”.因为事实是这样,当时的牛顿从物理学的观点上研究了数学,所以 1687 年在他出版的《自然哲学的数学原理》一书中,首先把微积分的基本原理应用到天体力学的研究中,获得成功.而莱布尼茨则从几何学的角度论述了微积分,所以他从 1684 年起就陆续发表了一系列微积分著作,力图采用普遍方法来解决数学分析中的一些问题.例如 1686 年他发表的第一篇积分学论文,就可以求出原函数,以后他和牛顿又都各自独立地创立了微积分基本定理,即牛顿-莱布尼茨公式.从而在微分学和积分学之间架起了一座桥梁,沟通了两者之间的联系,这在当时是变量数学的重大发现和卓越成果.此外莱布尼茨还创造了许多非常优良的数学符号,例如微分记号 dx , 积分记号 $\int y dx$, 导数记号 $\frac{dy}{dx}$ 等等,对微积分的发展影响极大,直到现在还在使用.

那么,为什么微积分会在这 17 世纪产生,而不在别的什么时期呢?这得让我们联系到 17 世纪的欧洲了.当时欧洲正处在自由资本主义发展的初期,由于生产力的大解放,带来学术思想的空前活跃,光是涉足“微积分”这块神秘领域的学者就不下百人,包括十几位鼎鼎有名的大数学家和几十位小数学家.而牛顿和莱布尼茨则是这支队伍中的佼佼者,他们集同行之大成,都各自独立地作出了自己开创性的历史贡献.所以数学史上均公认牛顿和莱布尼茨

是微积分的创始人.以后三百多年的实践证明:现代科学技术和现代物质文明,很少有几处可以离开微积分或以微积分为基础的数学分科.所以微积分的创立,是数学史上的一座丰碑,也是人类获得的宝贵财富.

可是不幸的是,牛顿和莱布尼茨的开创性成果,却引来了历史上所谓“优先权”的争论,从而使数学界分裂成两派.欧洲大陆的数学家,尤其是瑞士数学家雅科布·贝努利(1654—1705)和约翰·贝努利(1667—1748)兄弟支持莱布尼茨,而英国数学家则捍卫牛顿.两派发生激烈争论,甚至敌对和嘲笑.直到牛顿和莱布尼茨逝世后,经过调查才得以证实:他们确实是各自独立地创立了微积分,只不过牛顿先于莱布尼茨制定了微积分体系,而莱布尼茨则早于牛顿公开发表了微积分的相关内容.

这一事件的直接后果是:英国和欧洲大陆的数学家停止了思想交换,使英国人在以后的数学上落后于欧洲大陆大约一百年.

1.1 引言

1.1.1 学一点数学

经济管理专业的学生也要学点数学,这就要求我们要弄清什么是数学.什么是数学呢?数学是研究数与形的科学.或者,一般地,数学是研究数量关系、空间形式和思维方法的科学.

经济工作者,离不开对经济关系进行计量,也就是要以经济理论为基础,以数学方法和计算技术为工具,去研究宏观和微观经济问题的数量关系.这时数学显得更为重要.正如马克思说过的那样:“分析经济形式既不能用显微镜,也不能用化学试剂,二者必须用抽象力来代替.”马克思认为:“一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步.”

当然,数学又包含了许多分科.例如,在经济数学中就包括了初等数学和许多高等数学的内容.

那么,什么是初等数学和高等数学呢?初等数学(包括算术、代数、几何、三角等)研究的是常量和相对静止状态.高等数学,例如其中的主要部分微积分,研究的是变量和运动.

但是,什么是常量和变量呢?所谓常量,就是不变的量,即在研究的过程中不起变化,保持一定数值的量.在研究的过程中变化着的量,也就是取不同数值的量,叫变量.

整个数学,包括初等数学和高等数学以及各种专门数学,都是以形和数作为研究对象的.

同时数学还是一种思维方法,一种推理方法,可以用它来解决科学研究、企业管理乃至行政管理中提出的各种问题.例如,用数学方法可以去判断一个想法是否正确,或者是否大概正确.例如,爱因斯坦早在1905年就能写出公式,预报从原子弹爆炸中获得的能量;天文学中可以用数学公式来预报日食;航天事业可以用数学公式来预报人造地球卫星的飞行轨道;经济学中可以用经济数学来研究边际问题、弹性问题、最优系列问题、人口问题等等.例如1957年,马寅初教授就曾用数学方法计算出我国20年后的人口总数,提出控制人口,节制生育,提高中华民族人口素质的科学论证.在市场经济中,可以用数学来计算由于物价上涨对该商品购买力的影响.在微观经济管理,可以用经济数学来计算该产品的最大利润

和最大经济效益. 所以人们说, 数学具有预报事件的能力.

同时, 数学也是一种语言, 一种用各种符号表达的语言, 这种语言能为世界上所有文明人种所理解. 有人甚至认为, 数学也将是其他星球上的居民(如果有的话)也能理解的语言. 因为它是一种像音乐那样具有对称性、规律性、模型化和令人喜悦的有节奏的乐章.

