《数学通报》组织专家编写

数学高考研究与复习

（理科）

中央民族学院出版社

前 言

本书由数学教育专家、命题专家、对高考及高考复习有深入研究和丰富教学经验的特级、高级教师经多次讨论、研究并取得共识后编写的. 书中对国家教委考试中心制定的《数学科考试说明》深层次的释析是指导高中数学总复习时“方向性”与“层次性”的把握上较权威性的论述.

本书按“考试说明”分十三章，在每一章的开始都综述了本章的考试内容、考试要求、在高考中的位置及知识点的个数. 每章按内容又分若干节，每一节依“考试说明”列出若干释析性的条目，对每一个观点配以若干典型例题，对例题进行了分析、评述，这是作者丰富经验的结晶；在每一节和每章的后边配有若干练习题和习题. 在全书的后边配备了五套综合练习题，其中两套还给出了考查的目标和评分标准，供命题者和读者参考.

本书是教研员、高中数学教师及高三学生的研究、教学和复习用书.

编 者

1993 年 7 月　北京

目　录

高考数学科考试目标…… 1
第一章　幂函数、指数函数和对数函数…… 1
习题一…… 12
答案或提示…… 13
第二章　三角函数的图象和性质…… 15
习题二…… 27
答案或提示…… 29
第三章　两角和与差的三角函数…… 31
习题三…… 43
答案或提示…… 44
第四章　反三角函数和简单三角方程…… 45
习题四…… 51
答案或提示…… 51
第五章　不等式…… 53
习题五…… 65
答案或提示…… 66
第六章　数列、极限、数学归纳法…… 68
习题六…… 82
答案或提示…… 83
第七章　复数…… 85
习题七…… 95
答案或提示…… 97
第八章　排列、组合、二项式定理…… 99
习题八…… 106
答案或提示…… 107
第九章　直线和平面…… 108
习题九…… 116
答案或提示…… 117
第十章　多面体和旋转体…… 120
习题十…… 130
答案或提示…… 130
第十一章　直线…… 132
习题十一…… 143
答案或提示…… 144
第十二章　圆锥曲线…… 145
习题十二…… 159
答案或提示…… 161
第十三章　参数方程、极坐标…… 164
习题十三…… 172
答案或提示…… 173
综合练习(一)…… 174
综合练习(二)…… 176
综合练习(三)…… 178
综合练习(四)…… 180
综合练习(五)…… 181
答案…… 183

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

本章的主要内容有集合的有关概念与运算；函数的概念与性质；反函数的概念与图象；幂函数、指数函数、对数函数的定义、图象和性质；指数方程和对数方程. 以上共含有 13 个知识点.

“函数”是高中数学重要的一章，它的内容丰富，所占教学的课时较多，运用函数知识分析与解决其他数学问题也是十分重要的，因此它是学好高中数学的基础之一. 此外，函数思想是解决数学问题的重要数学思想之一，它的应用广泛，贯穿于整个高中数学中. 基于上述三方面的原因，“函数”在高考试题中占有重要的地位，所占比例要高于课时中的比例. 其中集合，函数三要素，函数图象，函数性质，反函数，二次函数，幂函数、指数函数和对数函数，指数方程和对数方程等在高考试题中是经常出现的.

【考试内容】

集合. 子集、交集、并集、补集.

映射. 函数(函数的记号、定义域、值域).

幂函数. 函数的单调性. 函数的奇偶性.

反函数. 互为反函数的函数图象间的关系.

指数函数. 对数函数. 换底公式. 简单的指数方程和对数方程.

【考试要求】

(1) 理解集合、子集、交集、并集、补集的概念. 了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能掌握有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合.

(2) 了解映射的概念，在此基础上理解函数及其有关的概念，掌握互为反函数的函数图象间的关系.

(3) 理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断一些简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性与图象的对称性的关系描绘函数图象.

(4) 掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念及其图象和性质，并会解简单的指数方程和对数方程.

§1—1　集　合

在高考中，集合几乎是每年必考的内容之一. 一般地说，以两种方式进行考查. 一是考查集合本身的知识，二是考查集合语言与集合思想的运用，后者如函数的定义域，方程与不等式的解集，排列组合问题，解析几何中的曲线间的相交问题，等等. 这也就是考查把集合作为工具在其他数学问题中的运用.

本节主要讨论上述第一类问题，也涉及一些第二类问题，后者将主要分散在后续的章节之中.

一、用列举法或描述法给出集合，考查

1. 空集与全集的概念(如例 2)；

2. 元素与集合之间、集合与集合之间的关系(如例 3、例 4)；

3. 集合的交、并、补运算(如例 1、例 5)，这是考查的重点.

二、不给出集合中的元素，只给出若干个抽象的集合及其某些关系，运用文氏图解决有关的问题(如例 6).

三、计算集合中子集的个数，这涉及到组合问题(如例 7).

上面三方面的考查，一般多以选择题①的形式出现，多数属于容易题(难度为 0.7 以上)，少数属于中等题(难度为 0.4—0.7).

例 1　设全集 I 为自然数集 N，$E=\{2n|n\in N\}$，$F=\{4n|n\in N\}$，那么集合 N 可以表示成(　　).

(A) $E\cap F$　　(B) $\overline{E}\cup F$

(C) $E\cup\overline{F}$　　(D) $\overline{E}\cup\overline{F}$

---

① 在目前的高考试题中，选择题都是“四选一”型的，即代号为 A、B、C、D 的四个结论中，只有一个是正确的. 本书中的选择题，也都是这种类型的，以后不再说明.

(1991 年“三南”高考试题，难度 0.68[1])

分析：由于 $E\supset F$，因此可以否定 A、B、D，应该选择 C.

例 2 下列四个集合中，表示空集的是（　　）.

(A) $\{0\}$

(B) $\{(x,y)\mid y^2=-x^2, x\in R, y\in R\}$

(C) $\{x\mid 2x^2+3x-2=0, x\in N\}$

(D) $\{x\mid \sin x+\cos x=\sqrt{2}, x\in R\}$

分析：$\{0\}$是含有元素 0 的集合，不是空集.

$\{(x,y)\mid y^2=-x^2, x\in R, y\in R\}=\{(0,0)\}$，表示坐标系中的原点，不是空集.

$\because$ 方程 $2x^2+3x-2=0$ 的根是 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-2$，都不是正整数，

$\therefore$ $\{x\mid 2x^2+3x-2=0, x\in N\}=\varnothing$.

因此，应该选择 C.

例 3 设集合 $M=\{m\mid m\leqslant\sqrt{10}\}$，又 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，那么（　　）.

(A) $a\subset M$　　　(B) $a\notin M$

(C) $\{a\}\in M$　　　(D) $\{a\}\subset M$

分析：$\because$ $\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$，$\sqrt{10}>0$，

$\therefore$ $\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}\Leftrightarrow 2+2\sqrt{6}+3<10\Leftrightarrow 2\sqrt{6}<5\Leftrightarrow 24<25$.

因此有 $\sqrt{2}+\sqrt{3}<\sqrt{10}$，于是 D 是正确的.

例 4 集合 $M=\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in Z\}$，$N=\{x\mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in Z\}$，则（　　）.

(A) $M=N$　　　(B) $M\supset N$

(C) $M\subset N$　　　(D) $M\cap N=\varnothing$

(1993 年全国新高考试题)

分析：分别令 $k=-1,0,1,2,3,\cdots$，得

$M=\{\cdots,-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\cdots\}$，

$N=\{\cdots,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{5\pi}{4},\cdots\}$，

不难看出，$M\subset N$，因此选择 C.

事实上，M 中的元素是由首项为$\frac{\pi}{4}$，公差分别为$\frac{\pi}{2}$与$-\frac{\pi}{2}$的两串等差数列所组成，而 N 中的元素是由首项为$\frac{\pi}{2}$，公差分别为$\frac{\pi}{4}$与$-\frac{\pi}{4}$的两串等差数列所组成. 由此也能得出 $M\subset N$.

