



普通高等教育“十一五”国家级规划教材



北京高等教育精品教材
BEIJING GAODENG JIAOYU JINGPIN JIAOCAI

高宗升 周 梦 李红裔 编著

线性代数 (第2版)



北京航空航天大学出版社



普通高等教育“十一五”国家级规划教材



北京高等教育精品教材

BEIJING GAODENG JIAOYU JINGPIN JIAOCAI

线性代数

(第2版)

高宗升 周 梦 李红裔 编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书是为理工科大学(非数学专业)本科生编写的线性代数教材,全书共分9章。主要内容有:行列式,矩阵,向量组的线性相关性,线性方程组,矩阵的相似变换,二次型,线性空间,线性变换,线性代数的一些应用。

本书难易适度,结构严谨,重点突出,理论联系实际;特别注重学生对基础理论的掌握和思想方法的学习,以及对他们的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力的培养。

本书不但可作为理工科大学本科生的线性代数教材,也可作为教学要求不同的其他专业的教材,还可作为高等教育自学考试教材及考研参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(第2版)/高宗升,周梦,李红裔编著. —北京:北京航空航天大学出版社,2009.9

ISBN 978-7-81124-894-4

I. 线… II. ①高…②周…③李… III. 线性代数—高等学校—教材 IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 148443 号

线性代数(第2版)

高宗升 周 梦 李红裔 编著

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100191) 发行部电话:010-82317024 传真:010-82328026

<http://www.buaapress.com.cn> E-mail: bhpresse@263.net

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×960 1/16 印张:17 字数:381 千字

2009 年 9 月第 2 版 2009 年 9 月第 1 次印刷 印数:5 000 册

ISBN 978-7-81124-894-4 定价:28.00 元

第2版前言

本书第1版于2005年出版,由于它具有重点突出、条理清楚、难易适度、基础性强和理论联系实际等特点,受到了广大师生的欢迎,并于2006年被评为北京市高等教育精品教材。

本书是在第1版的基础上进行改编的,在保持原有特点的基础上,对各章重新进行了编写,使得内容结构更加科学,使用起来更加方便。在第8章中增加了线性变换的值域与核的内容;为了使读者更好地理解有关内容,对原有的例题进行了适当调整,使其和书中相关内容的结合更加紧密;重新精选了各章的练习题,放在部分节的后面,以供读者使用。

这次修订中,第1~4章由高宗升执笔,第5、6章由李红裔执笔,第7~9章由周梦执笔,最后由高宗升定稿。

这次修订工作得到李尚志教授以及北京航空航天大学数学与系统科学学院同事们的关心和帮助;另外,使用本书的师生提出了一些很好的修改建议。作者在此向他们表示衷心的感谢。由于作者的水平所限,本书在编写上还会有一些不足之处,敬请读者批评指正。

作 者

2009年6月于北京航空航天大学

前 言

线性代数是理工科大学学生的一门重要基础课,也是自然科学和工程技术各个领域广泛应用的数学工具。随着现代科技的飞速发展和计算机的广泛应用,线性代数在理论和应用上的重要性更加突出,同时也对线性代数的教学内容从深度和广度上提出了更高的要求。

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的大学数学理工科线性代数课程的基本要求,结合理工科大学的专业特点和不同专业对线性代数内容的需要,以及作者多年来讲授线性代数的教学经验和体会编写的。在编写中,吸取了国内外多种线性代数教材的优点,广泛征求了师生的意见,努力做到重点突出,难易适度,使各章内容不仅便于教师讲解,而且易于学生接受。考虑到计算机、物理、电子工程、自动控制、航空航天等专业的需要,加强了线性空间和线性变换等近代部分的内容。本书具有如下特点:

1. 条理清楚,重视基础。

在内容的讲解上,注意到科学性和系统性的同时,做到由浅入深,由近及远,生动活泼,通俗易懂。概念的引入清楚、自然、准确;定理的证明清晰、简洁。例如,在讲行列式这一章时,先通过解二元和三元线性方程组,引进二阶和三阶行列式的概念,然后给出 n 阶行列式的定义;围绕着行列式计算这一主题,介绍行列式性质的应用、行列式按行(列)展开以及拉普拉斯定理等内容。

本书特别注重学生对基础理论的掌握、思想方法的学习,以及对他们的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和自学能力的培养。对本书涉及的主要定理,不仅一般都给出了严格的证明,而且对定理的成立背景和使用方法予以介绍和说明。

