全国成人高等教育规划教材

微积分

（大专使用）

刘书田　冯翠莲　编

高等教育出版社

全国成人高等教育规划教材

微积分

（大专使用）

刘书田　冯翠莲　编

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部成人高等教育规划教材，是根据教育部最新颁布的成人高等教育《经济数学基础课程教学基本要求》编写的。

本教材以提高成人高等教育教学质量为编写指导思想，以培养高素质应用型人才为总目标。本书系统地介绍了一元函数微积分学与二元函数微分学。通过本教材的学习，可培养学生初步抽象概括问题的能力、逻辑推理能力、自学能力以及运用所学知识分析问题、解决问题的能力。

本书也可作为高等职业、高等专科经济类、管理类学生学习《微积分》的教材；也可作为参加自学考试、文凭考试学习《微积分》的教材或学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/刘书田，冯翠莲编. —北京：高等教育出版社，2003.7

ISBN 7-04-012412-2

Ⅰ.微… Ⅱ.①刘…②冯… Ⅲ.微积分-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 025191 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京人卫印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2003 年 7 月第 1 版
印　　张	8.75	印　　次	2003 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	220 000	定　　价	11.30 元

前　言

本书是全国成人高等教育规划教材之一。《微积分》是成人高等教育经济和管理类各专业一门必修的重要基础课。本教材是依照教育部最新颁布的成人高等教育"经济数学基础课程教学基本要求"编写的。

本教材具有以下特点：

1. 教材的编写严格依照"教学基本要求"，在教材内容选择上，既考虑到《微积分》本学科的科学性、系统性，又充分考虑成人教育的特点，按照"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则，力求达到易学、实用。

2. 强化概念，既注重从实际问题引入基本概念，揭示概念的实质，又注重基本概念的几何解释、经济意义，以使教学内容形象、直观，便于理解和掌握。

3. 注重基本理论，但又没有繁琐的推理。突出基本方法，阐明解题程序、解题思路和方法，并通过例题作必要的说明。以培养学生的基本运算技能，使其掌握基本运算方法。

4. 为达到学练结合，培养学生独立思考能力，每节之后配有适量的习题，每章之后配有复习题。书后附有习题答案与提示。

5. 重点突出，难点分散；叙述通俗易懂、简明扼要，便于自学。

本书的编写和出版得到了高等教育出版社有关领导的大力支持和帮助。在此一并致谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请同仁和读者指正。

编　者

目　录

第一章 函 数

函数是微积分最重要的基本概念,是微积分研究的对象.本教材在实数范围内研究函数.本章讲述函数概念、函数的特性和初等函数.

§1.1 预备知识

一、实数与数轴

实数由有理数与无理数两大类组成.有理数包括零、正负整数和正负分数.有理数都可用分数形式$\frac{p}{q}$(p,q为整数,$q\neq 0$)表示,也可用有限小数或无限循环小数表示.无限不循环小数是无理数.全体实数构成的集合称为实数集,记作$\mathbf{R}$.

若在一直线上(通常画水平直线)确定一点为原点O,指定一个方向为正方向(通常把指向右方为正方向),并规定一个单位长度,则称这样的直线为**数轴**.任一实数都对应数轴上惟一的一点;反之,数轴上每一点都惟一地表示一个实数.正由于全体实数与数轴上的所有点有一一对应关系,所以在以下的叙述中,将把"实数a"与"数轴上的点a"两种说法看作有相同的含义,而不加以区别.

二、实数的绝对值

设x是一个实数,则记号$|x|$称为x的**绝对值**,定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

例如,数 0 的绝对值 $|0|=0$;数 $6(6>0)$ 的绝对值 $|6|=6$;数 $-6(-6<0)$ 的绝对值 $|-6|=-(-6)=6$.

数 x 的绝对值 $|x|$ 的**几何意义**:在数轴上,$|x|$ 表示点 x 到原点的距离.不论点 x 在原点的左侧($x<0$),还是点 x 在原点的右侧($x>0$),或是在原点($x=0$),都如此(图 1-1).