例 5. 设全集为实数集 R，$f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$. $M=\{x\mid f(x)\neq 0\}$，$N=\{x\mid g(x)\neq 0\}$，那么集合$\{x\mid f(x)g(x)=0\}$等于（　）.

(A) $\overline{M}\cap\overline{N}$　　　(B) $\overline{M}\cup N$

(C) $M\cup\overline{N}$　　　(D) $\overline{M}\cup\overline{N}$

(1991 年全国高考试题，理科难度 0.66)

分析：由已知，有

$\overline{M}=\{x\mid f(x)=0\}$，$\overline{N}=\{x\mid g(x)=0\}$

因此 $\overline{M}\cup\overline{N}=\{x\mid f(x)g(x)=0\}$，应该选择 D.

例 6 设 S，T 是两个非空集合，且 $S\not\subseteq T$，$T\not\subseteq S$，令 $X=S\cap T$，那么 $S\cup X$ 等于（　）.

(A) X　　(B) T　　(C) $\varnothing$　　(D) S

(1987 年全国高考试题，理科难度 0.87)

分析：$\because$ $X=S\cap T\subseteq S$，

$\therefore$ $S\cup X=S$，应选择 D.

评述：这个题目也可以借助于文氏图作出判断. 由已知，有如下两种情况：

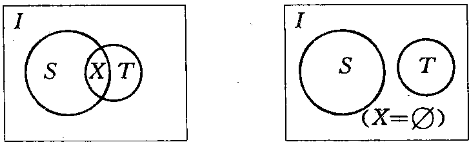

图 1—1

例 7 集合$\{1,2,3\}$的子集总共有（　）.

(A) 7 个　　(B) 8 个

(C) 6 个　　(D) 5 个

(1988 年全国高考试题，理科难度 0.85)

分析：集合$\{1,2,3\}$的子集包含：

$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$，

共计 8 个，因此选择 B.

事实上，上面的做法就是

[1] 本书所注明的全国高考试题的难度，由国家教委考试中心提供.

$C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=8$.

如果依照乘法原理，集合$\{1,2,3\}$的子集都是对于1,2,3这三个元素的"取"与"不取"，因此共有2^3种.

练习1—1

1. 如果$I=\{a,b,c,d,e,\}$，$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，其中I是全集，那么$\overline{M}\cap\overline{N}$等于(　).

(A) $\varnothing$　　(B) $\{d\}$

(C) $\{a,c\}$　　(D) $\{b,e\}$

2. 设$M\{x|x=n,n\in Z\}$，$N=\{x|x=\frac{n}{2},n\in Z\}$，$P=\{x|x=n+\frac{1}{2},n\in Z\}$，那么(　).

(A) $N\subset M$　　(B) $N\subset P$

(C) $N=M\cup P$　　(D) $N=M\cap N$

3. 设全集$I=R$，集合$S=\{x|x=-t^2,t\in R\}$，$T=\{x|x=|t|+5,t\in R\}$. 求$\overline{S\cup T}$.

4. 已知$M=\{x|4x^2-1\leqslant 0\}$，$N=\{x|\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{|x|}\}$，求$M\cup N$与$M\cap N$.

5. 已知$S=\{(x,y)|\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1,x\in R,y\in R\}$，$T=\{(x,y)|y^2=x-1\},x\geqslant 1,y\in R^-\}$，求$A\cap B$.

6. 设全集$I=\{(x,y)|x,y\in R\}$，集合$M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，那么$\overline{M\cup N}$等于(　).

(A) $\varnothing$　　(B) $\{(2,3)\}$

(C) $(2,3)$　　(D) $\{(x,y)|y=x+1\}$

(1990年全国高考试题)

7. 设集合E满足：$\{0,1\}\subseteq E\subset\{0,1,2,3,4\}$，试写出所有的集合$E$.

8. 已知$M=\{x|x\leqslant 1\}$，$N\{x|x>p\}$，要使$M\cap N\neq\varnothing$，则p所满足的条件是(　).

(A) $p>1$　　(B) $p\geqslant 1$

(C) $p<1$　　(D) $p\leqslant 1$

9. 设集合$M=\{x|x>2\}$，$P=\{x|x<3\}$，那么"$x\in M$或$x\in N$"是"$x\in M\cap P$"的(　).

(A) 充分条件但非必要条件

(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 非充分条件也非必要条件

10. 已知$a\in R$，集合$A=\{-3,a^2,a+1\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$. 如果$A\cap B=\{-3\}$，求$A\cup B$.

§1—2　函数的定义、图象和性质

本节内容包含：映射与函数(定义)，函数三要素(定义域、值域与对应法则)，函数的图象和性质(单调性、奇偶性与周期性)，反函数及其图象. 这些内容是函数知识的重要基础，非常重要.

由于上述知识的重要性，在高考试题中，成为每年必考的内容之一. 特别是近几年，加强了对这些知识的考查.

一、关于函数概念的考查，主要是

1. 能根据函数三要素判断两个函数是否为同一个函数.

2. 理解函数符号(对应法则)，掌握函数的三种表示法.

3. 会求函数的定义域与某些函数的值域.

上述三方面的考查，多以选择题与填空题的形式出现，一般多为容易题与中等题.

例1　已知：$A=N$，$B=\{\frac{1}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{7},\cdots\}$，映射$f$：$x\rightarrow y=\frac{2x-1}{2x+1}$ $(x\in A)$，那么在f的作用下，象$\frac{99}{101}$的原象是________.

分析：依题意，有$\frac{2x-1}{2x+1}=\frac{99}{101}$.

由此得$x=50$，所以答案为50.

例2　与函数$y=x$有相同图象的一个函数是(　).

(A) $y=\sqrt{x^2}$　　(B) $y=\frac{x^2}{x}$

(C) $y=a^{\log_a x}$，其中$a>0,a\neq 1$

(D) $y=\log_a a^x$，其中$a>0,a\neq 1$

(1989年全国高考试题，理科难度0.87)

分析：由于

$y=\sqrt{x^2}=|x|$，与$y=x$的对应法则不同；

$y=\frac{x^2}{x}=x\ (x\neq 0)$，与 $y=x$ 的定义域不同；

$y=a^{\log_a x}=x\ (x>0)$，与 $y=x$ 的定义域不同；

$y=\log_a a^x=x\ (x\in R)$，与 $y=x$ 完全相同.

因此选择 D.

例 3 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$，$f(x+1)$ 与 $f(x^2)$.

解：设 $u=\sqrt{x}+1\geqslant 1$，则

$$\sqrt{x}=u-1,\quad x=(u-1)^2.$$

于是 $f(u)=(u-1)^2+2(u-1)$

$=u^2-1\quad(u\geqslant 1)$，

$\therefore\ f(x)=x^2-1\quad(x\geqslant 1)$，

$f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x(x\geqslant 0)$，

$f(x^2)=(x^2)^2-1=x^4-1\quad(x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1)$.

评述：在做此题时，通过换元，把 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$ 化为 $f(u)=u^2-1$，要注意 $f(u)$ 的定义域是 $\{u|u\geqslant 1\}$，这样才能保证转化的等价性. 在求 $f(x+1)$ 与 $f(x^2)$ 时，也要注意定义域. 例如，$f(x+1)$ 与 $f(x^2)$ 的定义域分别是 $\{x|x+1\geqslant 1\}$ 与 $\{x|x^2\geqslant 1\}$，即 $\{x|x\geqslant 0\}$ 与 $\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 1\}$.

例 4 设函数 $y=\lg(x^2-x-2)$ 的定义域为 A，函数 $y=\sqrt{\frac{x+2}{1-x}}$ 的定义域为 B，则 $A\cap B=$______.（1986 年广东高考试题）.

解：$A=\{x|x^2-x-2>0\}$

$=\{x|x<-1$ 或 $x>2\}$，

$B=\left\{x|\frac{x+2}{1-x}\geqslant 0\right\}=\{x|-2\leqslant x<1\}$，

$\therefore\ A\cap B=\{x|-2\leqslant x<-1\}$.