2. 结构合理,综合性强。

在内容的处理上,采用模块式的方法,把内容相近的部分尽可能地写在一章中。这样,不仅可以把相关内容讲深、讲透,一气呵成,节约篇幅和学时,而且还可以使学生对相应部分的内容有一个全面、清晰、系统的了解。例如,把矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组的解法及解的结构、矩阵的相似变换、二次型、线性

空间和线性变换等有关的内容都单独地写成一章,使学生便于学习和掌握。

3. 例题丰富,便于自学。

线性代数的特点是概念多、结论多、内容抽象、逻辑性较强,初学者较难适应。为了帮助学生加深对基本概念的理解和基本理论与方法的掌握,书中配有较多的典型例题。每章后面附有较多的精选习题。通过这些习题的练习,可以巩固所学内容,训练解题的方法和技巧,培养学生分析问题和解决问题的能力。

自学者通过研读教材,独立完成书中习题,便可基本掌握本书内容。

4. 联系实际,适用面广。

在本书的最后一章,专门介绍线性代数在最小二乘法逼近、图论、线性经济模型等方面的应用,可作为选学内容或学生课下阅读,以增加学生对线性代数这门课的了解和兴趣,开拓视野,增强他们对科技和社会经济的参与能力,提高其理论联系实际的能力。

本书共分9章,前6章为基础部分,讲授这部分内容(不含带*号部分)大约需要40个学时;讲授全书大约需要60个学时。

本书不但可作为理工科大学线性代数课的教材,也可作为教学要求不同的其他专业的教材,还可作为高等教育自学考试教材及考研参考书。

本书由高宗升主编。前4章由高宗升执笔,后5章由周梦执笔,最后由高宗升整理定稿。本书的编写工作得到北京航空航天大学教务处教材科、理学院有关领导以及同事们的关心和支持,并被北京市教委作为市级精品教材立项予以资助。王日爽教授对书稿进行了认真的审阅,提出了许多宝贵的修改意见。作者在此一并表示衷心的感谢。由于作者的水平所限,本书在编写和内容的组织上还可能存在一些不足之处,敬请读者批评指正。

作者

2005年6月于北京航空航天大学

目 录

第 1 章 行列式	1
1.1 n 阶行列式	1
1.1.1 排列与逆序	1
1.1.2 二阶与三阶行列式	2
1.1.3 n 阶行列式的定义	4
习题 1.1	7
1.2 行列式的性质	8
习题 1.2	13
1.3 行列式的展开与计算	14
1.3.1 行列式按一行(或一列)展开	14
1.3.2 拉普拉斯(Laplace)定理	19
习题 1.3	22
1.4 克莱姆(Cramer)法则	23
习题 1.4	27
1.5 数 域	28
第 2 章 矩 阵	30
2.1 矩阵的概念	30
2.2 矩阵的运算	32
2.2.1 矩阵的加法与数乘	32
2.2.2 矩阵的乘法	33
2.2.3 矩阵的转置	40
习题 2.2	42
2.3 逆矩阵	43
2.3.1 逆矩阵的概念	43
2.3.2 正交矩阵	48
习题 2.3	49
2.4 分块矩阵	50
2.4.1 分块矩阵的概念	51
2.4.2 分块矩阵的运算	51



2.4.3 准对角形矩阵	53
习题 2.4	56
2.5 初等变换与初等矩阵	57
2.5.1 矩阵的初等变换	57
2.5.2 初等矩阵	61
2.5.3 分块矩阵的初等变换	64
习题 2.5	67
2.6 矩阵的秩	68
2.6.1 矩阵的秩的概念	68
2.6.2 用初等变换求矩阵的秩	69
习题 2.6	74
第3章 向量组的线性相关性	76
3.1 向量的概念与运算	76
3.1.1 向量的概念	76
3.1.2 向量的运算	77
3.2 向量组的线性相关性	79
3.2.1 向量组的线性相关与线性无关	79
3.2.2 向量组线性相关性的判别法	83
3.2.3 向量组线性相关性的一些性质	86
习题 3.2	87
3.3 向量组的秩	88
3.3.1 向量组的秩与极大线性无关组	88
3.3.2 向量组的等价	90
习题 3.3	92
3.4 向量空间	94
3.4.1 向量空间的概念	94
3.4.2 基、维数与坐标	95
3.4.3 基变换与坐标变换	96
习题 3.4	100
第4章 线性方程组	101
4.1 线性方程组有解的判定定理	101
4.2 线性方程组解的求法	103
习题 4.2	111
4.3 线性方程组解的结构	113