当然, 随着电子计算机的广泛应用以及国内外市场竞争的日益激烈, 一个经理或厂长如果不会用定量化的方法管理企业, 提供管理信息方面的准确数字, 作出正确的判断和决策, 这个经理或厂长也是当不好的. 成千上万个企业如果都是这样, 那么中华民族的伟大复兴就会成为泡影. 正因为这样, 所以我们还应该学一点数学, 特别是经济应用方面的高等数学.

对经济管理专业的学生来说, 以经济管理为目标, 学习高等数学中的哪些内容呢? 广学博采行不行? 当然不行, 因为我们要学习的内容简直太多了. 我们常用“知识爆炸”来形容我们当今的时代. 这就是说, 现在全世界的知识总量正在急剧增长. 据统计, 最近 10 年全世界的新发明、新创造, 比过去 2 000 年的总和还要多, 科学知识增长率达到 1 205%, 科学杂志每 5 年增加 1 倍, 平均每 1 分钟出版 1 种书. 数学是总的科学体系中的一大门类, 其发展之迅速, 内容之丰富, 也早已为世人所知. 所以我们学习数学, 不可能什么都学, 也就是说, 在有限的时间内要抓住重点, 学一点微积分, 主要学习一元函数的微分和积分. 学好这部分内容, 就能为学习高等数学的其他方面以及专业课程, 打下一定的基础. 本着这个目的, 我们特为你编写了这本《实用微积分》教材, 希望为你的学习提供方便. 学好这本书, 大约需要 60 学时左右.

1.1.2 经济关系的数学表示——经济数学模型

经济数学模型就是经济对象的数学模型. 人所熟知的物理学中的许多基本公式, 如电学中的欧姆定律 $V = IR$, 力学中的牛顿第二定律 $F = ma$ 等等, 都是数学模型的例子. 模型是实物、过程、现象以及某一对象的行为方式的表示形式. 数学模型是将某一现象的特征或者本质给以数学表述的数学关系式. 它是一个或一组数学公式, 这些数学公式从数量方面揭示了研究对象的固有特征和运动规律. 但是客观世界如此纷繁复杂, 能用数学公式表示的事物毕竟有限, 所以在许多情况下, 与现象完全吻合的数学模型实属难得. 一方面模型既要反映实际, 另一方面又不能与实际完全一样. 因此评价一个模型的质量及其功能, 是以它与实际情况的近似程度为转移的. 首先模型要尽量接近真实, 其次模型又要越简单越好, 使其便于操作、分析和迅速取得结果. 所以真实和简单是衡量一个模型好坏的两大标志. 一个好的数学模型不仅客观地反映了实际, 而且它还是简单明了的, 便于运用和处理. 由于这些特点, 使数学模型在科学技术的各个领域得到了广泛的应用, 成为人们研究客观世界的有力工具之一.

经济学和其他自然科学一样, 如果把某一个经济问题列入研究对象, 也可以建立一个经济问题的数学模型. 经济数学模型是经济模型的一种. 例如在微观经济中, 某一产品的成本模型, 就是一种经济数学模型. 通过成本模型可以预测和控制某一产品的成本. 我们知道, 对经济现象不仅要进行定性研究, 而且要进行定量分析. 因此, 在应用数学方法研究经济现象的过程中产生的经济数学模型, 最终将是一组(或一个)数学公式. 就是说, 在建模过程中, 要按照经济理论, 分析所研究的经济现象, 找出经济变量之间可能存在的依存关系, 把问题作为因变量, 把影响问题的主要因素作为自变量, 非主要因素可以纳入随机项, 然后作出某种

假设和抽象,按照某种结构关系,用一组数学上彼此独立,互不矛盾,完整有解的联立方程式(或单一方程)表示.例如,上面所说的成本模型就是一种微观的经济函数模型.以后我们将会知道,在成本模型中,某一产品的成本,可以由成本函数确定,也就是当投入要素价格 $\omega_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ 给定后,则成本就是产出量 Y 的函数:

$$C(Y) = C(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n; Y)$$

这样有了成本函数,就可以确定或预报某一产品的成本了.

又如在市场经济中,研究消费者对某种商品的需求行为时,可以把商品需求量和商品价格等这样一些经济量作为主要的研究对象,并称它们为经济变量.研究经济数学模型,就是研究经济变量之间的数量关系,这种数量关系可以用数学语言表述为因变量和自变量之间的函数关系,列出函数或方程的具体形式.由于商品的需求量首先受到商品价格的影响,因此需求量可以看作因变量,价格可以看作自变量.这样对该种商品就可以建立一个需求函数的数学模型了.按照这个模型,可以解释商品价格对商品销售量的影响程度和波动情况.

可见经济数学模型是解决经济问题的基本方法之一.经济学和数学的结合,为经济管理工作开辟了广阔途径.正因为这样,所以经济工作者才热衷于研究它,为提高经济效益和管理水平服务.

经济数学模型有各种类型,例如有预报与决策模型、控制与优化模型、规划与管理模型等.以预报模型为例,就有生产过程中产品质量指标的预报模型,以及气象预报、人口预报、经济增长预报模型等.“凡事预则立”,通过预报模型,人们可以预先获得相关信息和警示,避免重大事故发生.所以,一个好的经济数学模型的建立,是经济数学模型研究中的关键所在.