（或 $[-2,-1)$）

例 5 用长为 l 的铁丝弯成下部为矩形，上部为半圆形的框架（如图 1－2）. 若矩形底边长为 $2x$，求此框架围成的面积 y 与 x 的函数式，并写出它的定义域.

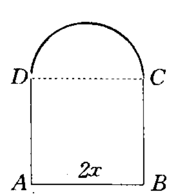

图 1－2

解：设 $AB=2x$，则 $\overset{\frown}{CD}=\pi x$，于是 $AD=\frac{l-2x-\pi x}{2}$，因此

$$y=2x\cdot\frac{l-2x-\pi x}{2}+\frac{\pi x^2}{2},$$

即 $y=-\frac{\pi+4}{2}x^2+lx.$

函数的定义域由下列不等式组确定.

$$\begin{cases}2x>0,\\ \frac{l-2x-\pi x}{2}>0.\end{cases}$$

解之，得 $0<x<\frac{l}{2+\pi}$.

$\therefore$ 函数式是 $y=-\frac{\pi+4}{2}x^2+lx$，定义域是 $(0,\frac{l}{2+\pi})$.

评述：求函数的定义域一般有三类问题. 第一类是给出函数的解析式，此时函数的定义域是使解析式有意义的自变量的取值集合；第二类是实际问题或几何问题，此时除要考虑函数解析式有意义外，还应考虑使实际问题或几何问题有意义；第三类问题是不给出函数的解析式，而由 $f(x)$ 的定义域确定函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域，例如 1985 年全国高考试题：

"设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求函数 $f(x^2)$ 的定义域."这类问题的解法在例 3 中求 $f(x+1)$ 与 $f(x^2)$ 的定义域时已经讲过了.

例 6 求下列函数的值域：

(1) $y=\frac{3}{x^2}\quad(1\leqslant x\leqslant 2)$；

(2) $y=-x^4+x^2+\frac{1}{4}\quad(x\in R)$；

(3) $y=x+\frac{1}{x}+1\quad(x\neq 0)$.

解：(1) 因为在 $[1,2]$ 上，$y=\frac{3}{x^2}$ 是单调减函数，所以函数的值域是 $[\frac{3}{4},3]$.

(2) $y=-x^4+x^2+\frac{1}{4}=-(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$.

$\because\ -(x^2-\frac{1}{2})^2\leqslant 0$，$\therefore\ y\leqslant\frac{1}{2}$，

当 $x^2-\frac{1}{2}=0$，即 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，

$\left(x^2-\frac{1}{2}\right)=0$，此时有 $y=\frac{1}{2}$.

综上可知，$y=-x^4+x^2+\frac{1}{4}$ 的值域是 $(-\infty,\frac{1}{2}]$.

(3) 有多种解法.

解法一：配方法. 分 $x>0$ 与 $x<0$ 两种情况，从略.

解法二：利用平均值不等式做.

当 $x>0$ 时，有

$$y=x+\frac{1}{x}+1\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+1=3,$$

当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，有 $y=3$；

当 $x<0$ 时，有

$$-y=(-x)+\frac{1}{-x}-1$$

$$\geqslant 2\sqrt{(-x)\cdot\frac{1}{(-x)}}-1=1,$$

∴ $y\leqslant -1$，当且仅当 $-x=\frac{1}{-x}$，即 $x=-1$ 时，有 $y=-1$.

综上可知，$y=x+\frac{1}{x}+1$ 的值域是

$$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty).$$

解法三：判别式法.

∵ $y=x+\frac{1}{x}+1$，

∴ $x^2+(1-y)x+1=0$.

∵ 方程有实根，

∴ $\Delta=(1-y)^2-4\geqslant 0$，

即 $(y-1)^2\geqslant 4$，

∴ $y-1\leqslant -2$ 或 $y-1\geqslant 2$，

于是 $y\leqslant -1$ 或 $y\geqslant 3$.

当 $x=-1$ 时，$y=-1$；当 $x=1$ 时，$y=3$.

综上可知，$y=x+\frac{1}{x}+1$ 的值域是

$$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty).$$

评述：求函数的值域是一个较为复杂的问题，因此在选题上要注意“分寸”，不可过难. 上述几个题目介绍了求函数值域的几种常见方法：利用已知函数的值域，利用函数的单调性，以及配方法、公式法(利用平均值不等式)与判别式法. 上述方法与求函数的最大值与最小值的方法密切相关.

二、关于反函数主要考查两类问题

1. 给出函数 $y=f(x)$ 的解析式(其反函数存在，不必论证)，求出它的反函数 $y=f^{-1}(x)$. 一般的解题步骤是：

(1) 由 $y=f(x)$ 反解出 $x=f^{-1}(y)$；

(2) 将 x,y 互换，改写为 $y=f^{-1}(x)$；

(3) 由 $y=f(x)$ 的值域确定反函数的定义域.

2. 利用“函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称”解决有关问题.

以上两类问题中，主要考查第一类问题，大多为选择题.

例 7 求下列函数的反函数：

(1) $y=-\sqrt{x-1}$ $(x\geqslant 1)$；

(2) $y=\log_2(1-x)$ $(x\geqslant 0)$.

解：(1) 由 $y=-\sqrt{x-1}$，得 $y^2=x-1$，

∴ $x=y^2+1$. ∵ $x\geqslant 1$， ∴ $y\leqslant 0$.

于是有 $x=y^2+1$ $(y\leqslant 0)$.

∴ $y=-\sqrt{x-1}$ $(x\geqslant 1)$ 的反函数是

$$y=x^2+1\ (x\leqslant 0).$$

(2) 由 $y=\log_2(1-x)$，得 $x=1-2^y$.

由于 $y=\log_2(1-x)$ $(x\geqslant 0)$ 的定义域是 $[0,1)$，所以它的值域是 $(-\infty,0]$，于是

$$x=1-2^y\quad(y\leqslant 0).$$

∴ $y=\log_2(1-x)$ $(x\geqslant 0)$ 的反函数是

$$y=1-2^x\quad(x\leqslant 0).$$

评述：在求反函数时，要注意所给函数的值域(由其定义域确定)，从而确定反函数的定义域.

例 8 函数 $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 的反函数的定义域是______. (1989 年全国高考试题，理科难度 0.46)

解法一：$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}$.

由 $e^x>0$，得 $0<\frac{2}{e^x+1}<2$.

∴ $-2<-\frac{2}{e^x+1}<0$，

于是　　$-1<y<1$.

∵　$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 的反函数的定义域就是所给函数的值域，

∴　$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 的反函数的定义域是 $(-1,1)$.

解法二：由 $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$，得

$$(y-1)e^x=-(y+1).$$

当 $y\neq1$ 时，有 $e^x=-\frac{y+1}{y-1}$.

∵　$e^x>0$，

∴　$-\frac{y+1}{y-1}>0\Leftrightarrow\frac{y+1}{y-1}<0\Leftrightarrow-1<y<1$.

(以下从略)

例 9　给定实数 a，$a\neq0$ 且 $a\neq1$. 设函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ ($x\in R$ 且 $x\neq\frac{1}{a}$). 证明：这个函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

证明：先求所给函数的反函数.

由 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ $(x\neq\frac{1}{a})$，得

$$(ay-1)x=y-1. \qquad (*)$$

假如 $ay-1=0$，即 $y=\frac{1}{a}$. 又由 (*) 知 $y=1$，于是 $\frac{1}{a}=1$，故 $a=1$，与已知矛盾，所以 $ay-1\neq0$.

因此由 (*) 得　　$x=\frac{y-1}{ay-1}$ $(y\neq\frac{1}{a})$.

这说明函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ $(x\in R,x\neq\frac{1}{a})$ 的反函数是 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ ($x\in R$ 且 $x\neq\frac{1}{a}$)，两者完全相同.

由于 $y=f(x)$ 的图象与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，所以函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}$ ($x\in R$ 且 $x\neq\frac{1}{a}$) 的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

三、函数的图象和性质

1. 函数的图象是函数关系的一种表示，它是从"形"的方面刻划函数的变化规律，通过函数图象，可以形象地反映函数的性质. 利用函数的图象既有助于记忆各类初等函数的性质，又可以运用数形结合的方法去解决某些问题. 在高考中，有关函数的图象主要考查：

(1) 几类初等函数(一次与二次函数、幂函数、指数函数和对数函数、三角函数)的图象特征.