4.3.1	齐次线性方程组解的结构	113
4.3.2	非齐次线性方程组解的结构	117
习题 4.3		122
第 5 章	矩阵的相似变换	126
5.1	方阵的特征值与特征向量	126
5.1.1	特征值与特征向量的概念	126
5.1.2	特征值与特征向量的求法	127
5.1.3	特征值与特征向量的性质	130
习题 5.1		133
5.2	矩阵的相似对角化	133
5.2.1	相似矩阵	133
5.2.2	矩阵的相似对角化	135
习题 5.2		139
5.3	实对称矩阵的相似对角化	140
5.3.1	向量的内积与施密特(Schmidt)正交化方法	140
5.3.2	实对称矩阵的特征值与特征向量	143
5.3.3	实对称矩阵的相似对角化	144
习题 5.3		148
5.4*	Jordan 标准形	149
5.4.1	Jordan 标准形的概念	149
5.4.2	Jordan 标准形的求法	150
习题 5.4*		153
第 6 章	二次型	155
6.1	二次型及其矩阵表示	155
6.2	化二次型为标准形	157
6.2.1	配方法	157
6.2.2	初等变换法	161
6.2.3	正交变换法	164
习题 6.2		165
6.3	惯性定理	166
6.3.1	实二次型的规范形及唯一性	167
6.3.2	复数域上二次型的规范形	170
习题 6.3		171
6.4	正定二次型和正定矩阵	172

习题 6.4	177
第 7 章 线性空间	179
7.1 线性空间的定义和性质	179
7.1.1 线性空间的定义	179
7.1.2 线性空间的初步性质	180
习题 7.1	182
7.2 维数、基与坐标	182
7.2.1 线性空间的维数与基	182
7.2.2 基变换与坐标变换	184
7.2.3 线性空间的同构	186
习题 7.2	188
7.3 线性子空间	189
7.3.1 线性子空间的概念与基本性质	189
7.3.2 子空间的交与和	191
习题 7.3	195
7.4 欧氏空间	196
7.4.1 欧氏空间的定义与基本性质	196
7.4.2 度量矩阵与标准正交基	200
习题 7.4	205
第 8 章 线性变换	206
8.1 线性变换的概念和基本性质	206
8.1.1 线性变换的定义	206
8.1.2 线性变换的运算	209
习题 8.1	212
8.2 线性变换的矩阵表示	213
习题 8.2	220
8.3 线性变换的特征值和特征向量	221
习题 8.3	223
8.4 线性变换的值域与核	223
习题 8.4	225
8.5 不变子空间	226
习题 8.5	229
第 9 章 线性代数的一些应用	230
9.1 在图论中的应用	230



习题 9.1	234
9.2 在最小二乘法中的应用	234
习题 9.2	240
9.3 在经济模型中的应用	240
习题 9.3	244
习题答案	245
参考文献	260

第1章 行列式

行列式是由解线性方程组引进的,它不仅是研究线性代数的重要工具,而且在自然科学的许多领域有着广泛的应用。本章首先给出 n 阶行列式的定义,然后分别介绍行列式的性质、计算方法和应用。

1.1 n 阶行列式

1.1.1 排列与逆序

定义 1.1.1 由自然数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列,记为 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 。

例如,4213 是一个 4 阶排列,52341 是一个 5 阶排列。 $1, 2, 3, 4$ 可组成 $24 = 4!$ 个不同的 4 阶排列, $1, 2, \dots, n$ 可组成 $n!$ 个不同的 n 阶排列。按数字的自然顺序由小到大的 n 阶排列 $123 \cdots n$ 称为标准排列或自然排列。

定义 1.1.2 在一个排列中,若一个较大的数排在一个较小的数的前面,则称这两个数构成一个逆序。一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数。用 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数。逆序数是偶数的排列称为偶排列,逆序数是奇数的排列称为奇排列。

对一个 n 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$,如何求它的逆序数呢? 设这个排列中排在 j_1 后面比 j_1 小的数的个数为 $\tau(j_1)$,排在 j_2 后面比 j_2 小的数的个数为 $\tau(j_2)$, $\dots$,排在 j_{n-1} 后面比 j_{n-1} 小的数的个数为 $\tau(j_{n-1})$,则排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数为

