

復興初級中學教科書

三角

周元瑞 編著
周元谷

國民政府教育部審定

商務印書館發行

經月七年四十二於書本
定審部育教府政民國
照執號七十六第字教到領

中華民國二十二年七月初版
中華民國二十九年二月全版

版權所有
翻印必究

復興教科書三

初級中學用

(57311道)

角一冊

每冊實價國幣叁角陸分

外埠酌加運費匯費

編著者

周元谷 周元瑞

主編兼
發行人

王長沙 雲南正路五

印刷所

商務印書館

發行所

各商務印書館

(本書校對者林懷民)

◆ H311.011

復興初中教科書三角

目 錄

第一章	三角比	1—12
1.	間接量度法	1
2.	正切	3
3.	正弦和餘弦	4
4.	三角比	6
5.	三角函數	6
6.	六種三角比	8
7.	仰角和俯角	9
第二章	基本公式	13—22
8.	餘角函數公式	13
9.	特別角的三角函數	15
10.	同角函數的基本公式	17
11.	解三角方程式的例	19
第三章	三角函數及其應用	23—43
12.	三角函數表	23
13.	三角函數表的說明	23

14.	三角函數表檢查法	24
(1)	已知角度找正函數	24
(2)	已知角度找餘函數	32
(3)	已知函數找角度	33
(4)	角度帶有分秒的檢查法	36
15.	直角三角形解法	37

第四章 對數解法 44—64

16.	對數	44
17.	對數的性質	45
18.	常用對數	48
19.	定位部與定值部	49
20.	對數表及三角函數對數表	51
21.	餘對數	54
22.	用對數解直角三角形	56
23.	應用問題上幾個名詞	62

第五章 任意三角形的解法 65—92

24.	純角三角函數	65
25.	補角函數公式	67
26.	解任意三角形	69
27.	解任意三角形所根據的定律	70

初級中學教科書

三角

第一章 三角比

1. 間接量度法。平常實際的工作上量度距離，有時須用間接方法。因為直接量度，有時很不容易精確，並且手續上或許非常麻煩，甚至在事實上，有辦不到的。要測水塔或房屋的高，若用直接量法，還不過手續上比較麻煩，同時不能得到精確的結果罷了；至於要求天空星辰的距離或大洋輪艦的航線，直接量度在實際上就不可能了。所以間接度量，也是很重要的一件實際工作。下例就是間接量度的一法。

如圖1, AB 是一垂直在地面上的電桿, C 點是一小木樁, AC 表示聯 AB 的頂點 A 和 C 點的直線。若已知 C 點到 AB 着地點 B 的距離是 150 尺, $\angle ACB$ 是 60° , 求 AB 的高 h

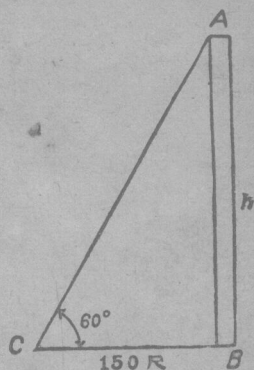


圖 1.

解: 照題意 $AB \perp CB$ 所以 $\triangle ABC$ 是一直角三角形。

設圖2, $\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的縮小圖形, 那末 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 是兩個相似直角三角形。根據相似三角形的原理就有