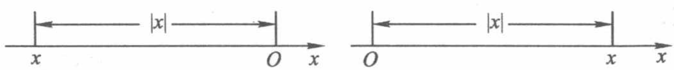

图 1-1

设 a,b 是两个实数,则由上述绝对值的定义可得

$$|a-b|=\begin{cases}a-b, & a\geqslant b,\\ b-a, & a<b.\end{cases}$$

由绝对值的定义,易得下列**绝对值的性质**:

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$;

(2) $|x|=|-x|\geqslant 0$,当且仅当 $x=0$ 时等号成立;

(3) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

这是因为

当 $x<0$ 时,有 $-|x|=x<|x|$;

当 $x>0$ 时,有 $-|x|<x=|x|$;

当 $x=0$ 时,有 $-|x|=x=|x|$.

将上三式合并在一起,就是 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

(4) 设 $h>0$,则

$|x|<h$ 等价于不等式 $-h<x<h$;

$|x|\leqslant h$ 等价于不等式 $-h\leqslant x\leqslant h$;

$|x|>h$ 等价于 $x<-h$ 或 $x>h$;

$|x|\geqslant h$ 等价于 $x\leqslant -h$ 或 $x\geqslant h$.

从绝对值的几何意义看，这些性质是显然的．例如，因$|x|<h$表示到原点的距离小于h的所有点x的集合，而这正是不等式$-h<x<h$的几何说明(图1－2)．

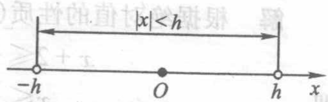

图　1－2

可以证明实数绝对值的下列运算性质：

(1) 和的绝对值不大于各项绝对值的和，即

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|;$$

(2) 差的绝对值不小于各项绝对值的差，即

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|;$$

(3) 乘积的绝对值等于绝对值的乘积，即

$$|x\cdot y|=|x||y|;$$

(4) 商的绝对值等于绝对值的商，即

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\quad(y\neq 0).$$

例1　解绝对值不等式$|x-3|<5$．

解　根据绝对值的性质(4)，由$|x-3|<5$得

$$-5<x-3<5,\text{即}-2<x<8.$$

由图1－3知，$|x-3|<5$的几何意义是，表示数轴上与点3的距离小于5个单位的所有点x的集合．

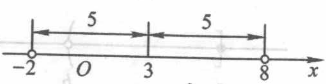

图　1－3

一般言之，$|x-x_0|$表示两点x与x_0之间的距离；而$|x-x_0|<h(h>0)$则表示数轴上到点x_0的距离小于h个单位的所有点x的集合(图1－4)．

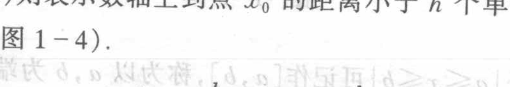

图　1－4

例2　解绝对值不等式$|x+2|\geqslant 4$．

解　根据绝对值的性质(4),由$|x+2|\geqslant 4$得

$$x+2\leqslant -4 \text{ 或 } x+2\geqslant 4,$$

即
$$x\leqslant -6 \text{ 或 } x\geqslant 2.$$

由上述结果表明,$|x+2|\geqslant 4$的几何意义是,表示数轴上与点-2的距离不小于4个单位的所有点x的集合.

一般言之,$|x-x_0|\geqslant h(h>0)$表示数轴上到点x_0的距离不小于h个单位的所有点x的集合.

三、区间

1. 区间

区间可理解为实数集$\mathbf{R}$的子集.区间分为有限区间和无限区间.

有限区间　设$a,b\in\mathbf{R}$,且$a<b$.

集合$\{x|a<x<b\}$可记作(a,b),称为以a,b为端点的**开区间**(图1-5(a)).