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = \tau(j_1) + \tau(j_2) + \cdots + \tau(j_{n-1})$$

例 1.1.1 求排列 32514 与 $n(n-1) \cdots 321$ 的逆序数。

解 $\tau(32514) = 2 + 1 + 2 + 0 + 0 = 5$

$$\tau(n(n-1) \cdots 321) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$$

排列 32514 为奇排列。排列 $n(n-1) \cdots 321$,当 $n = 4k, 4k+1$ 时为偶排列;当 $n = 4k+2, 4k+3$ 时为奇排列。

定义 1.1.3 把一个排列中某两个数的位置互换,而其余的数不动,就得到一个新的排列,这种变换称为排列的一个对换。

如果将排列 32514 中的 2 与 4 对调,则得到新的排列 34512,它的逆序数 $\tau(34512) = 2 + 2 + 2 + 0 = 6$,为偶排列。这说明,奇排列 32514 经过一次对换得到偶排列 34512。一般地,有以下定理。

定理 1.1.1 一次对换改变排列奇偶性。

证 分两种情况考虑。

(1) 相邻两个数对换的情况

设排列为

$$\cdots ij \cdots \quad (1.1.1)$$

经过 i 与 j 的对换变成

$$\cdots ji \cdots \quad (1.1.2)$$

这里“ $\cdots$ ”表示对换前后排列中不变的数。由于这两个排列只交换 i, j 两个数的位置,其余的数的位置没有改变,所以各数的逆序数中只有 $\tau(i)$ 和 $\tau(j)$ 可能有变化,其余各数的逆序数不变。当 $i < j$ 时,排列(1.1.2)的逆序数比排列(1.1.1)增加 1;如果 $i > j$,排列(1.1.2)的逆序数比排列(1.1.1)减少 1。因此排列(1.1.1)与排列(1.1.2)的奇偶性相反。

(2) 一般情况

设某个排列

$$\cdots i \quad k_1 \quad k_2 \cdots k_s \quad j \cdots \quad (1.1.3)$$

经过 i 与 j 的对换变成

$$\cdots j \quad k_1 \quad k_2 \cdots k_s \quad i \cdots \quad (1.1.4)$$

由排列(1.1.3)变为排列(1.1.4)可以通过一系列两两相邻的对换来实现。先将 i 依次与 $k_1, k_2, \cdots, k_s, j$ 经过 $s+1$ 次相邻对换后,将排列(1.1.3)变为

$$\cdots \quad k_1 \quad k_2 \cdots k_s \quad j \quad i \cdots \quad (1.1.5)$$

再将 j 依次与 $k_s, k_{s-1}, \cdots, k_1$ 经过 s 次相邻对换,把排列(1.1.5)变成排列(1.1.4),于是排列(1.1.3)化为排列(1.1.4)总共作了 $2s+1$ 次相邻对换。而每经过一次相邻对换,都改变排列的奇偶性,由于 $2s+1$ 为奇数,所以排列(1.1.3)与排列(1.1.4)的奇偶性相反。证毕。

推论 任何一个 n 阶排列都可以通过对换化成标准排列,并且所作对换的次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同。

1.1.2 二阶与三阶行列式

本段的目的是叙述行列式这个概念的形成,这要从解线性方程组谈起。

设二元一次线性方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.6)$$

用消元法去解此方程组。先分别用 a_{22} 和 $-a_{12}$ 去乘以式(1.1.6)的一式和二式的两端,然后再将得到的两式相加,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

用类似方法,从式(1.1.6)中消去 x_1 ,得



$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 方程组(1.1.6)有唯一解

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 &= \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.7)$$

为了便于记忆, 引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1.1.8)$$

把式(1.1.8)称为二阶行列式。 D 中横写的称为行, 竖写的称为列。 D 中共有两行两列, 其中数 a_{ij} 称为行列式的元素, 它的第一个下标 i 表示这个元素所在的行, 称为行指标; 第二个下标 j 表示这个元素所在的列, 称为列指标。例如 a_{21} 就是位于 D 中第二行、第一列上的元素。

把行列式中从左上角到右下角的连线称为主对角线, 从右上角到左下角的连线称为副对角线。由式(1.1.8)可知, 二阶行列式的值是主对角线上元素 a_{11}, a_{22} 的乘积减去副对角线上元素 a_{12}, a_{21} 的乘积。按照这个规则, 有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

