高等院校“十一五”规划教材·公共基础类

新编高等数学

韩群　宋立温／主编

冶金工业出版社
www.cnmip.com.cn

高等院校“十一五”规划教材·公共基础类

新编高等数学

主　编　韩　群　宋立温
副主编　刘晓峰　晁军海
　　　　牛　静　常秀芳

北　京
冶金工业出版社
2009

内 容 简 介

本书充分体现高等教育的特色，理论与技能并重。理论知识既体现“必须”、“够用”、“实用”的原则，又着眼为学生未来的发展提供可持续提高的知识保证；突出自学能力、数学基本运用能力、数学基本技能和数学建模能力的训练、培养和提高。本书的主要内容有：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、微分方程、无穷级数。

本书内容通俗易懂、直观精练、便于自学、注重技能；突出实用性、应用性、现代性。本书可作为高等院校各专业的高等数学教材，也可作为其他各专业相关人员的工具书和参考用书。。

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学/韩群，宋立温主编. —北京：冶金工业出版社，2009.8

ISBN 978-7-5024-5053-3

Ⅰ. 新…　Ⅱ. ①韩…②宋…　Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 140113 号

出 版 人　曹胜利

地　　址　北京北河沿大街嵩祝院北巷 39 号，邮编 100009

电　　话　(010)64027926　电子信箱　postmaster@cnmip.com.cn

责任编辑　刘　源

ISBN 978-7-5024-5053-3

北京天正元印务有限公司印刷；冶金工业出版社发行；各地新华书店经销

2009 年 8 月第 1 版，2009 年 8 月第 1 次印刷

787mm×1092mm　1/16；23.75 印张；566 千字；372 页；1-3000 册

32.00 元

前　言

高等数学是一门重要的基础数学课程，它的基本概念、理论和方法具有很强的逻辑性、抽象性和广泛的应用性。为适应我国高等教育的飞速发展，加强教材的配套建设，编者在多年的教学实践基础上编写了本书。

在本书的编写过程中，充分考虑了以下几个方面：

(1) 突出高等教育的特色，切实有效地提高学生的数学思维能力和分析解决实际问题的能力，特别是数学基本运用技能和数学建模能力的培养。书中的基本技能训练题、例题、习题从基础到综合、系统、全面，占了较大篇幅，为师生的教与学提供了较大的选择空间。

(2) 以学生为本，便于自学，注重培养学生的自学能力和拓宽、发展知识的能力。每一章中注重对知识精髓、解题方法思路和规律技巧等进行详细的归纳总结，并且各章后都配有习题。

(3) 参考了各类专业关于高等数学的课程内容设置和课时分配，附录 1 给出了高等数学各类专业选讲内容与课时分配参考。

本书由韩群、宋立温任主编，刘晓峰、晁军海、牛静、常秀芳任副主编，杨淑华、王宝乾、焦树峰、靖晓英参加编写。

由于编者水平所限，书中如有不足之处敬请使用本书的师生与读者批评指正，以便修订时改进。如读者在使用本书的过程中有其他意见或建议，恳请向编者(bjzhangxf@126.com)踊跃提出宝贵意见。