(2) 函数的图象变换，主要是指：

平移变换——函数 $y=f(x)$ 与 $y=f(x+a)+b$ 的图象之间的关系；

伸缩变换——函数 $y=f(x)$ 与 $y=Af(\omega x)$ $(A>0,\omega>0)$ 的图象之间的关系；

对称变换——例如，图象关于 x 轴对称、关于 y 轴对称、关于原点对称.

2. 函数性质

函数性质主要是指函数的单调性、奇偶性与周期性，要求掌握这些性质的意义(定义)，要求会用定义判断函数的奇偶性与单调性，并能运用这些性质解题(函数的周期性将在下一章中复习). 这是高考的重要内容之一，既可以是选择题与填空题，也可以是解答题(大题)，既有容易题与中等题，也有综合性的难题.

例 10　指出下列各小题中的两个函数图象之间的关系：

(1) $y=\frac{1}{3}(x-1)^2$ 与 $y=\frac{1}{3}(x+1)^2+\frac{1}{2}$；

(2) $y=\frac{1}{x}$ 与 $y=\frac{3x+5}{x+1}$；

(3) $y=\log_2x$ 与 $y=\log_{\frac{1}{2}}[4(x-1)]$.

分析：(1) 略.

(2) $y=\frac{3x+5}{x+1}=\frac{3(x+1)+2}{x+1}=3+\frac{2}{x+1}$；

(3) $y=\log_{\frac{1}{2}}[4(x-1)]$
$=-\log_2(x-1)-2$.

解答从略.

例 11　在区间 $(-\infty,0)$ 上为增函数的是 (　　).

(A) $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$　　(B) $y=\frac{x}{1-x}$

(C) $y=-(x+1)^2$　　(D) $y=1+x^2$

(1987 年全国高考试题，理科难度 0.40)

分析：由于

$$y=\frac{x}{1-x}=\frac{-(1-x)+1}{1-x}=-1-\frac{1}{x-1},$$

所以，把 $y=-\frac{1}{x}$ 的图象（它在 $(-\infty,0)$ 上是增函数）向右平移 1 个单位，再向下平移 1 个单位（后者不影响函数的单调性）就得到 $y=\frac{x}{1-x}$ 的图象，它在 $(-\infty,1)$ 上是增函数，因此选择 B.

评述：这是利用函数的图象变换解题的例子之一. 本题也可以用定义判断出 $y=\frac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数，但比较麻烦.

例 12 根据函数单调性的定义，证明函数 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.（1991 年全国高考理科试题，难度为 0.62）

解：设 $-\infty<x_1<x_2<+\infty$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2).$$

$\because$ $x_2>x_1, x_1^2+x_2^2>2|x_1x_2|$,

$\therefore$ $f(x_2)-f(x_1)<0$.

这说明，$f(x_2)<f(x_1)$，故 $f(x)=-x^3+1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

例 13 用定义判断下列函数的奇偶性：

(1) $f_1(x)=x^{-\frac{2n}{2n+1}}(n\in N, x\neq 0)$；

(2) $f_2(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})\ (x\in R)$；

(3) $f_3(x)=\lg x^2+\lg\frac{1}{x^2}\ (x\neq 0)$；

(4) $f_4(x)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x-1})\mathrm{tg}x$.

解：(1) $\because$ $n\in N$,

$\therefore$ $2n$ 是偶函数，$2n+1$ 是奇数.

于是

$$f_1(-x)=(-x)^{-\frac{2n}{2n+1}}=x^{-\frac{2n}{2n+1}}=f_1(x).$$

$\therefore$ $f_1(x)$ 是偶函数.

(2) $\because$ $f_2(-x)$

$$=\log_2\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)$$
$$=\log_2\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$=-\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$$
$$=-f_2(x),$$

$\therefore$ $f_2(x)$ 是奇函数.

(3) $\because$ $f_3(x)=\lg x^2+\lg\frac{1}{x^2}=0$,

$\therefore$ $f_3(-x)=f_3(x)$ 且

$f_3(-x)=-f_3(x)$.

因此，$f_3(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

(4) 函数 $f_4(x)$ 的定义域是 $\{x|x\in R$ 且 $x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in Z\}$，关于原点对称.

$$\because\quad f_4(-x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{-x}-1}\right)\mathrm{tg}(-x)$$
$$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{2^x}{1-2^x}\right)\mathrm{tg}x$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x-1}\right)\mathrm{tg}x=f_4(x),$$

$\therefore$ $f_4(x)$ 为偶函数.

评述：判断函数 $f(x)$ 的奇偶性就是判断 $f(-x)$ 是否等于 $\pm f(x)$，它等价于判断 $f(x)\mp f(-x)$ 是否为零. 由此做(2)与(4)是较为简便的.

例 14 设 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，且当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=x(1+\sqrt[3]{x})$，那么当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)=($　　$)$.

(A) $-x(1+\sqrt[3]{x})$　　(B) $x(1+\sqrt[3]{x})$

(C) $-x(1-\sqrt[3]{x})$　　(D) $x(1-\sqrt[3]{x})$

（1988 年广东高考试题）

分析：设 $x\in(-\infty,0)$，则 $-x\in(0,+\infty)$，于是

$$f(-x)=-x(1+\sqrt[3]{-x})$$
$$=-x(1-\sqrt[3]{x}),$$

又　$f(-x)=-f(x)$,

$\therefore$ $f(x)=x(1-\sqrt[3]{x})$.

应该选择 D.

例 15 设 $h(x)$ 满足 $h(x+a)=\frac{1-h(x)}{1+h(x)}$ $(a\neq 0)$，求证：$h(x)$ 的周期是 $2a$.

证明：$\because$ $h(x+2a)=h(x+a+a)$

$$=\frac{1-h(x+a)}{1+h(x+a)}=\frac{1-\frac{1-h(x)}{1+h(x)}}{1+\frac{1-h(x)}{1+h(x)}}$$
$$=\frac{1+h(x)-1+h(x)}{1+h(x)+1-h(x)}=h(x),$$

$\therefore$ $h(x)$ 的周期是 $2a(a\neq 0)$.

例 16 已知 $f(x)=x^2+c$，且 $f[f(x)]=f(x^2+1)$.

(1) 设 $g(x)=f[f(x)]$，求 $g(x)$ 的解析式；

(2) 设 $\varphi(x)=g(x)-\lambda f(x)$，试问：是否存

在实数 λ,使 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是减函数,并且在 $(-1,0)$ 上是增函数.

解:(1) 由已知,得

$$f[f(x)]=f(x^2+c)=(x^2+c)^2+c,$$
$$f(x^2+1)=(x^2+1)^2+c,$$
$$\therefore\quad (x^2+c)^2+c=(x^2+1)^2+c.$$

由此可得 $c=1$,故

$$g(x)=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2.$$

(2) $\because\quad \varphi(x)=g(x)-\lambda f(x)$
$$=x^4+(2-\lambda)x^2+(2-\lambda),$$

$\therefore\quad \varphi(x_2)-\varphi(x_1)$
$$=(x_1+x_2)(x_2-x_1)[x_1^2+x_2^2+(2-\lambda)]. \qquad ①$$

设 $-\infty<x_1<x_2<-1$,则
$$(x_1+x_2)(x_2-x_1)<0,$$
$$x_1^2+x_2^2+2-\lambda>1+1+2-\lambda=4-\lambda. \qquad ②$$

由①与②,当 $4-\lambda\geqslant 0$,即 $\lambda\leqslant 4$ 时,$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是减函数.

同理,当 $\lambda\geqslant 4$ 时,$\varphi(x)$ 在 $(-1,0)$ 上是增函数.

综上可知,当 $\lambda=4$ 时,$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是减函数并且在 $(-1,0)$ 上是增函数.

练习 1—2

1. 求下列函数的定义域:

   (1) $y=\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}$;　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{\lg(x+1)}}{x^2-x-2}$.

2. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$,求 $\varphi(x)=f(x+m)+f(x-m)$ 的定义域,其中 $m>0$.

3. 已知 $g(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

   (1) 求证:$g(x)+g(y)=g\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$;

   (2) 用定义判断 $g(x)$ 的奇偶性.

4. (1) 设 $f(x+1)=x^2-1$,求 $f(x)$;

   (2) 设 $g(e^x)=x^2-2x-1\ (x\geqslant 0)$,求 $g(x)$.

5. 函数 $y=\dfrac{3x+4}{x+2}$ 的图象(　　).

   (A) 关于点 $(2,-3)$ 对称

   (B) 关于点 $(-2,3)$ 对称

   (C) 关于直线 $x=-2$ 对称

   (D) 关于直线 $y=-3$ 对称

6. 如果直线 $y=ax+\dfrac{1}{2}$ 与直线 $y=\dfrac{1}{3}x+b$ 关于直线 $y=x$ 对称,求 a 与 b 的值.

7. 已知 $f(x)=\dfrac{2}{1-x^2}(x<-1)$,求 $f^{-1}(-\dfrac{2}{3})$ 的值.

8. 已知点 $(2,\dfrac{1}{4})$ 即在函数 $y=2^{ax+b}$ 的图象上,又在它的反函数的图象上,求 a 和 b 的值.

9. 函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数(　　).

   (A) 是奇函数,它在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

   (B) 是偶函数,它在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

   (C) 是奇函数,它在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

   (D) 是偶函数,它在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

   (1992 年全国高考试题)

10. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域是 $\{x|x\in R$,且 $x\neq\pm 1\}$,若 $f(x)$ 是偶函数,$g(x)$ 是奇函数,且 $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{x-1}$,求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的表达式.

11. 用定义证明:

    (1) $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$ 在 $(-\dfrac{b}{2a},+\infty)$ 上是增函数.

    (2) $g(x)=\sqrt{x^2-1}$ 在 $(-\infty,-1)$ 上是减函数.

12. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数,并且是周期为 5 的周期函数,又 $f(1)=a$,求 $f(4)$ 与 $f(5)$ 的值.

13. 求函数 $y=2x+\sqrt{13-4x}\ (x\leqslant\dfrac{13}{4})$ 的最大值.

14. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数,a 和 b 是实数.

    (1) 证明命题"如果 $a+b\geqslant 0$,那么 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$";

    (2) 判断(1)中的命题的逆命题是否正确,并证明你的结论.

§1—3　幂函数、指数函数和对数函数

幂函数、指数函数和对数函数是中学数学中三类重要的基本初等函数,它的定义、图象和

性质是中学函数论的主要内容.同时,研究这三类函数所体现的数学思想方法在中学数学中也具有重要的作用.因此,这一节的内容在高考中占有重要的地位,既可以考查“三基”,又可以考查解决问题时所体现的函数思想、等价转化与分类讨论等数学思想,以及逻辑推理能力.

由于初中所学的二次函数十分重要,是解决高中数学的重要基础,因此这一节也包含对二函数知识的巩固、深化与运用.此外,指数式与对数式的恒等变形,特别是对数换底公式也是高考考查的内容.上述各部分本节也将涉及.

一、二次函数的定义、图象与性质

要全面地、熟练地掌握二次函数的定义、图象与性质,灵活地运用上述知识解决有关问题.在高考中,主要考查

1. 二次函数的对称性;

2. 二次函数的增减性;

3. 二次函数的最值,特别是在指定区间上的最值.

例 1 如果二次函数 $y=3x^2+2(a-1)x+b$在区间$(-\infty,1]$上是减函数,那么(　　).

(A) $a=-2$　　(B) $a=2$

(C) $a\leqslant-2$　　(D) $a\geqslant2$

分析:抛物线 $y=3x^2+2(a-1)x+b$ 的顶点横坐标是$-\frac{2(a-1)}{6}$,即$\frac{1-a}{3}$.因此,它的单调减区间是$(-\infty,\frac{1-a}{3}]$.由$\frac{1-a}{3}\geqslant1$ 得 $a\leqslant-2$,故应选 C.

例 2 如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$,那么(　　).

(A) $f(2)<f(1)<f(4)$

(B) $f(1)<f(2)<f(4)$

(C) $f(2)<f(4)<f(1)$

(D) $f(4)<f(2)<f(1)$

(1992 年全国高考试题,理科难度 0.60)

分析:由 $f(2+t)=f(2-t)$对任意 $t\in R$ 成立,不难得出 $y=f(x)$的对称轴是直线 $x=2$,于是有 $f(2)<f(1)<f(4)$,应该选择 A.

例 3 已知 $f(x)=x^2+1,1\leqslant\lambda\leqslant\frac{3}{2}$,试求 $g(x)=f[f(x)]-2\lambda f(x)$在$[-1,1]$上的最大值与最小值.

解:$\because$ $f[f(x)]=f(x^2+1)$

$$=(x^2+1)^2+1,$$

$\therefore$ $g(x)=(x^2+1)^2+1-2\lambda(x^2+1)$

$$=[x^2-(\lambda-1)]^2+(1-\lambda^2).$$

设 $x^2=t$,则

$y=g(x)=h(t)$

$=[t-(\lambda-1)]^2+(1-\lambda^2),t\in[0,1]$.

$\because$ $1\leqslant\lambda\leqslant\frac{3}{2}$, $\therefore$ $0\leqslant\lambda-1\leqslant\frac{1}{2}$.

综上可知:当 $t=\lambda-1$ 时,$g(x)$有最小值 $1-\lambda^2$;当 $t=1$ 时,$g(x)$有最大值 $5-4\lambda$.

二、幂函数、指数函数与对数函数

这部分内容主要考查:

1. 指数式与对数式的计算与化简.

2. 三类函数的定义(解析式特征,定义域与值域)与图象,以及它们的主要性质.

3. 上述知识的应用,如比较两个数值的大小,函数值正负性的讨论,以及解指数不等式与对数不等式(这一条主要在《不等式》一章中讨论),并能解决某些实际问题.

例 4 $\frac{\log_8 9}{\log_2 3}$的值是(　　).

(A) $\frac{2}{3}$　　(B) 1　　(C) $\frac{3}{2}$　　(D) 2

(1992 年全国高考试题,理科难度 0.86)

分析:由对数换底公式(或其推论)可知答案为$\frac{2}{3}$,故应选择 A.

例 5 解下列各填空题:

(1) $y=x^{-\frac{n}{m}}$(m 是正偶数,n 是正奇数)的定义域是__________;

(2) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}$的值域是______;

(3) $y=\log_{0.5}(4x-x^2)$的定义域是________,值域是________;

(4) 已知镭经过 100 年剩留原来质量的 95.76%.设质量为 1 的镭经过 x 年后的剩留量为 y,则 $y=f(x)$的函数关系式是__________;

(5) 函数 $y=\log_{0.1}(6+x-2x^2)$的单调增区间是__________.

略解：(1) 定义域是$(0,+\infty)$.

(2) 值域是$(0,1]$.

(3) 定义域是$(0,4)$. 由 $4x-x^2=-(x-2)^2+4$ 可知，$y=\log_{0.5}(4x-x^2)$的最大值是 $\log_{0.5}4=-2$，因此它的值域是$[-2,+\infty)$.

(4) 由 $a^{100}=95.76\%=0.9576$ 得

$y=[(0.9576)^{\frac{1}{100}}]^x$ $(1\leqslant x\leqslant 100, x\in N)$.

(5) 函数的定义域为$(-\frac{3}{2},2)$. 又 $6+x-2x^2$的递减区间为$[\frac{1}{4},+\infty)$，因此所给函数的递增区间是$[\frac{1}{4},2)$.

例 6 已知 $0<a<b<1$，设 a^a, a^b, b^a, b^b 中最大值是 M，最小值是 m，那么(　　).

(A) $M=a^a, m=b^b$　(B) $M=b^b, m=a^a$

(C) $M=a^b, m=b^a$　(D) $M=b^a, m=a^b$.