于是, 当 $D \neq 0$ 时, 二元一次线性方程组(1.1.6)的解可用二阶行列式表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

同理, 考虑三元一次线性方程组

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.9)$$

应用消元法先后消去 x_2 和 x_3 , 得到

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 = \\ b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}b_2a_{32} \end{aligned}$$

把 x_1 的系数记为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ &= a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

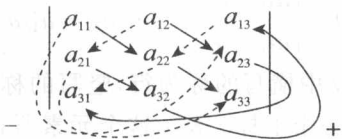
由于 D 中共有三行三列, 故把它称为三阶行列式。因为它由方程组(1.1.9)中变元的系数组

成, 又称其为方程组(1.1.9)的**系数行列式**。如果 $D \neq 0$, 容易算出方程组(1.1.9)有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中, $D_j (j=1, 2, 3)$ 分别是在 D 中把第 j 列的元素换成方程组(1.1.9)右端的常数项 b_1, b_2, b_3 得到。

三阶行列式是六项的代数和, 其中每一项都是 D 中不同行、不同列的三个元素的乘积冠以正负号。为了便于记忆, 可写成



图中实线上三个元素的乘积的项取正号, 虚线上三个元素的乘积的项取负号。这种方法称为三阶行列式的**对角线法则**。

由上面的讨论, 自然会想到如何把二阶、三阶行列式推广到一般的 n 阶行列式, 并用它来表达由 n 个未知量、 n 个方程所组成的线性方程组的解。通过观察二阶、三阶行列式, 发现它们有以下特点:

① 二阶、三阶行列式的每一项都是取自不同行、不同列的元素的乘积, 其代数和即为该行列式的值。二阶行列式有 $2!$ 项, 三阶行列式有 $3!$ 项。

② 代数和中每一项前的符号有以下规律: 行指标取成标准排列时, 由列指标组成排列的奇偶性决定每项前的正负号, 偶者为正, 奇者为负。

综上, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

这里 $\sum_{j_1 j_2}$ 表示对 1, 2 这两个数的所有排列取和, $\sum_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对 1, 2, 3 这三个数的所有排列取和。

推而广之, 可以定义 n 阶行列式。

1.1.3 n 阶行列式的定义

定义 1.1.4 由 n^2 个元素排成 n 行、 n 列, 以



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记之,称其为 n 阶行列式,它代表一个数值。此数值是取自上式中不同行、不同列的 n 个元素 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 乘积的代数和,其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是数字 $1, 2, \cdots, n$ 的某一个排列,故共有 $n!$ 项。每项前的符号按下列规定:当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列时取正号,当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列时取负号,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.1.11)$$

其中, $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个数组成的所有排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 取和。

当 $n=1$ 时,即为一阶行列式,规定 $|a| = a$; 当 $n=2, 3$ 时,即为前面定义的二阶、三阶行列式。

为了书写方便, n 阶行列式也可记为 $D_n = |a_{ij}|_n$ 。

例 1.1.2 计算 n 阶下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由 n 阶行列式的定义,展开式的一般项为 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 。要计算该行列式的值,只需把其中的非零项求出来即可。

这个行列式中,第一行除去 a_{11} 外,其余元素都是零,所以只能取 $j_1=1$; 在第二行中,除去 a_{21}, a_{22} 外,其余元素都是零,而 a_{11}, a_{21} 同在第一列,所以只能取 $j_2=2$; 如此下去,在第 n 行,只能取 $j_n=n$ 。因此该行列式展开式中不为零的项只有一项

$$a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

由于该项的列指标的排列是标准排列,其逆序数为零,所以取正号,故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

即下三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积。

同理,对于上三角形行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

特别地,对于对角形行列式,有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n$$

例 1.1.3 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 用类似于例 1.1.2 的方法,该行列式的展开式中,只有下列一项不为零,即

$$a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1}$$

这一项列指标排列的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 321) = \frac{n(n-1)}{2}$$

故

$$D_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1}$$

在行列式的定义中,规定 n 个元素相乘时,元素的行指标按标准排列,由列指标排列的逆序数决定各项前的正负号。那么能否在定义中 n 个元素的相乘项里,把元素的列指标排列按标准排列,而由行指标排列的逆序数决定各项前的正负号呢? 下面的定理回答了这一问题。

定理 1.1.2 n 阶行列式也可定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \quad (1.1.12)$$

其中, $\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个数组成的所有排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 取和。

证 对于式(1.1.11)右端的任一项

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$