

新學制高
中教科書

三角術

趙修乾
編

新 學 制
高 級 中 學 教 科 書
三 角 術

此書有著作權翻印必究

中華民國十八年二月初版
回每册定價大洋捌角
外埠酌加運費匯費

編輯者 趙 修 乾

發行兼印刷者 上海寶山路商務印書館

發行所 上海及各埠商務印書館

New System Series
TRIGONOMETRY
By
CHAO SIU CHIEN

1st ed., Jan., 1924

5th ed., Dec., 1929

Price: \$0.80, postage extra

THE COMMERCIAL PRESS, LTD., SHANGHAI

All Rights Reserved

編輯大意

一、本書供新學制高級中學程度之用。

一、本書首述圖解法之簡便，以顯出三角學之嚴密。

一、書中論角約分三段：第一段論銳角之三角函數，而繫以直三角形之解法；第二段論鈍角之三角函數，而繫以斜三角形之解法；第三段論一般角之三角函數，而繫以三角方程之解法。至於倍角半角諸函數，弧度百分度諸單位，均置於斜三角形解法之後者，期於由淺入深，不致開卷茫然也。

一、三角級數，極座標之曲線，函數之指數式(*Exponential form*)，雙曲線函數(*Hyperbolic function*)等，因課程關係，或缺而不書，或語而不詳。有志之士，尙宜於高等數學中求之。

一、一式每引二證，一問或設數解，意在使能者知變化之妙，而興趣彌增；不能者則雖蔽於此，亦可悟諸彼。

一、演算錯誤，每不自覺，施以校對，是非判然，故本書注重校對。

一、習題之答數，不全載出，其載者固可充校對之用，其不載者則得數非自行校對不可。

一、習題中有關於天文地理物理機械航海測量等科目者，如未有預備知識，無妨酌量略去。

一. 此書層節大致仿 *Moritz* 三角學, 教材則傍採 *Loney*, *Hobson*, *Hall and Knight*, *Wentworth* 等書, 至於編者出意之處, 亦不爲少.

一. 度量衡之不統一, 亦現世紀之一憾事, 原書所有哩呎磅噸等非十進之單位, 茲皆以公尺公斤等換算之.

十三年一月編者識

目 錄

第一章 圖解法

	頁
1. 三角形之圖解.....	1
2. 何謂三角學.....	4

第二章 銳角之三角函數

3. 定義.....	6
4. 餘角之各函數.....	12
5. 特別角之函數.....	14
6. 基本公式.....	18
7. 以一函數表諸函數.....	18
8. 函數化簡法.....	20
9. 三角恆等式.....	22

第三章 直角三角形之真數解法

10. 三角真數表.....	27
11. 三角真數表之用法.....	27
12. 誤差之範圍.....	30
13. 直角三角形之解法.....	32
14. 細長之直角三角形.....	34

第四章 對數

	頁
15. 定義.....	37
16. 基本公式.....	38
17. 常用對數.....	39
18. 首數之推算.....	39
19. 尾數之法則.....	40
20. 常用對數表.....	41
21. 對數率.....	44
22. 自然對數.....	44
23. 三角對數表.....	46
24. S, T, 表.....	47

第五章 直角三角形之對數解法

25. 直角三角形之對數解法.....	50
26. 斜角三角形之直角解法.....	51
27. 有効數字.....	54
28. 測量上之用語.....	57

第六章 鈍角之三角函數

29. 矩形座標.....	64
30. 小於 180° 之角之三角函數.....	65
31. 基本公式.....	66
32. 補角之各函數.....	67
33. $90^\circ + \theta$ 之各函數.....	68
34. 180° 之各函數.....	69

第七章 三角形之性質

	頁
35. 正弦定律	72
36. 投影定理	73
37. 餘弦定律	74
38. 斜角三角形之解法	75
39. 正切定律	76
40. 面積公式	78
41. 以邊表半角函數	79

第八章 斜角三角形之解法

42. 斜角三角形之解法	84
43. 實用例題	95

第九章 任意角及其計算法

44. 角之廣義	112
45. 角之單位	113
46. 弧度法	114
47. 角, 弧, 半徑之關係	116

第十章 任意角之三角函數

48. 任意角函數之定義	120
49. 函數之週期性	121
50. 函數之變化	122
51. 基本公式	124
52. 函數之線表示法	124
53. 第三象限之角之函數	125
54. 第四象限之角之函數	127

	頁
55. 負角之函數	129
56. 任意角函數之公式	129

第十一章 多角之三角函數

57. 正餘弦之和角定理	134
58. 和角定理別證	136
59. 正餘弦之較角定理	136
60. 和較角之正切	140
61. 倍角之函數	141
62. 半角之函數	141
63. 正弦及餘弦之和較	141