分析：由幂函数性质有

$$a^a<b^a, a^b<b^b. \quad ①$$

由指数函数性质有

$$a^a>a^b, b^a>b^b. \quad ②$$

由①与②可得 D 是正确的.

例 7 设 $F(x)=f(x)-\frac{1}{f(x)}$，且 $x-\ln f(x)=0$，那么 $F(x)$是(　　).

(A) 奇函数，且在$(-\infty,+\infty)$上是增函数

(B) 奇函数，且在$(-\infty,+\infty)$上是减函数

(C) 偶函数，且在$(-\infty,+\infty)$上是增函数

(D) 偶函数，且在$(-\infty,+\infty)$上是减函数

分析：由已知，$f(x)=e^x$，所以

$$F(x)=e^x-e^{-x}.$$

显然，$F(x)$是奇函数，又不难证明它是增函数，故应选择 A.

例 8 设 $y=\log_{\frac{1}{2}}[a^{2x}+2(ab)^x-b^{2x}+1]$ $(a>0,b>0)$，求使 y 为负值的 x 的取值范围.

解：要使 $y<0$，只要

$$a^{2x}+2(ab)^x-b^{2x}+1>1,$$

即 $b^{2x}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+2\left(\frac{a}{b}\right)^x-1\right]>0$.

$\because$ $b^{2x}>0$，$\therefore$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+2\left(\frac{a}{b}\right)^x-1>0$.

解之，得

$\left(\frac{a}{b}\right)^x<-1-\sqrt{2}$ 或 $\left(\frac{a}{b}\right)^x>-1+\sqrt{2}$.

$\because$ $\left(\frac{a}{b}\right)^x>0$,

$\therefore$ 将$\left(\frac{a}{b}\right)^x<-1-\sqrt{2}$ 舍去，保留 $\left(\frac{a}{b}\right)^x>\sqrt{2}-1$，于是

$$x\lg\frac{a}{b}>\lg(\sqrt{2}-1). \quad ①$$

当 $a>b>0$ 时，$\lg\frac{a}{b}>0$，由①得

$$x>\frac{\lg(\sqrt{2}-1)}{\lg\frac{a}{b}}=\log_{\frac{a}{b}}(\sqrt{2}-1);$$

当 $b>a>0$ 时，$\lg\frac{a}{b}<0$，由①得

$$x<\log_{\frac{a}{b}}(\sqrt{2}-1);$$

当 $a=b>0$ 时，$\lg\frac{a}{b}=0$，而 $\lg(\sqrt{2}-1)<0$，因此对一切实数 x，①式恒成立.

三、指数方程与对数方程

指数方程与对数方程属于超越方程，没有一般的解法. 在中学主要学习一些简单的指数方程与对数方程的解法，但在高考中，这部分的考查难度有所提高.

1. 会解简单的指数方程和对数方程，分别掌握三种解法(详见例 9 与例 10).

2. 应用有关知识布列指数方程，解决某些实际问题.

3. 对于含有参数的指数方程与对数方程，能够正确地、合理地进行求解或者解的个数与性质的讨论. 通过这类问题考查等价转化、分类讨论的数学思想与综合解题能力.

例 9 解下列各方程：

(1) $2^{3\lg x}\cdot 5^{\lg x}=1600$；　(2) $5^{x+1}=3^{x^2-1}$；

(3) $9^{-x}-2\cdot 3^{1-x}=27$.

(1988 年全国高考试题，理科难度 0.89).

解：(1) 原方程可变为　$40^{\lg x}=40^2$，

于是　　$\lg x=2$.

$\therefore$　$x=100$ (经检验，是原方程的解).

(2) 方程两边取对数，得

$$(x+1)\lg 5=(x^2-1)\lg 3,$$

即 $(x+1)[(x-1)\lg 3-\lg 5]=0$.

∴ $x_1=-1, x_2=1+\log_3 5$

（或 $x_2=\log_3 15$）.

(3) 原方程可变为

$$(3^{-x})^2-6\cdot 3^{-x}-27=0.$$

解之，得 $3^{-x}=-3$（舍）或 $3^{-x}=9$.

由 $3^{-x}=9$ 得 $x=-2$.

评述：上面三题体现了解指数方程的三种基本方法：化为同底，方程两边取对数，通过换元（不一定设元）化为一元二次方程.

例 10 解下列各方程：

(1) $\log_{\sqrt{x}}(2x)=\dfrac{1}{2}$；

(2) $\log_4(3-x)+\log_{0.25}(3+x)$
$=\log_4(1-x)+\log_{0.25}(2x+1)$；
（1985 年全国高考理科试题）

(3) $\lg^2(x+10)-\lg(x+10)^3=4$.

解：(1) 由对数定义，得

$$(\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}=2x,$$

∴ $x=(2x)^4$.

∴ $x_1=0$, $x_2=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}$.

经检验，原方程的解是$\dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}$.

(2) 由原方程可得

$$\log_4\frac{3-x}{3+x}=\log_4\frac{1-x}{2x+1},$$

由此得 $\dfrac{3-x}{3+x}=\dfrac{1-x}{2x+1}$.

解之，得 $x_1=0$, $x_2=7$.

经检验，原方程的解是 $x=0$.

(3) 由原方程，得

$$[\lg(x+10)]^2-3\lg(x+10)-4=0,$$

解之，得

$\lg(x+10)=4$ 或 $\lg(x+10)=-1$.

由 $\lg(x+10)=4$，得 $x_1=9990$；

由 $\lg(x+10)=-1$，得 $x_2=-9.9$；

经检验，x_1 与 x_2 都是原方程的解.

评述：上面三题体现了解对数方程的三种基本方法，应该掌握好.

例 11 某工厂 1993 年生产某种产品 2 万件，计划从 1994 年开始，每年的产量比上年增长 20%，问从哪一年开始，这家工厂生产这种产品的年产量超过 12 万件.（已知$\dfrac{\lg 6}{\lg 1.2}\approx 9.8$）

解：依题意，有 $2(1+20\%)^{n-1}>12$,

即 $1.2^{n-1}>6$.

两边取对数，得 $(n-1)\lg 1.2>\lg 6$.

∵ $\lg 1.2>0$, ∴ $n>\dfrac{\lg 6}{\lg 1.2}+1\approx 10.8$.

取 $n=11$，因此这家工厂从 2003 年开始，年产量超过 12 万件.

例 12 设 $p\in R$，试讨论下列指数方程实根的个数：$a^{3x}+2pa^{2x}+(p^2+1)a^x+p=0$ $(a>0, a\neq 0)$.

解：设 $a^x=y$，则原方程变为：

$$y^3+2py^2+(p^2+1)y+p=0,$$

$$(y+p)(y^2+py+1)=0,$$

∴ $y=-p$ 或 $y^2+py+1=0$. ①

因为 $y=a^x>0$，所以原方程有实根等价于①有正根.

$y=-p$ 有正根的条件是 $p<0$；

二次方程 $y^2+py+1=0$ 有正根的条件是

$$\begin{cases}\Delta=p^2-4\geqslant 0,\\ -p>0.\end{cases}\Leftrightarrow p\leqslant -2.$$

综上可知：当 $p<-2$ 时，原方程有三个实根；当 $p=-2$ 时，原方程有两个实根；当 $-2<p<0$ 时，原方程有一个实根；当 $p\geqslant 0$ 时，原方程没有实根.

例 13 已知 $a>0, a\neq 1$，试求使方程 $\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$ 有解的 k 的取值范围.（1989 年全国高考试题，理科难度 0.44）

解：原方程有解等价于

$$\begin{cases}x-ak>0\\ x^2-a^2>0\\ (x-ak)^2=x^2-a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-ak>0 & ①\\ (x-ak)^2=x^2-a^2 & ②\end{cases}$$

由②，得 $2kx=a(1+k^2)$. ③

当 $k=0$ 时，由 $a>0$ 知③无解，故原方程无解；

当 $k\neq 0$ 时，③的解是

$$x=\frac{a(1+k^2)}{2k}. \quad ④$$

把④代入①，得 $\dfrac{a(1+k^2)}{2k}-ak>0$,

即 $\dfrac{(k-1)(k+1)}{k}<0.$

解之，得 $k<-1$ 或 $0<k<1.$

综上可知，当 k 在 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 内取值时，原方程有解.