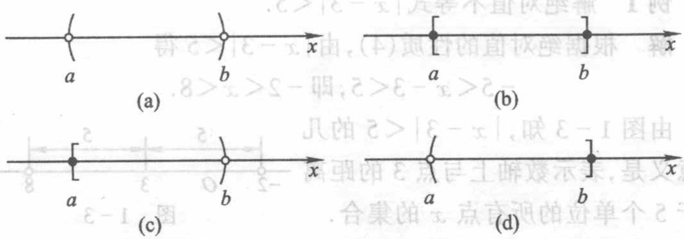

图　1-5

集合$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$可记作$[a,b]$,称为以$a,b$为端点的**闭区间**(图1-5(b)).

集合$\{x|a\leqslant x<b\}$和$\{x|a<x\leqslant b\}$可记作$[a,b)$和$(a,b]$,这是**半开区间**(图1-5(c),(d)).

以上各有限区间的长度都为$b-a$.

无限区间

集合$\{x|a<x<+\infty\}=\{x|a<x\}$,记作$(a,+\infty)$,这是无限区间;类似的记号$[a,+\infty)$,$(-\infty,b)$,$(-\infty,b]$都是无限区间;实数集 **R** 记作$(-\infty,+\infty)$.

本教材在以后的叙述中,若我们所讨论的问题在任何一个区间上都成立时,将用字母 **I** 表示这样一个泛指的区间.

2. 邻域

设δ为某一个正数,称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$为**点 x_0 的 δ 邻域**,x_0 称为邻域的**中心**,δ 称为邻域的**半径**.邻域的长度为2δ,点x_0 的 δ 邻域用不等式表示为(图 1-6)

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta \quad 或 \quad |x-x_0|<\delta.$$

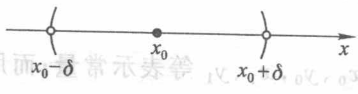

图 1-6

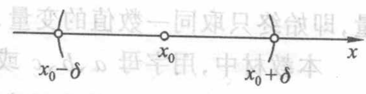

图 1-7

若把邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$中的中心点 x_0 去掉,由余下的点构成的集合,称为**点 x_0 的空心邻域**,常表示为(图 1-7)

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta) \quad 或 \quad 0<|x-x_0|<\delta.$$

习题 1.1

1. 用区间表示下列 x 的取值范围:

(1) $\{x|-1\leqslant x<3\}$; (2) $\{x|2<x\leqslant 5\}$;

(3) $x^2\leqslant 2$; (4) $x^2>9$.

2. 解下列不等式,并用区间表示不等式的解:

(1) $|x-2|<\delta(\delta>0)$; (2) $0<|x+1|<\delta(\delta>0)$;

(3) $|3x+1|<4$; (4) $|2x+3|\geqslant 1$.

§1.2 函数概念

一、常量与变量

在我们观察某一自然现象或分析某一经济问题时，会遇到各种各样的量.

在某一过程中是变化的，可以取不同数值的量称为**变量**；

在某一过程中是不变化的、保持同一数值的量称为**常量**.

例如：一超市，在上午 9 时开门至晚上 9 时关门这一过程中，超市里的人数是变量，而超市里某种商品的价格是常量.

正如把静止看作是运动的特例一样，常量可看作是特殊的变量，即始终只取同一数值的变量.

本教材中，用字母 a、b、c 或 x_0、y_0，x_1、y_1 等表示常量；而用字母 x、y、z 或 u、v、t 等表示变量.

由于全体实数与数轴上的所有点有一一对应关系，所以，常量在数轴上表示为一个定点，变量在数轴上表示为一个动点.

二、函数定义及其表示法

在我们的周围，许多事物都在变化. 其中，有一些变化着的现象中存在着两个变量. 这两个变量不是彼此孤立的，而是相互联系、相互制约的. 当其中一个量在某数集内取值时，按一定的规则，另一个量有惟一确定的值与之对应. 变量之间的这种数量关系就是**函数关系**.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的**非空数集**. 若对于每一个数 $x \in D$，按照某一确定的**对应法则** f，变量 y 总有惟一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为该函数的**定义域**.