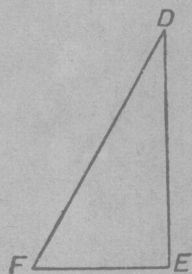


圖 2

$$\frac{AB}{CB} = \frac{DE}{FE} \text{ 何故?} \dots\dots\dots (1)$$

或 $\frac{h}{150} = \frac{DE}{FE}$

$$\therefore h = 150 \cdot \frac{DE}{FE} \dots\dots\dots (2)$$

從 (1) 可以曉得凡相似直角三角形等角兩對應邊的比是一定的。

從 (2) 可以曉得若已知 $\frac{DE}{FE}$ 的比值, h 就可以求出。

2. 正切 畫一直角三角形, 使一銳角等於 30° 如圖 3。量出 30° 的對邊 a 和 30° 角的底邊 b , 求出 $\frac{a}{b}$ 的比值。

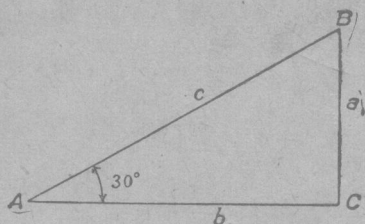


圖 3

同樣畫銳角等於 $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 的三個直角三角形, 量各銳角對邊和底邊的長, 而求出他們相互間的比值。將各比值排成一表。

各人所得等角的比值。是否相同?

和右表比值行內的數字有幾位相

同?

角度	比值
0°	0.00
30°	0.58
45°	1.00
60°	1.73
75°	3.73

上表的各個比值都是直角三角形一銳角的對邊和牠的底邊的比,在三角法上叫做這角的正切;譬如 30° 角的正切,A角的正切,算式上寫做 $\tan 30^\circ, \tan A$ 。根據求得的比值,就可以寫做 $\tan 30^\circ = 0.58$ 。這表示角的正切的表,叫做正切表。

應用例: 如圖4, AB 是P池對岸A,B兩點的距離。若某測量員用儀器測量,取得AC線段垂直於AB,并量得AC = 300尺, $\angle ACB = 60^\circ$ 求AB的長 l

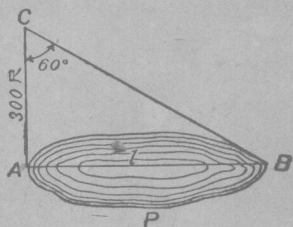


圖 4

$$\text{解: } \because \frac{l}{300} = \tan 60^\circ,$$

$$\therefore l = 300 \tan 60^\circ,$$

$$\text{照上表 } \tan 60^\circ = 1.73,$$

$$\text{所以 } l = 300 \times 1.73 = 519 \text{ 尺}$$

3. 正弦和餘弦 如圖5, $\angle ABC = 30^\circ$ 若在BC邊上任一點D引 $DE \perp BA$,那末 $\triangle BDE$ 是

一 直角三角形。

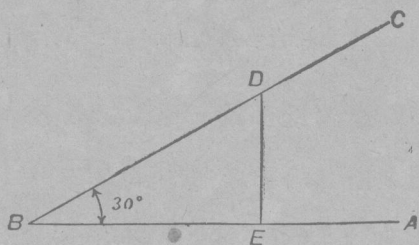


圖 5

照求正切的方法，量出 B 角的對邊 DE 和斜邊 BD 的長，並求出 $\frac{DE}{BD}$ 的比值。凡直角三角形一銳角的對邊和斜邊的比，叫做這角的正弦；例如 30° 的正弦，B 角的正弦，算式上寫做 $\sin 30^\circ$, $\sin B$ 。 $\sin B = \frac{DE}{BD}$

同樣畫銳角等於 $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 各直角三角形，量各該角的對邊和斜邊的長，求出各角的正弦。何以等角的正弦是一定數？

又如圖 5, $\frac{BE}{BD}$ 叫做 B 角或 30° 角的餘弦。

用話來說，就是直角三角形一銳角的底邊和斜邊的比，叫做這角的餘弦，算式上寫做 $\cos B$, $\cos 30^\circ$ 。

照求正切，正弦的方法求出 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$

各角的餘弦。等角的餘弦是一定的麼？何故？

4. **三角比** 正切, 正弦, 餘弦的比值是表示一角的對邊, 底邊及斜邊任何兩邊和這角的關係, 所以牠們的總名叫做三角比。凡等角的三角比都是一定的。但是我們求出各等角的比不能完全相同, 大半是由於儀器不很精密的緣故。不過三角比的用處很大, 若每次應用的時候, 再去求牠, 也很麻煩; 前人爲便利準確計, 已經用很精密的儀器和計算, 將各種角度的三角比求出, 列成表式。本章末頁的表是 0° 到 90° 角的正弦, 餘弦和正切的表。表中第一行是角度數, 第二行是正弦, 第三行是餘弦, 第四行是正切。