评述：对于含参数的指数方程与对数方程，在求解时，注意将原方程等价转化为某个混合组，并注意在等价转化的原则下简化、求解.

练习 1—3

1. 求函数 $y=|\frac{1}{2}x^2-1|$ 的单调区间.

2. 设函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，若当 $x\leqslant 1$ 时，$y=x^2+1$，则当 $x>1$ 时，$y=$________.（1991 年上海试题）

3. 设 $p\in R$，求函数 $f(x)=x^2-px$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 M 与最小值 m.

4. 图中曲线是幂函数 $y=x^n$ 在第一象限的图象. 已知 n 取 $\pm 2,\pm\frac{1}{2}$ 四个值，则相应于曲线 C_1、C_2、C_3、C_4 的 n 依次为（　　）.

(A) $-2,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},2$

(B) $2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2$

(C) $-\frac{1}{2},-2,2,\frac{1}{2}$

(D) $2,\frac{1}{2},-2,-\frac{1}{2}$

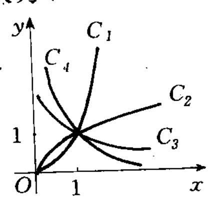

图 1—3

（1992 年全国高考试题）

5. 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数的是（　　）.

(A) $y=-(x+1)^2$　(B) $y=x^{\frac{2}{3}}$

(C) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$　(D) $y=\log_{\frac{1}{2}}|x-1|$

6. 若 $\log_a\frac{2}{3}<1$，则 a 的取值范围是（　　）.

(A) $(\frac{2}{3},1)$　(B) $(\frac{2}{3},+\infty)$

(C) $(0,\frac{2}{3})\cup(1,+\infty)$

(D) $(0,\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3},+\infty)$

7. 若 $\log_a 2<\log_b 2<0$，则（　　）.

(A) $0<a<b<1$　(B) $0<b<a<1$

(C) $a>b>1$　(D) $b>a>1$

（1992 年全国高考试题）

8. 已知 $1<x<d$，令 $a=(\log_d x)^2, b=\log_d(x^2)$，$c=\log_d(\log_d x)$，则（　　）.

(A) $a<b<c$　(B) $a<c<b$

(C) $c<b<a$　(D) $c<a<b$

9. 已知 $f(e^x)=x^2-2x+3, x\in[2,3]$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式和定义域；

(2) 求 $f(x)$ 的最小值与最大值.

10. 解下列方程：

(1) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-1}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}=\frac{9}{16}$；

(2) $\frac{1+3^{-x}}{1+3^x}=3$.

11. 解下列方程：

(1) $\log_4\frac{32}{18-4^{2x}}=2x$；

(2) $\frac{3\lg x}{\lg x+2\lg a}+\frac{\lg x}{2\lg x-\lg a}=2\quad(a>1)$.

12. 已知关于 x 的方程 $2a^{2x-2}-7a^{x-1}+3=0$ 有一个根是 2. 求 a 的值和方程其余的根.（1992 年“三南”高考试题）

13. 已知关于 x 的方程 $\log_2(x+3)-\log_4 x^2=a$ 的解在区间 $(3,4)$ 内，求实数 a 的取值范围.

习题一

1. 设函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域为 M，$g(x)=\lg(3+2x-x^2)$ 的定义域为 N，求 $M\cup N$ 与 $M\cap N$.

2. 设 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{16-x^2}, y\neq 0\}$，$N=\{(x,y)\mid y=x+a\}$. 如果 $M\cap N\neq\varnothing$，求 a 的取值范围.

3. 与函数 $y=10^{\lg(x-1)}$ 的图象相同的函数是（　　）.

(A) $y=x-1$　(B) $y=|x-1|$

(C) $y=\left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\right)^2$　(D) $y=\frac{x^2-1}{x+1}$

4. 函数 $y=|1+2x|+|2-x|$ 的单调减区间是________.

5. 函数 $y=1-\sqrt{2x-3}\ (x\geqslant 2)$ 的反函数是________.

6. 下列四个函数中，在区间 $(-\infty,0)$ 上是增函数的是（　　）.

(A) $y=-\dfrac{1}{x+1}$　　(B) $y=2^{-x}$

(C) $y=-\log_2(-x)$　(D) $y=1+\dfrac{1}{x-1}$

7. 对于定义域是 R 的任何奇函数 $f(x)$，都有(　　).

(A) $f(x)-f(-x)>0$　$(x\in R)$

(B) $f(x)-f(-x)\leqslant 0$　$(x\in R)$

(C) $f(x)f(-x)\leqslant 0$　$(x\in R)$

(D) $f(x)f(-x)>0$　$(x\in R)$

(1992 年"三南"试题)

8. 设 $f(x)$ 是 R 上的偶函数，并且在 $(-\infty,0)$ 上是增函数. 已知 $x_1<0,x_2>0$，且 $|x_1|<|x_2|$，那么(　　).

(A) $f(-x_1)>f(-x_2)$

(B) $f(-x_1)<f(-x_2)$

(C) $f(-x_1)=f(-x_2)$

(D) $f(-x_1)$ 与 $f(-x_2)$ 的大小无法确定

9. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递减，试比较 $f(\log_{\frac{1}{2}}8)$ 与 $f(3^{\log_{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}})$ 的大小.

10. 函数 $y=ax^2+bx+1$ 的图象与 x 轴有交点的充分必要条件是________.

11. 函数 $y=\log_a x$ 在区间 $[2,\pi]$ 上的最大值比最小值大 1，求 a 的值.

12. 比较下列各组中两个数值的大小：

(1) $(\log_a x)^2$ 与 $\log_a x^2$　$(1<x<a)$；

(2) $(\ln a)^{-2.1}$ 与 $(\ln a)^{-1.9}$　$(a>1)$.

13. 设 $f(x)=4^x-2^{x+1}(x\geqslant 1)$，则 $f^{-1}(0)=$______.

14. 解方程 $5^{x-4}-2\times 5^{x-6}=2\times 3^{x+2}+5^{x-5}$.

15. 方程 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\cos(\dfrac{\pi}{2}+x)$ 在 $(0,100\pi)$ 内实数解的个数是(　　).

(A) 98　(B) 100　(C) 102　(D) 104

16. 解下列方程 $x^{2\lg^3 x-\frac{3}{2}\lg x}=\sqrt{10}$.

17. 设 $g(x)=\log_a(a^x-1)$　$(a>0,a\neq 1)$.

(1) 求 $g(x)$ 的定义域；

(2) 讨论 $g(x)$ 的增减性并予以证明；

(3) 由 $g^{-1}(x)=g(2x)$ 求 x.

18. 求使关于 x 的方程 $\log_2 x+1=2\log_2(x-a)$ 恰有一个实数解的实数 a 的取值范围.

19. 如图，函数 $y=\dfrac{3}{2}|x|$，在 $x\in[-1,1]$ 的图象上有两点 $A、B$，$AB\parallel OX$ 轴，点 $M(1,m)$（m 是已知数，且 $m>\dfrac{3}{2}$）是 $\triangle ABC$ 的 BC 边的中点.

(1) 写出用 B 点横坐标 t 表示 $\triangle ABC$ 面积 S 的函数解析式 $S=f(t)$；

(2) 求函数 $S=f(t)$ 的最大值，并求出相应的 C 点的坐标.

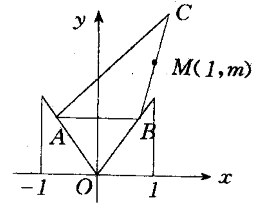

图 1—4

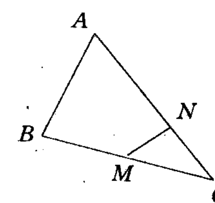

图 1—5

20. 设 $\triangle ABC$ 满足 $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，$AB<AC$，M 为 BC 的中点，N 为 AC 上一点，且 $AN=AB$（图 1—5）. 求 $\dfrac{MN}{AB}$ 的最小值.