编　者

目 录

第 1 章 函数 ……1

1.1 集合、区间与邻域……1

1.1.1 集合……1

1.1.2 区间……2

1.1.3 邻域……3

1.2 函数的概念……4

1.2.1 常量和变量……4

1.2.2 函数的定义……4

1.2.3 函数的图像……6

1.2.4 函数的表示法……6

1.2.5 分段函数……7

1.2.6 反函数……8

1.3 函数的性质……9

1.3.1 单调性……9

1.3.2 奇偶性……9

1.3.3 周期性……9

1.3.4 有界性……10

1.4 初等函数……10

1.4.1 基本初等函数……10

1.4.2 复合函数……13

1.4.3 初等函数……15

1.4.4 函数定义域的求法……15

1.5 函数应用与数学建模……17

1.5.1 数学模型……17

1.5.2 数学建模……18

1.5.3 数学建模的意义……21

1.5.4 数学模型与函数应用……22

1.5.5 常用的经济函数模型……23

第 1 章 习题……28

第 2 章 极限与连续……30

2.1 数列的极限……30

2.1.1 数列的定义……30

2.1.2 数列极限的概念……31

2.1.3 数列极限的基本性质……33

2.2 函数的极限……33

2.2.1 极限的概念……33

2.2.2 函数极限的性质……36

2.3 无穷小量与无穷大量……36

2.3.1 无穷小量及其性质……36

2.3.2 无穷大量及其性质……38

2.3.3 无穷小与无穷大的关系……38

2.4 极限的四则运算……39

2.4.1 极限的四则运算……39

2.4.2 极限存在的准则和两个重要极限……44

2.5 无穷小量的比较……49

2.6 函数的连续性……52

2.6.1 连续函数的概念……52

2.6.2 连续函数的运算……55

2.6.3 闭区间上连续函数的基本性质……60

2.6.4 函数间断点及其分类……61

第 2 章 习题……63

第 3 章 导数与微分……70

3.1 导数的概念……70

3.1.1 实践中的变化率……70

3.1.2 导数的定义……72

3.1.3 导数的几何意义……76

3.1.4 导数的经济意义——边际经济量……77

3.1.5 函数的可导性与连续性之间的关系……78

3.2 导数的基本公式和求导方法……79

3.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则……79

3.2.2 反函数的求导法则……82

3.2.3 复合函数的求导法则 ……83
3.2.4 隐函数的导数 ……86
3.2.5 对数求导法 ……88
3.2.6 由参数方程所确定的函数的导数 ……89
3.2.7 分段函数求导 ……90
3.2.8 高阶导数 ……91
3.3 函数的微分 ……94
3.3.1 微分的概念 ……94
3.3.2 微分的基本公式与运算法则 ……96
3.3.3 微分在近似计算中的应用 ……99
3.3.4 微分对边际经济量的解释 ……100
3.3.5 绝对误差与相对误差 ……101
第 3 章　习题 ……102

第 4 章　微分中值定理与导数的应用 ……107

4.1 微分中值定理 ……107
4.1.1 罗尔定理(Rolle) ……107
4.1.2 拉格朗日中值定理(Lagrange) ……108
4.1.3 柯西中值定理(Cauchy) ……111
4.2 罗必塔法则 ……111
4.2.1 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限 ……111
4.2.2 其他类型的未定式的极限 ……113
4.3 函数的极值 ……115
4.3.1 函数单调性的判定法 ……115
4.3.2 函数的极值 ……117
4.4 函数的最值 ……121
4.4.1 闭区间上连续函数的最大值与最小值 ……121
4.4.2 应用问题中的最大值与最小值 ……122
4.5 曲线的凹凸及拐点 ……123
4.5.1 曲线的凹凸性及其判定方法 ……123
4.5.2 曲线的拐点及其求法 ……124
4.6 简单函数的作图 ……126
4.6.1 曲线的渐近线 ……126
4.6.2 函数图形的描绘 ……127
第 4 章　习题 ……129

第 5 章　不定积分 ……135

5.1 不定积分的概念与性质 ……135
5.1.1 原函数与不定积分 ……135
5.1.2 不定积分的性质与基本公式 ……138
5.2 换元积分法 ……141
5.2.1 第一换元法(凑微分法) ……141
5.2.2 第二换元法 ……148
5.3 分部积分法 ……155
5.4 积分表的使用 ……160
5.4.1 直接查表 ……161
5.4.2 先变换再查表 ……161
5.4.3 用递推公式 ……161
5.5 经济应用举例 ……162
5.5.1 已知总产量的变化率，求总产量函数 ……162
5.5.2 已知边际函数，求总经济量函数 ……163
第 5 章　习题 ……164

第 6 章　定积分及其应用 ……168

6.1 定积分的概念 ……168
6.1.1 引例 ……168
6.1.2 定积分的定义 ……172
6.1.3 定积分的几何意义 ……175
6.2 定积分的基本性质 ……176
6.3 微积分的基本定理 ……178
6.3.1 变上限的定积分 ……178
6.3.2 微积分的基本定理 ……179
6.4 定积分的计算 ……184
6.4.1 定积分的换元积分法 ……184
6.4.2 定积分的分部积分法 ……187
6.5 广义积分 ……190
6.5.1 无穷区间上的广义积分 ……190