看表中角度從 0° 到 90° , 正弦是從0漸漸增加到1; 但是餘弦卻相反, 從1漸漸減小到0。又看正切也是和角度相應的增加。可見三角比和角度是很有密切的關係。

5. **三角函數** 三角比都是跟着角度在

改變的。在角度一定的時候，三角比就有一定的數值。如果角度改變，三角比也就相應的改變。那末照函數的定義說，三角比是角的函數，所以三角比又叫做三角函數。

習題一

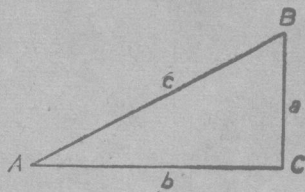
1. 如圖已知下列各值求 a ,

(a) $b=26$ $A=23^\circ$

(b) $c=62$ $A=36^\circ$

(c) $b=28.7$ $A=75^\circ$

(d) $c=49.7$ $A=80^\circ$



2. 仍照一題的圖求 A

(a) 使 $a=8$, $b=8$

解: $\tan A = \frac{a}{b} = \frac{8}{8} = 1$

檢表求得正切等于 1 的相應角是 45°

$\therefore A = 45^\circ$

(b) $a=21.607$ $b=10$

(c) $a=14.862$ $c=20$

(d) $b=7.314$ $c=10$

3. (a) 比較 $2 \sin 8^\circ$ 和 $\sin(2 \times 8)^\circ$

(b)比較 $3 \sin 10^\circ$ 和 $\sin(3 \times 10)^\circ$;

又和 $\sin(2 \times 10)^\circ$

4. 用題 3 的結果說明 $\sin(20^\circ + 30^\circ)$ 是否可以等於 $\sin 20^\circ + \sin 30^\circ$

6. **六種三角比** 在直角三角形 ABC 中, 三角法上常用 A, B 表兩銳角; C 表直角; a 表 A 角對邊的長度; b 表 A 角底邊, 或 B 角對邊的長度; c 表斜邊, 或 C 角對邊的長度;