答案或提示

练习 1—1

1. A　2. C　3. $\{x|0<x<5\}$

4. $[-\dfrac{1}{2},+\infty)$，$(0,\dfrac{1}{2}]$

5. $\left\{(\dfrac{20+2\sqrt{10}}{9},-\dfrac{1+\sqrt{10}}{3})\right\}$.　　6. B

7. $\{0,1\},\{0,1,2\},\{0,1,3\},\{0,1,4\},\{0,1,2,3\},\{0,1,2,4\},\{0,1,3,4\}$

8. C　9. B　10. $\{-4,-3,0,1,2\}$

练习 1—2

1. (1) $\{x|x\in R$ 且 $x\neq 0,x\neq -1\}$；
(2) $\{x|x\geqslant 0$ 且 $x\neq 2\}$.

2. 当 $0<m<\dfrac{1}{2}$ 时，是 $[m,1-m]$；
当 $m=\dfrac{1}{2}$ 时，是 $\{\dfrac{1}{2}\}$；当 $m>\dfrac{1}{2}$ 时，是 $\varnothing$.

3. (2) 是奇函数.

4. (1) x^2-2x；　(2) $\ln^2 x-2\ln x-1$ $(x\geqslant 1)$.

5. B. 提示：$y=\dfrac{3x+4}{x+2}=3-\dfrac{2}{x+2}$.

6. $a=3,b=-\dfrac{1}{6}$. 提示：可利用反函数做.

7. -2. 提示：由 $-\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{1-x^2}$ $(x<-1)$ 可得.

8. 由 $\begin{cases}2^{2a+b}=\dfrac{1}{4}\\ 2^{\frac{1}{4}a+b}=2\end{cases}$ 得 $a=-\dfrac{12}{7},b=\dfrac{10}{7}$.

9. C.　　10. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}, g(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

12. $f(4)=f(-1)=-f(1)=-a, f(5)=f(0)=0$.

13. 设 $t=\sqrt{13-4x}\geqslant 0$，则 $y=-\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{13}{2}$. 当 $t=1$（即 $x=3$）时，y 有最大值 7.

14. (1) 分 $a+b>0$ 与 $a+b=0$ 两种情况证明（略）；
(2) 逆命题正确，可用反证法证明（略）.

练习 1－3

1. 单调增区间是 $(-\sqrt{2}, 0)$ 与 $(\sqrt{2}, +\infty)$. 单调减区间是 $(-\infty, -\sqrt{2})$ 与 $(0, \sqrt{2})$.

2. $y=x^2-4x+5$.

3. 当 $p<0$ 时，$M=1-p, m=0$；当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时，$M=1-p, m=-\dfrac{p^2}{4}$；当 $1<p\leqslant 2$ 时，$M=0, m=-\dfrac{p^2}{4}$；当 $p>2$ 时，$M=0, m=1-p$.

4. B.　　5. D.　　6. C.　　7. B.

8. D. 提示：$c<0$，又 $a-b<0$.

9. (1) $f(x)=\ln^2 x-2\ln x+3, x\in[e^2, e^3]$；
(2) 最小值为 $f(e^2)=3$，最大值为 $f(e^3)=6$.

10. (1) $x_1=-1, x_2=3$；　　(2) $x=-1$.

11. (1) $x_1=1, x_2=\dfrac{1}{4}$；　(2) $x_1=a, x_2=a\sqrt[3]{a}$.

12. $a=\dfrac{1}{2}$ 或 $a=3$. 当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，另一个根为 $x=1+\log_{\frac{1}{2}}3$；当 $a=3$ 时，另一个根为 $x=1-\log_3 2$.

13. 原方程的解在 $(3,4)$ 内等价于

$$\begin{cases}x+3>0\\ x\neq 0\\ x+3=2^a x\\ 3<x<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3<x<4\\ (2^a-1)x=3\end{cases}\Leftrightarrow 3<\frac{3}{2^a-1}<4\ (*)$$

(1) 当 $a>0$ 时，解 $(*)$ 得 $\log_2\dfrac{7}{4}<a<1$；

(2) 当 $a<0$ 时，$(*)$ 无解.

综上可知，实数 a 的取值范围是 $(\log_2\dfrac{7}{4}, 1)$

习题一

1. $M\cup N=(-2,3), M\cap N=(-1,2)$.

2. $-4<a\leqslant 4\sqrt{2}$. 3. C.　　4. $(-\infty, -\dfrac{1}{2}]$.

5. $y=\dfrac{1}{2}(1-x)^2+\dfrac{3}{2}\ (x\leqslant 0)$.　　6. C　7. C　8. A

9. $f(\log_{\frac{1}{2}}8)=f(-3)=f(3)<f(3^{\log_{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}})=f(\dfrac{\pi^2}{4})$.

10. $a=0, b\neq 0$ 或 $a\neq 0, b^2-4ac\geqslant 0$.

11. 当 $a>1$ 时，$a=\dfrac{\pi}{2}$；当 $0<a<1$ 时，$a=\dfrac{2}{\pi}$.

12. (1) $(\log_a x)^2-\log_a x^2=\log_a x(\log_a x-2)<0$；
(2) 当 $a>e$ 时，有“<”；当 $a=e$ 时，有“=”；当 $1<a<e$ 时，有“>”.

13. $f^{-1}(0)=1$. 提示：解方程 $4^x-2^{x+1}=0$.

14. $x=\dfrac{6\lg 5}{\lg 5-\lg 3}$.

15. B. 提示：可画曲线 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 与 $y=\cos(\dfrac{\pi}{2}+x)=-\sin x$.

16. $x_1=10, x_2=\dfrac{1}{10}$. 提示：方程两边取对数.

17. (1) 当 $a>1$ 时定义域为 $(0,+\infty)$，当 $0<a<1$ 时定义域为 $(-\infty, 0)$；
(2) 当 $a>1$ 与 $0<a<1$ 时均为增函数（证明从略）；
(3) $x=\log_a 2$.

18. 原方程有解等价于

$$\begin{cases}x>0\\ x-a>0\\ 2x=(x-a)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>a\\ x^2-2(a+1)x+a^2=0.\end{cases}\qquad ①$$

当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，①有解：$x_1=x_2=\dfrac{1}{2}>a$，故此时原方程恰有一解.

当 $a>-\dfrac{1}{2}$ 时，①有两解：$x_1=a+1+\sqrt{2a+1}, x_2=a+1-\sqrt{2a+1}$. 由于 $x_1>a$，又 $x_2\leqslant a\Leftrightarrow a\geqslant 0$，因此当 $a\geqslant 0$ 时，原方程恰有一解.

19. (1) $f(t)=-3t^2+2mt, t\in(0,1]$.
(2) $S=-3(t-\dfrac{m}{3})^2+\dfrac{m^2}{3}, t\in(0,1]$.

当 $\dfrac{3}{2}<m\leqslant 3$ 时，S 的最大值为 $\dfrac{m^2}{3}$，相应的 C 点坐标为 $(2-\dfrac{m}{3}, \dfrac{3}{2}m)$；

当 $m>3$ 时，S 的最大值为 $2m-3$，相应的 C 点坐标为 $(1, 2m-\dfrac{3}{2})$.

20. 解法较多. 可连结 BN，设 $AB=x, AC=y, \angle CBN=\alpha$，则由余弦定理，

$$BC^2=x^2+y^2-xy,$$

$$\cos\alpha=\cdots=\frac{x+y}{2\sqrt{x^2+y^2-xy}}.$$

再在 $\triangle BMN$ 中求得 $MN^2=\dfrac{1}{4}y^2-\dfrac{3}{4}xy+\dfrac{3}{4}x^2$. 于是

$$\left(\frac{MN}{AB}\right)^2=\frac{1}{4}\left[(\frac{y}{x})-\frac{3}{2}\right]^2+\frac{3}{16}.$$

取 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2}$ 时，$\dfrac{MN}{AB}$ 的最小值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.