6.5.2　无界函数的广义积分 ············192

6.6　定积分的应用 ··································193

6.6.1　定积分的微元法 ······················194

6.6.2　定积分在几何上的应用·········194

6.6.3　定积分在物理上的应用·········200

6.6.4　定积分在经济学上的应用·····202

第 6 章　习题 ···204

第 7 章　向量代数与空间解析几何·········210

7.1　行列式 ··210

7.1.1　二阶行列式 ·····························210

7.1.2　三阶行列式 ·····························211

7.2　向量及线性运算······························213

7.2.1　向量的概念 ·····························213

7.2.2　向量的加减法 ·························214

7.2.3　向量与数量的乘积 ·················215

7.2.4　向量线性运算的性质 ············215

7.3　空间直角坐标系与向量的坐标表示 ···································216

7.3.1　空间直角坐标系 ·····················216

7.3.2　向量的坐标表示 ·····················218

7.4　向量的乘法 ····································220

7.4.1　向量的数量积 ·························220

7.4.2　向量的向量积 ·························222

7.5　平面方程 ··225

7.5.1　平面的点法式方程 ·················225

7.5.2　平面的一般方程 ·····················225

7.5.3　两平面的夹角 ·························228

7.6　空间直线的方程······························228

7.6.1　空间直线方程的各种形式·····228

7.6.2　空间两直线的夹角 ·················231

7.7　二次曲面与空间曲线························232

7.7.1　曲面方程的概念 ·····················232

7.7.2　常见的二次曲面及方程·········232

7.7.3　空间曲线的方程 ·····················234

第 7 章　习题 ···236

第 8 章　多元函数微积分学························239

8.1　二元函数的概念、极限与连续·········239

8.1.1　二元函数的概念······················239

8.1.2　二元函数的极限······················241

8.1.3　二元函数的连续性··················242

8.2　偏导数···243

8.2.1　偏导数的概念··························243

8.2.2　偏导数的几何意义··················244

8.2.3　高阶偏导数 ·····························245

8.3　全微分···246

8.3.1　全微分的概念··························246

8.3.2　全微分在近似计算中的应用 ·····································248

8.4　多元复合函数的求导法则················248

8.5　隐函数的求导法则···························250

8.6　二元函数的极值和最值····················252

8.6.1　二元函数的极值······················252

8.6.2　二元函数的最值······················253

8.6.3　条件极值 ·································255

8.7　偏导数的应用··································256

8.7.1　偏导数在几何上的应用·········256

8.7.2　偏导数在经济上的应用·········260

8.8　二重积分··265

8.8.1　二重积分的概念······················265

8.8.2　二重积分的几何意义·············267

8.8.3　二重积分的性质······················267

8.8.4　二重积分的计算······················268

8.8.5　二重积分的应用······················273

8.9　曲线积分··277

8.9.1　对弧长的曲线积分··················277

8.9.2　对坐标的曲线积分··················279

8.9.3　格林公式 ·································283

第 8 章　习题··286

第 9 章　微分方程 ··································291

9.1　微分方程的一般概念························291

9.2　一阶微分方程··································293

9.2.1　可分离变量的微分方程·········293

9.2.2　齐次型微分方程······················294

9.2.3　一阶线性微分方程··················296

9.3　二阶微分方程··································299

9.3.1 二阶线性微分方程……299

9.3.2 二阶线性常系数齐次微分方程……301

9.3.3 二阶线性常系数非齐次微分方程……304

9.4 可降阶的高阶微分方程……309

9.4.1 $y^{(n)}=f(x)$型方程……309

9.4.2 $y''=f(x,y')$ 型方程……310

9.4.3 $y''=f(y,y')$ 型方程……312

9.5 微分方程应用举例……314

第 9 章 习题……316

第 10 章 无穷级数……320

10.1 数项级数的概念及其基本性质……320

10.1.1 数项级数的概念……320

10.1.2 数项级数的基本性质……321

10.2 数项级数的敛散性……322

10.2.1 正项级数及其审敛法……322