第十二章 三角方程式

64. 主值	149
65. 有正弦求角	149
66. 有餘弦求角	150
67. 有正切求角	150
68. 三角方程式	151
69. 含倍角之三角方程式	157
70. 聯立三角方程式	159
71. 對數式之答數	163
72. 消去法	166
73. 反函數	171

第十三章 三角函數之曲線

74. 直線 $y = mx + c$	175
---------------------------	-----

	頁
75. 圖 x^2+y^2 , 及雙曲線 $x^2-y^2=a^2$	175
76. 正弦曲線 $y=\sin x$	177
77. 正切曲線 $y=\tan x$	178
78. 曲線 $y=a_1\sin(b_1x+c_1)+a_2\sin(b_2x+c_2)+\dots$	178

第十四章 複數

79. 定義.....	182
80. 複數之作圖.....	182
81. 絕對值與方位角.....	183
82. 複數加減之作圖.....	183
83. 物理學上之應用.....	184
84. 複數之乘除.....	186
85. 複數之乘方.....	187
86. 複數之方根.....	188
87. 1之立方根.....	192
88. ω 之立方根.....	192
89. 三次方程式之解法.....	193
90. 以 $\sin\theta\cos\theta$ 表 $\sin n\theta, \cos n\theta$	197
91. 以各倍角之正餘弦表 $\sin\theta, \cos\theta$	198

第十五章 三角級數及表之構造

92. e 之性質.....	201
93. 指數級數.....	203
94. 對數級數.....	203
95. 對數之計算法.....	204

	頁
96. 比例差之原理	207
97. $\frac{\sin x}{x}, \frac{\tan x}{x}$ 之極限值	208
98. $\cos^n \frac{x}{n}, \left\{ \frac{\sin(x/n)}{x/n} \right\}^n$ 之極限值	210
99. 正弦餘弦正切之級數	211
100. 三角函數表之構造	212

新學制高中教科書

平面三角術

第一章 圖解法

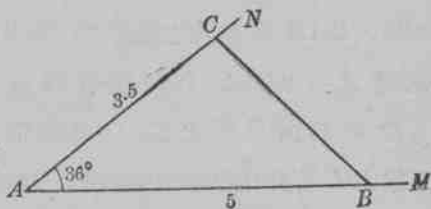
§1. 三角形之圖解 平面三角形由三邊與三角而成。邊與角中，若知其三，則其形狀定；三者之中，若含有邊，則其大小亦定，更分別言之，則構成三角形之要件，可分為四種：即

- I. 一邊與二角, II. 二邊與其一對角,
III. 二邊與其夾角, IV. 三邊.

有其一種，便可畫其全形。畫邊用尺，* 畫角用分度板，畫圓與弧以聯絡之，則用兩腳規。凡作圖時，均須備此三者。

例一 已知三角形之二邊為 5 公分與 3.5 公分，其夾角為 36° ；試畫其全形。

解 用分度板畫 $\angle MAN = 36^\circ$ ，於 AM 上取 $AB = 5$ 公分，於 AN 上取 $AC = 3.5$ 公分，連



結 BC ，則 ABC 即為所求三角形。

* 尺以用公尺 *Metre* 為限，其 $\frac{1}{10}$ 曰公寸，其 $\frac{1}{100}$ 曰公分，1000 公尺曰公里。

所未知之二角一邊，亦可由圖略測其值，即

$$BC=2.98 \text{ 公分}, \angle ABC=43.5^\circ, \angle ACB=100.5^\circ.$$

三角形之邊大者，宜以同一比例縮之使小；譬如二邊為 30 里與 42 里，則宜以 3 公分與 4.2 公分之直線代之。反之，邊小者，又宜以同一比例擴之使大，但角不因縮小或擴大而變。

以作圖代計算而解問題者，謂之圖解 *Graphic Solution*。實用上諸問題，若無精算之必要，均可以圖解代之。

例二 欲求河廣，於岸邊，擇 A, B 二點，量其距離，得 200 公尺；對岸有 P 點，在 A 處測 $\angle BAP$ ，得 50° ；在 B 處測 $\angle ABP$ ，得 36° 。求河廣。

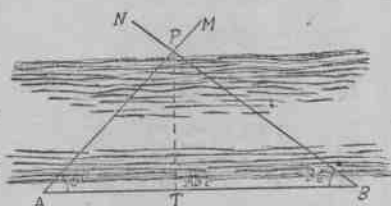
解 先擇適宜之縮尺。

譬如以 1 公分代 10 公

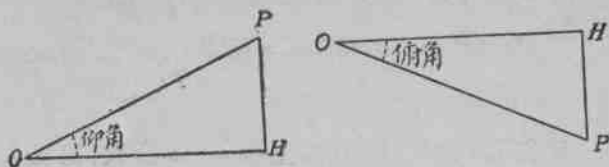
尺，則 $AB=20$ 公分。次作

$\angle MAB=50^\circ$ ，及 $\angle NBA$

$=36^\circ$ ，又 AM 與 BN 之交點為 P ，引 $PT \perp AB$ ，則 PT 為河廣。量之得 9 公分，即河廣合 90 公尺。



設 P 為所欲測之點， O 為觀測者之所在。由 P 作直立線 PH ，又由 O 作水平線與之相交於 H 。若 P 在 H 上，則 $\angle HOP$ 稱曰 P 之仰角 *Angle of Elevation*，亦曰高度 *Altitude*；若 P 在 H 下，則 $\angle HOP$ 稱曰 P 之俯角 *Angle of Depression*。