1.1.3 相关关系和函数关系

在经济数学模型的建模过程中,根据不同的建模目的和实际要求,可以选择适当的数学方法来获得你所满意的模型.对于大量社会经济问题,人们习惯采用数理统计方法,即采用相关分析和回归分析的方法,来得到现实世界中,某一特定(经济)对象数量规律的数学公式、图形或算法.这就是这一特定(经济)对象,为了一个特定目的,反映其特有内在规律的(经济)数学模型.

众所周知,相关分析的研究对象是相关关系.在相关分析的基础上,还要进一步进行回归分析,才能得到反映某一社会经济问题的数学模型,并用于预测分析.而在回归分析中,还应用到函数关系,所以说函数关系是相关分析并进而进行回归分析的必要工具.

进一步研究表明,在自然现象和社会现象中,的确大量存在以上两种数量关系,即相关关系和函数关系.也可以说,相关关系和函数关系这两种数量关系可以涵盖自然现象和社会现象的所有领域中.所以我们有必要对这两种数量关系作进一步的认识.

现在讨论什么是相关关系?所谓相关关系,是指某一现象的各因素之间由于受随机因素的影响,在数量上存在着非确定性的相互依存关系.例如在一定限度内,施肥量和粮食产量之间、劳动生产率和利润之间、银行利率与存款额之间、出口额与国内生产总值(GDP)之间等等都存在着这类关系.比如说,施肥量增加,粮食产量一般会增多,但是对于同样多的施肥量用于不同地块时,又可能会出现不同的单位面积产量,这是为什么呢?原因很简单,这是因为决定粮食产量的因素是多方面的,它不仅与施肥量有关,而且同时还与种子的质量、

土壤性质、田间管理、气象条件等随机因素有关. 所以粮食产量虽然与施肥量有关, 但是在数量上不是唯一确定的.

函数关系是另一类数量关系, 它是某一现象的各因素之间, 存在着的唯一确定的数量关系. 在这种关系中, 当某一因素(原因因素——自变量)确定后, 与之相关的另一因素(结果因素——因变量)就会唯一确定. 例如圆的面积和半径之间, 当半径确定之后, 圆的面积就会唯一确定; 商品销售额和销售量之间, 在价格不变的条件下, 销售收入可由销售量唯一确定, 等等. 这种数量上的函数关系, 在自然与社会现象中, 几乎到处都是.

前已述及, 相关关系是相关分析的研究对象. 而函数关系则是另一种方法的研究对象, 它是数学领域中微积分的研究对象. 但是相关关系和函数关系这两类不同的数量关系也不是截然分开的, 它们之间有着密切的联系. 例如, 由于测量误差等原因, 函数关系往往需要通过相关关系才能表现出来. 相反, 在回归分析中, 又往往要将原本属于相关分析的相关关系, 则要借助函数关系的表达式来加以描述. 以后我们将会知道, 在统计分析中, 用来表明二因素线性相关程度的指标——相关系数, 当它的绝对值等于 1 时, 相关关系就会转化成函数关系. 所以函数关系至关重要, 深入研究函数关系应该是必然之中.

1.2 函数

1.2.1 函数的定义

定义 1.1 设 X 和 Y 是两个实数集, 如果按照某一确定的对应规则 f , 对每一个 $x \in X$, 都有唯一确定的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 f 是由 X 到 Y 的一个函数关系, 并称 x 为自变量, y 为因变量, 或 y 是 x 的一个(单值)函数, 记作

$$y = f(x) \quad (x \in X)$$

其中 f 称为函数符号, 用以表示由 x 到 y 的对应规则, 即用来表示根据自变量的取值去确定因变量取值的规则.

下面, 我们举两个建立函数关系的例子.

例 1.2.1 设本金为 P , 年利率为 i , 每年结算一次, 则存期为 t 年的本利和按复利计算为

$$S = P(1+i)^t \quad (t \geq 0) \quad (1.1)$$

其中 P 和 i 是常数, S 和 t 是相互关联的两个变量, 并且 t 是自变量, S 是因变量. 根据函数定义, 本利和 S 是存期 t 的函数, 即

$$S = f(t) = P(1+i)^t \quad (t \geq 0)$$

这里, 根据自变量 t 的取值去确定因变量 S 的取值规则 f , 是以 $(1+i)$ 为底的指数函数形式.

注意到资金的时间价值概念(即当一定量的货币转化成资本使用时, 由于时间的推移而产生的增值现象), 在财务管理中, 称式(1.1)中的本金 P 为复利现值, 并称 S 为 P 的复利终值. 即现在价值为 P 的金额, 按复利方式计算的在 t 年末时刻的金额.

例 1.2.2 在物流业的线路规划设计中, 往往出现物流中转站的选址问题. 例如有一条南北贯通的铁路线经过 A 、 B 两地, 两地相距 150 km, 又工厂 C 位于 B 地的正西方向 20 km