定义域 D 是自变量 x 的取值范围，也就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的数集. 由此，若 x 取数值 $x_0\in D$ 时，则称该函数在 x_0 **有定义**，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 的**函数值**，记作

$$f(x_0) \quad \text{或} \quad y|_{x=x_0}.$$

当 x 遍取数集 D 中的所有数值时，对应的函数值全体构成的数集

$$Z=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为该函数的**值域**.

若 $x_0 \overline{\in} D$，则称该函数在点 x_0 没有定义.

由函数的定义可知，决定一个函数有**三个因素**：定义域 D，对应法则 f 和值域 Z. 注意到每一个函数值都可由一个 $x\in D$ 通过 f 而惟一确定，于是给定 D 和 f，Z 就相应地被确定了；从而 D 和 f 就是决定一个函数的**两个要素**.

本书除了用字母"f"表示函数外，还用字母"φ"、"g"、"F"等等来表示函数. 它们是可以任意使用的，但若同时讨论几个不同的函数时，为了避免混淆，就用不同的字母表示不同的函数.

表示函数关系的方法，常用的有公式法、图形法和列表法.

公式法或解析法 用数学表达式表示两个变量之间函数关系的方法. 用公式法表示函数，变量之间的数量关系明确，便于理论分析. 例如，$y=2^x+1$，$y=2x^2+3x+1$ 等就是用公式法表示的函数.

图形法 用几何图形表示两个变量之间函数关系的方法. 用图形法表示函数，变量之间的关系形象直观. 在直角坐标系下，函数 $y=f(x)$ 的图形通常是一条平面曲线，该曲线在 x 轴上的投影是函数的定义域 D，在 y 轴上的投影是函数的值域 Z（图 1－8）.

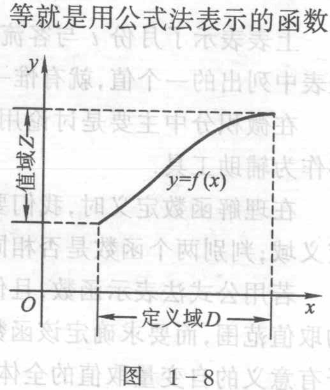

图 1－8

例 1 在气象观测站，气温自动记录仪把某一天的气温变化描绘在记录纸上，如图 1－9 所示的曲线．曲线上某一点 $P_0(t_0,\theta_0)$ 表示时刻 t_0 的气温是 θ_0．观察这条曲线，可以知道在这一天内，时间 t 从 0 点到 24 点气温 θ 的变化情形．时间 t 和气温 θ 都是变量，这两个变量之间的函数关系是由一条曲线确定的．

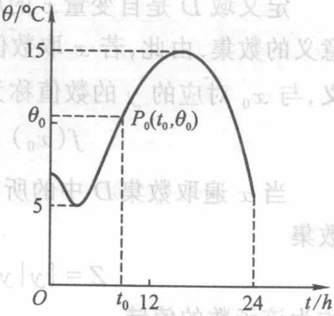

图 1－9

列表法 用表格表示两个变量之间函数关系的方法，即将一系列自变量的值及与其对应的函数值列成表格．用列表法表示函数，应用方便．我们常用的三角函数表、对数表等都是用列表法表示的函数．

例 2 某汽车站为了预测客流数量，统计了该车站 1～6 月份的客流数量，列表如下

月份 t	1	2	3	4	5	6
客流量 y(人次)	2830	3025	1935	2360	2700	1820

上表表示了月份 t 与客流量 y(人次)之间的函数关系．t 每取定表中列出的一个值，就有惟一确定的 y 值与之对应．

在微积分中主要是讨论用公式法表示的函数，而以函数的图形作为辅助工具．

在理解函数定义时，我们要掌握以下三方面的问题：求函数的定义域；判别两个函数是否相同；正确运用函数符号，会求函数值．

若用公式法表示函数，且仅给出一个数学式子，没给出自变量的取值范围，而要求确定该函数的定义域，这就是要确定使这一式子有意义的自变量取值的全体．对应用问题，还应根据问题的意义

来确定自变量的取值范围.