習題一

1. 三角形之三角爲 A, B, C 其對邊爲 a, b, c . 今有下列各條件, 試畫其全形,

a. 有 A, B, c ;

b. 有 a, b, C ;

c. 有 a, b, c ;

d. 有 a, b, A ;

e. 上題 (d) 在如何情形可有兩答? 在如何情形僅有一答?

試以圖解法求下列各題之略值, 但距離要測至有效數字之首三位止, 三位以下者, 四捨五入之. 角要測至每 $15'$ 止有餘數亦隨其大小而或整或去之.

2. 有 $a=5, b=4, c=7$; 求各角.

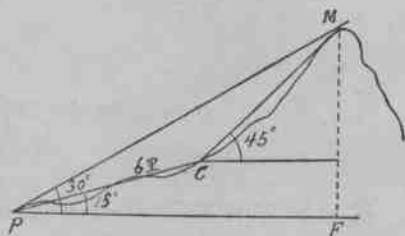
3. 有 $b=4, c=5, C=90^\circ$; 求餘邊及角.

4. 有 $b=270, c=600, A=100^\circ$; 求第三邊之近似整數值.

5. 有 $a=0.029, B=32^\circ 15', C=136^\circ 45'$; 求 b, c .

6. 有 $a=42$, $b=51$, $A=55^\circ$; 求餘邊與角之略值.
7. 有 $A=44^\circ 30'$, $B=57^\circ$, $C=78^\circ 30'$; 求三邊之近似比.
8. 屋高 7.5 公尺, 地平面上影長 19 公尺, 問太陽之高度?
9. 在離樹下 400 尺之地, 測樹梢之仰角得 20° , 問樹高幾尺?
10. 甲地至乙地路長 8 里, 乙地至丙地路長 10 里, 兩路成 65° 之角; 問乙地至丙地路長幾里?

11. 自山麓 P 處, 測山頂 M 之仰角, 得 30° ; 順山坡前行 6 里至 C , 再測其仰角, 得 45° . 如山坡之傾斜度平均為 15° , 求山高 MF .



12. 有兩人距 2 里之地相對而立, 同時測飛船之高度, 得 56° 與 42° ; 問飛船之高?
13. 三角形之三邊為 10, 12, 15, 求其內切圓與外接圓之半徑.
14. 有半徑 10 尺之圓, 求圓內接七邊形之周圍.

§ 2. 何謂三角學? 圖解法雖云簡便, 然畫點畫

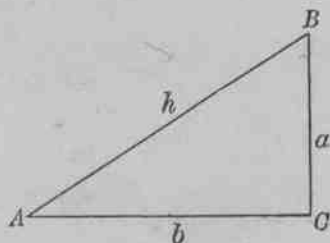
線不免時有出入，而測邊測角又難辨及細微；故欲求結果正確，而無誤差，非捨作圖而用算式不可；此三角學 *Trigonometry* 之所由生也。三角學者，以研究邊與角之性質及關係，且應用之以解決實際上諸問題為目的。

第二章 銳角之三角函數

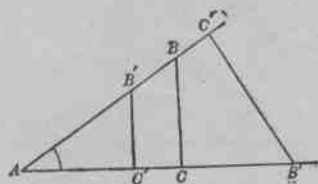
§3. 定義 設有銳角 A , 自其一邊上任取一點 B , 向他邊作垂線 BC , 則成直角三角形 ABC . 命 A 角之對邊 BC 爲 a , 鄰邊 AC 爲 b , 斜邊 AB 爲 h , 則三邊間, 有下六比, 卽

$$\frac{a}{h}, \frac{b}{h}, \frac{a}{b}$$

及其逆數 $\frac{h}{a}, \frac{h}{b}, \frac{b}{a}$



A 角若定, 則各比不因三角形之大小而變. 何則, 試於角之任一邊上, 另取 B' 點, 向其對邊作垂線 $B'C'$; 則 $AB'C'$ 與 ABC 爲相似三角形而



$$\frac{B'C'}{AB'} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{h};$$

是 A 角之對邊與斜邊之比, 不因三角形之大小而變也. 他比之不變, 亦可類推.

然角變則比亦隨而變, 蓋變後之三角形不與原形相似也. 故比者乃角之函數 *Function*. 六比皆有專名如下.

A 角之對邊與斜邊之比, 爲其角之正弦 *Sine*, 記以 $\sin A$. 卽