如圖 6。那麼

$\frac{a}{c}$ 是 A 角的正弦, 寫做 $\sin A$,

$\frac{b}{c}$ 是 A 角的餘弦, 寫做 $\cos A$ 。

$\frac{a}{b}$ 是 A 角的正切, 寫做 $\tan A$ 。

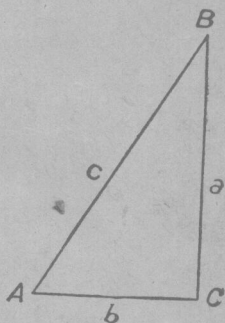


圖 6

這三種三角比我們已經學

過, 所以在直角三角形中任一銳角的

$$\text{正弦} = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$$

$$\text{餘弦} = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$$

$$\text{正切} = \frac{\text{對邊}}{\text{底邊}}$$

除這三種三角比外, 還有三種牠們的倒

數比,就是

$\frac{c}{a}$ 叫做 A 角的餘割,寫做 $\csc A$ 。

$\frac{c}{b}$ 叫做 A 角的正割,寫做 $\sec A$ 。

$\frac{b}{a}$ 叫做 A 角的餘切,寫做 $\cot A$ 。

牠們的比值,也可以照求正弦餘弦,和正切的方法,先量兩邊的長度求的。不過這三種函數用處較少,並且是前三種的倒數,所以祇要知道了前三個,這三種的比值就可以算出來。

7. 仰角和俯角 這兩個名詞應用題上常遇到,所以特別加以解釋。

若某人在 P 點向上看一物體 O ,如圖, P 點

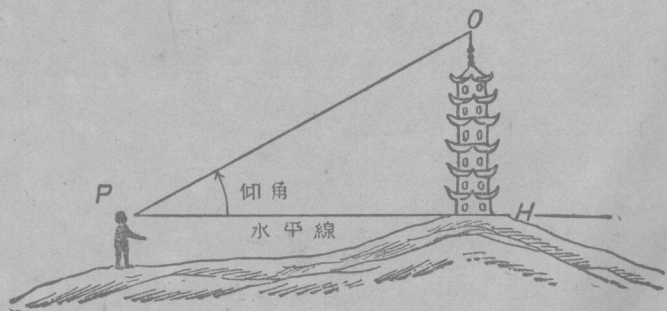


圖 7 (a)

叫視點, PO 叫做視線。視線和通過視點的水平線 PH 所成的角叫做仰角。

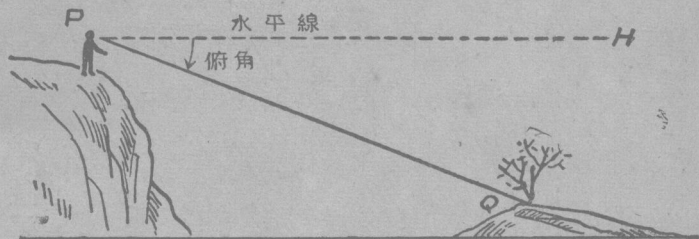


圖 7 (b)

同理某人在 P 點向下看一物體 Q , 如圖, 視線 PQ 和通過視點的水平線 PH 所成的角叫做俯角。

所以仰角或俯角是視線和通過視點的水平線所成的角。

習題二

1. 照求正弦, 餘弦, 正切的方法求 $10^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 度的餘切, 正割和餘割。