例 3 求函数 $y=\dfrac{x-3}{\ln(2-x)}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域.

解 该函数由两项和构成,其定义域应是各项自变量取值范围的公共部分,每项分别讨论.

第一项是分式,其分子 $x-3$ 中的 x 可取任意值;对分母 $\ln(2-x)$,因对数符号下的式子应为正,且分母不能为零,所以有

$$2-x>0 \quad 且 \quad 2-x\neq 1 \quad (因 \ln 1=0),$$

即 $x<2$ 且 $x\neq 1$.

第二项 $\sqrt{16-x^2}$,因偶次根的根底式应非负,所以有 $16-x^2\geqslant 0$,即 $-4\leqslant x\leqslant 4$.

综上,函数的定义域应是 $[-4,1)\cup(1,2)$.

例 4 判别下列各对函数是否相同:

(1) $f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;

(2) $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

解 (1) 定义域相同,都是 $(-\infty,+\infty)$;由于 $\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$ 是恒等式,即对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $g(x)=1$,故它们的对应法则相同,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示相同的函数.

(2) 定义域不同. $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$;而 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数.

例 5 设 $y=f(x)=\dfrac{1+2x}{1+x^2}$,求 $f(-2),f(0),f(a),f(x_0+h)$,$f(-x),f(x+1)$.

解 这是已知函数的表示式,要求函数值.

$f(-2)$ 表示已知函数 $f(x)$ 在 $x=-2$ 时的函数值,用 -2 代换表示式 $\dfrac{1+2x}{1+x^2}$ 中的 x,便得到 $f(-2)$:

$$f(-2)=\left.\frac{1+2x}{1+x^2}\right|_{x=-2}=\frac{1+2\cdot(-2)}{1+(-2)^2}=-\frac{3}{5}.$$

也可记作

$$y\Big|_{x=-2}=\frac{1+2x}{1+x^2}\Big|_{x=-2}=-\frac{3}{5}.$$

同样,用 0 代换$\frac{1+2x}{1+x^2}$中的 x,得

$$f(0)=\frac{1+2x}{1+x^2}\Big|_{x=0}=\frac{1+2\cdot 0}{1+0^2}=1\quad 或\quad y\Big|_{x=0}=\frac{1+2x}{1+x^2}\Big|_{x=0}=1.$$

用 a 代换$\frac{1+2x}{1+x^2}$中的 x,得

$$f(a)=\frac{1+2a}{1+a^2},\ 或\ y\Big|_{x=a}=\frac{1+2a}{1+a^2}.$$

同样,

$$f(x_0+h)=\frac{1+2(x_0+h)}{1+(x_0+h)^2},\quad 或\quad y\Big|_{x=x_0+h}=\frac{1+2(x_0+h)}{1+(x_0+h)^2}.$$

为求 $f(-x)$,需将 $f(x)$表达式中的 x 换为 $-x$,得

$$f(-x)=\frac{1+2(-x)}{1+(-x)^2}=\frac{1-2x}{1+x^2}.$$

同样

$$f(x+1)=\frac{1+2(x+1)}{1+(x+1)^2}=\frac{2x+3}{x^2+2x+2}.$$

三、分段函数

两个变量之间的函数关系有的要用两个或多于两个的数学式子来表达,即对一个函数,在其定义域的不同部分用不同数学式子来表达,称为**分段函数**.

例 6 设分段函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ 3^x, & x>0,\end{cases}$ 求:

(1) 定义域; (2) $f(-1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f(2)$.