10.2.2 任意项级数的敛散性……325

10.3 幂级数……325

10.3.1 函数项级数的概念……325

10.3.2 幂级数及其收敛性……326

10.3.3 幂级数的运算性质……327

10.4 函数的幂级数展开……329

10.4.1 泰勒级数……329

10.4.2 把函数展开成幂级数……330

10.4.3 函数幂级数展开式的应用……332

10.5 傅里叶级数……334

10.5.1 三角函数系的正交性……334

10.5.2 周期为 2π 的函数的傅里叶级数……334

10.6 正弦级数和余弦级数……337

10.6.1 奇函数和偶函数的傅里叶级数……337

10.6.2 函数展成正弦级数和余弦级数……339

第 10 章 习题……340

附录 1 高等数学各类专业选讲内容与课时参考……343

附录 2 常用积分公式……344

附录 3 习题参考答案……353

参考文献……372

第 1 章　函　　数

初等数学是高等数学的基石，高等数学是初等数学的继续和发展。本书将在初等数学的基础上，进一步介绍研究大学阶段不可或缺的重要基础学科——高等数学。

函数是高等数学中最重要的基本概念和研究对象，本章将在初等数学的基础上，对函数及相关知识做简要的回顾和总结。

1.1　集合、区间与邻域

1.1.1　集合

集合是高等数学中最基本的通用工具。集合在数学中是一个不定义概念，只能给出直观的描述。

1.1.1.1　定义

具有某种属性的对象的全体称为**集合**，组成集合的每一个对象称为该集合的**元素**。通常集合用大写字母 A、B、C…表示，元素用小写字母 a、b、c…表示。

如果 a 是集合 M 的元素，记作 $a\in M$（读作 a 属于集合 M）；如果 a 不是集合 M 的元素，记作 $a\notin M$（读作 a 不属于集合 M）。

注意理解集合的三要素：特征(属性)、对象、范围。

一个集合认为已经给定，如果对于任何所考查的对象能判定它是否属于这个集合。那么，要给定一个集合，实质上就是要给出一个判定法则，据此法则，对任一对象 a，能判定 $a\in M$ 或 $a\notin M$。

1.1.1.2　集合的性质

集合的性质有整体性和确定性。

1.1.1.3　集合的表示方法

集合的表示方法包括列举法、描述法、图示法。

1.1.1.4　集合的分类

(1) 按元素的属性分类：数集、点集、数对集。

(2) 按元素的个数分类：有限集、无限集、空集($\varnothing$)。

1.1.1.5　集合间的关系

(1) 包含关系 $\begin{cases}\text{子集：}A\text{ 是 }B\text{ 的子集，记作 }A\subseteq B\text{，读作 }A\text{ 包含于 }B\text{。}\\ \text{真子集：}A\text{ 是 }B\text{ 的真子集，记作 }A\subset B\text{，读作 }A\text{ 真包含于 }B\text{。}\\ \text{全集：}I\text{。}\end{cases}$

(2) 相等关系：集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$，读作 A 等于 B。

(3) 运算关系 $\begin{cases}\text{交集：} A \text{ 与 } B \text{ 的交集记作} A\cap B\text{，即} A\cap B=\{x|x\in A\text{且}x\in B\}\text{。}\\ \text{并集：} A \text{ 与 } B \text{ 的并集记作} A\cup B\text{，即} A\cup B=\{x|x\in A\text{或}x\in B\}\text{。}\\ \text{补集：} A \text{ 在 } I \text{ 中的的补集记作} \overline{A}\text{，即 } \overline{A}=\{x|x\in I\text{且 } x\notin A\}\text{。}\end{cases}$

1.1.1.6 集合的常用运算性质与运算律

(1) 交集运算性质：$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap I=A$。

(2) 并集运算性质：$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup I=I$。

(3) 补集运算性质：$A\cap\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=I$，$\overline{\overline{A}}=A$。

(4) 运算律：①交、并运算满足交换律。

②交、并运算满足结合律。

③分配律为 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

(5) 对偶法则(D. Morgan 定理)：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。

1.1.1.7 有限集合的子集个数公式

有 n 个元素的集合 A 的子集个数为：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$。

其中，真子集个数为(2^n-1)个，非空真子集个数为(2^n-2)个。

1.1.1.8 有限集合间元素的个数公式

设有限集合 A 的元素个数为 $n(A)$，则

(1) $n(A)+n(\overline{A})=n(I)$

(2) $n(A\cap B)=n(A)-n(A\cap\overline{B})=n(B)-n(B\cap\overline{A})$

(3) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

1.1.1.9 常用数集的符号

N—自然数集	**Z**—整数集	**Q**—有理数集	**R**—实数集	**C**—复数集
$\mathbf{Z}^-$—负整数集	$\mathbf{Q}^+$—正有理数集	$\mathbf{Q}^-$—负有理数集	$\overline{\mathbf{Q}}$—无理数集	
$\mathbf{R}^-$—负实数集	$\overline{\mathbf{Z}^+}$—非正实数集	$\{2n-1\}$—奇数集	$\{2n\}$—偶数集	

1.1.2 区间

高等数学中用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合。如无特别声明，以后提到的数均指实数。在初等数学中，实数与数轴上的点是一一对应的。在数轴上，一个范围内的实数直观地给出了区间的概念。

区间：介于两个实数之间的全体实数称为**区间**，这两个实数称为区间的**端点**。

设a、$b\in\mathbf{R}$，且$a<b$，数集$\{x\mid a<x<b\}$称为**开区间**，记作(a,b)。同理定义其他区间，如图 1-1 所示。