2. 在直角三角形 ABC 中, 若已知下列各數值求 a 。

$$(1) c = 112 \quad A = 10^\circ$$

$$\text{解: } \sin A = \frac{a}{c} \quad \therefore a = c \sin A.$$

$$= 112 \times .1736 = 19.4432$$

$$(2)c=126 \quad A=15^\circ \quad (3)c=608, \quad A=45^\circ$$

3. 已知下列各數值,求 b 。

$$(1)c=106 \quad A=10^\circ \quad (2)c=49.7, \quad A=75^\circ$$

4. 已知下列各值,求 A 的最近值。

$$(1)c=20.9 \quad a=14.58$$

$$(2)c=40.3 \quad a=13.68$$

$$(3)c=187 \quad b=93.5$$

$$(4)c=50.6 \quad b=52.25$$

5. 某樹地面影子長 7.5 尺,看太陽的仰角是 56° , 求此樹之高。

6. 380 尺高的烟囱,照在地面的影子是 215 尺,求看太陽的仰角。

7. 正六邊形外接圓的半徑是 15 寸,求每邊到圓心的距離。

8. 正五邊形對角線的長是 16 寸求邊長。

9. 若在 175 尺高的屋頂看一塊石的俯角是 30° , 求石塊和這屋基的距離。

10. 等腰三角形各邊的長是 60 尺, 90 尺和 90 尺,求各角的度數。

11. 旗竿離竿頂 44 尺的地方,被風折斷,但仍和下段連接。若竿頂着地點和竿腳的距離是 11 尺,求折斷部分和地面所成之角。又求竿的原長。

12. 在離池岸的水平面十尺高的地方,測得池邊樹頂的仰角是 48° ,若看樹腳的俯角是 10° ,求樹高。

角 x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	角 x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
1°	.0175	.9998	.0175	46°	.7193	.6947	1.0355
2°	.0349	.9994	.0349	47°	.7314	.6820	1.0724
3°	.0523	.9986	.0524	48°	.7431	.6691	1.1106
4°	.0698	.9976	.0699	49°	.7547	.6561	1.1504
5°	.0872	.9962	.0875	50°	.7660	.6428	1.1918
6°	.1045	.9945	.1051	51°	.7771	.6293	1.2349
7°	.1219	.9925	.1228	52°	.7880	.6157	1.2799
8°	.1392	.9903	.1405	53°	.7986	.6018	1.3270
9°	.1564	.9877	.1584	54°	.8090	.5878	1.3764
10°	.1736	.9848	.1763	55°	.8192	.5736	1.4281
11°	.1908	.9816	.1944	56°	.8290	.5592	1.4826
12°	.2079	.9781	.2126	57°	.8387	.5446	1.5399
13°	.2250	.9744	.2309	58°	.8480	.5299	1.6003
14°	.2419	.9703	.2493	59°	.8572	.5150	1.6643
15°	.2588	.9659	.2679	60°	.8660	.5000	1.7321
16°	.2756	.9613	.2867	61°	.8746	.4848	1.8040
17°	.2924	.9563	.3057	62°	.8829	.4695	1.8807
18°	.3090	.9511	.3249	63°	.8910	.4540	1.9626
19°	.3256	.9455	.3443	64°	.8988	.4384	2.0503
20°	.3420	.9397	.3640	65°	.9063	.4226	2.1445
21°	.3584	.9336	.3839	66°	.9135	.4067	2.2460
22°	.3746	.9272	.4040	67°	.9205	.3907	2.3559
23°	.3907	.9205	.4245	68°	.9272	.3746	2.4751
24°	.4067	.9135	.4452	69°	.9336	.3584	2.6051
25°	.4226	.9063	.4663	70°	.9397	.3420	2.7475
26°	.4384	.8988	.4877	71°	.9455	.3256	2.9042
27°	.4540	.8910	.5095	72°	.9511	.3090	3.0777
28°	.4695	.8829	.5317	73°	.9563	.2924	3.2709
29°	.4848	.8746	.5543	74°	.9613	.2756	3.4874
30°	.5000	.8660	.5774	75°	.9659	.2588	3.7321
31°	.5150	.8572	.6009	76°	.9703	.2419	4.0108
32°	.5299	.8480	.6249	77°	.9744	.2250	4.3315
33°	.5446	.8387	.6494	78°	.9781	.2079	4.7046
34°	.5592	.8290	.6745	79°	.9816	.1908	5.1446
35°	.5736	.8192	.7002	80°	.9848	.1736	5.6713
36°	.5878	.8090	.7265	81°	.9877	.1564	6.3138
37°	.6018	.7986	.7536	82°	.9903	.1392	7.1154
38°	.6157	.7880	.7813	83°	.9925	.1219	8.1443
39°	.6293	.7771	.8098	84°	.9945	.1045	9.5144
40°	.6428	.7660	.8391	85°	.9962	.0872	11.4301
41°	.6561	.7547	.8693	86°	.9976	.0698	14.3006
42°	.6691	.7431	.9004	87°	.9986	.0523	19.0811
43°	.6820	.7314	.9325	88°	.9994	.0349	28.6363
44°	.6947	.7193	.9657	89°	.9998	.0175	57.2900
45°	.7071	.7071	1.0000	90°	1.0000	.0000	∞

第二章 基本公式

8. 餘角函數公式 兩角相加的和是90度,這兩角就互相叫做餘角。普通寫做A和 $90 - A$ 。

在圖8 直角三角形中。

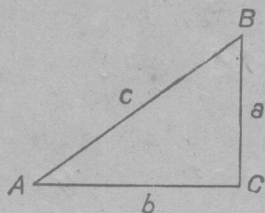


圖 8

$$\angle A + \angle B = 90^\circ;$$

$$\text{所以 } \angle B = 90^\circ - \angle A \dots (1)$$

因爲	$\sin A = \cos B$	} 何故?.....(2)
	$\cos A = \sin B$	
	$\tan A = \cot B$	
	$\cot A = \tan B$	
	$\sec A = \csc B$	
	$\csc A = \sec B$	

將(1)代入(2)中,就有

$$\left. \begin{aligned} \sin A &= \cos (90^\circ - A) \\ \cos A &= \sin (90^\circ - A) \end{aligned} \right\}$$