(1) 开区间：$(a,b)=\{x|a<x<b\}$

(2) 闭区间：$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$

(3) 半开区间：$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 或 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$

开区间、闭区间、半开区间统称为**有限区间**(如图 1-1 所示)。a、b 分别称为区间的左

端点和**右端点**。有限区间两端点之间的距离$(b-a)$称为**区间长**。

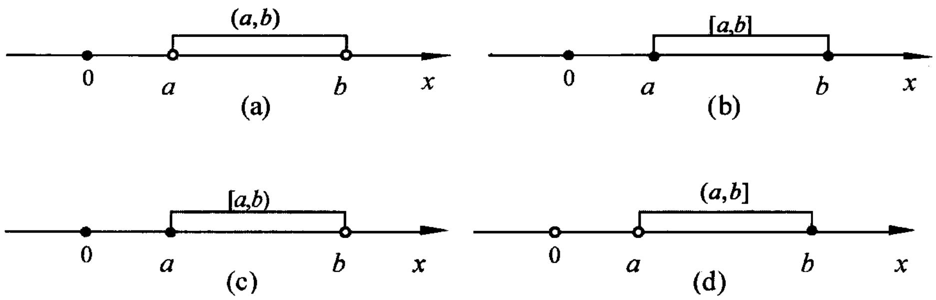

图 1-1

用$+\infty$表示正无穷大，用$-\infty$表示负无穷大，则全体实数用区间表示为$(-\infty,+\infty)$，称为**无限开区间**，于是有如下定义。

(4) 无限开区间：$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$

$(a,+\infty)=\{x\,|\,a<x<+\infty\}$

$(-\infty,b)=\{x\,|\,-\infty<x<b\}$

(5) 无限半开区间：$[a,+\infty)=\{x\,|\,a\leqslant x<+\infty\}$

$(-\infty,b]=\{x\,|\,-\infty<x\leqslant b\}$

无限开区间、无限半开区间都至少有一个无限端点，统称为**无限区间**。

无限区间$[a,+\infty)$、$(-\infty,b)$如图 1-2 所示。

图 1-2

1.1.3　邻域

在高等数学中，经常要研究变量在某点附近的变化情况，从而产生了邻域的概念。

1.1.3.1　邻域

设$a\in \mathrm{R}$，$\delta>0$，称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为**点 a 的 δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$$

点 a 叫做 $U(a,\delta)$的**中心**，δ 叫做 $U(a,\delta)$的**半径**。点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$以点 a 为中心，其**长度**为 2δ，如图 1-3(a)所示。

有时要经常用到去掉中心的邻域。

1.1.3.2　去心邻域

点 a 的δ邻域去掉中心 a 后，称为**点 a 去心的 δ 邻域(空心邻域)**，记作$U(\overline{a},\delta)$，即 $U(\overline{a},\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$，如图 1-3(b)所示。

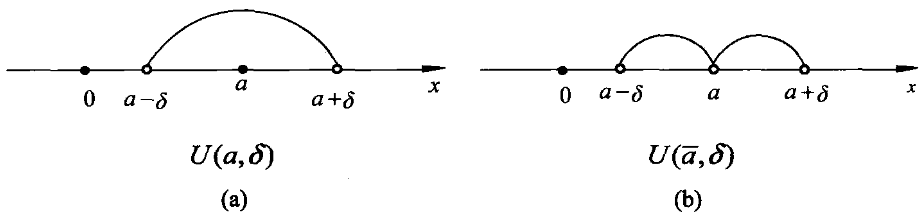

图 1-3

1.2 函数的概念

1.2.1 常量和变量

数学的主要研究内容是数量关系和空间形式。其中数量又可以分为两大类：常量和变量。

在研究某一问题的过程中，数值保持不变的量称为**常量**，数值发生变化的量称为**变量**。如大家所熟知的圆的面积由数学公式 $S=\pi r^2$ 刻划，半径 r 和圆的面积 S 就是变量，而圆周率 π 就是常量。

常量通常用字母 a、b、c 等表示，变量通常用字母 x、y、t 等表示。

注：常量与变量是相对“过程”而言的。例如就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量。

1.2.2 函数的定义

在某一问题的变化过程中，通常并不是只有一个量独立变化，而是两个或多个变量，这些变量之间并不是彼此孤立的，而是相互联系制约着。这些变量是怎么变化的？它们之间有何联系？存在什么规律？怎样找到这些规律，从而达到人们了解、掌握、预测、控制这一问题的目的？这些正是高等数学所要研究和解决的问题。本章只讨论两个变量的情况，看下面的例子。

【例 1-1】 自由落体运动，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的依赖关系由下式给定

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中，g 是重力加速度，假定下落物体着地的时间为 $t=T$，那么当时间 t 在 $[0,T]$ 上任取一数值时，由上式就可以计算出确定的 s 值与之对应。

【例 1-2】 运输公司对运输的物品采用分段计费，并根据运输里程的长短给予相应的打折优惠。设路程为 x，运费打折情况如下：

$x<250$	不打折
$250\leqslant x<500$	2%折扣
$500\leqslant x<1\,000$	5%折扣
$1\,000\leqslant x<2\,000$	8%折扣

$2\,000 \leqslant x < 3\,000$　　10%折扣

$3\,000 \leqslant x$　　15%折扣

设每吨货物运送/km 的基本运费为 a，货物的质量为 b，折扣为 $c\%$，则总运费 y 的计算公式为

$$y = ab(1 - c\%)x$$

当路程 x 确定时，由此公式就可以计算出确定的运费 y 与之对应。

上面两个例子均反映了两个变量之间的依赖关系，每个依赖关系对应了一个法则，根据这个法则，当其中一个变量在某一范围内取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应，这种对应正是函数概念的实质。

1.2.2.1　函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每一个 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y = f(x)$。数集 D 叫做这个函数的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**。

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，函数 y 的对应值 y_0 称为函数在点 x_0 处的函数值，记作

$$y_0 = f(x_0) \qquad 或 \qquad y|_{x=x_0} = f(x_0)$$

当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

称为函数的**值域**。

注 1：*在函数 $y = f(x)$ 中，记号 f 表示自变量 x 与因变量 y 的对应关系，也可以用其他字母如 F、ϕ、f_1、f_2 等表示，这时函数记作 $y=F(x)$，$y=\phi(x)$，$y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$。*

注 2：*注意对函数定义中的两个关键词“有”、“确定”的深层理解。函数 y 的值无论是通过公式计算、查表、看图，还是查阅资料、叙述、口答等任何形式，只要“有”“确定”的值即可。所以函数涵义的深远宽广是初学者难以想象的，人们身边的万事万物都存在着函数关系，函数无处不在。但在高等数学中主要研究由解析式给出的函数。*

注 3：*函数不仅揭示了事物相互联系的规律，也向人们揭示了一种思想：***“通过某一事实的信息去推知探究另一事实”***。这种思想的认知、理解、掌握、运用将会使人们终身受用。*

1.2.2.2　函数的两要素

定义域 D、对应关系(法则) f 构成了函数的两要素，二者缺一不可．所以要判断两个函数是否相同，只要看它们的定义域和对应法则是否相同即可。

函数定义域的确定是研究函数的基本前提。

(1) **在实际问题中**，定义域由实际意义确定。如在例 1-1 中，定义域 $D=[0,T]$；在例 1-2 中，定义域 $D=[0,+\infty)$。

(2) **在数学中**，如没有指明变量的具体意义或特别声明，这里约定，函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的全体实数。

【例 1-3】 求函数 $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{\lg(5-x)}{x-3}$ 的定义域。

解：要使函数 $f(x)$ 有意义，必须有

$$\begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ 5-x>0 \\ x-3\neq 0 \end{cases} \quad 即 \begin{cases} x\geqslant 2 \\ x<5 \\ x\neq 3 \end{cases}$$

所求定义域为：$2\leqslant x<5$ 且 $x\neq 3$，即 $[2,3)\cup(3,5)$。

1.2.2.3 单值与多值函数

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有一个，这种函数叫做**单值函数**，否则叫做**多值函数**。例 1-1、例 1-2 中的函数都是单值函数。而函数 $y^2=x$，对于任意正实数 x 都有一对互为相反数的实数 $y=\pm\sqrt{x}$ 与之对应，故是多值函数。以后凡没有特别的说明，本书讨论的都是单值函数。

1.2.3 函数的图像

设函数的定义域为 D，对任意 $x\in D$，通过函数 $y=f(x)$ 有确定的 y 值与之对应。以 x 为横坐标、y 为纵坐标在平面直角坐标系 xOy 上确定一个点 $M(x,y)$，当 x 取遍定义域 D 中的所有数值时，点 $M(x,y)$ 的集合称为函数 $y=f(x)$ 的图像。一个函数的图像通常是一条曲线，所以以后常称函数 $y=f(x)$ 的图像为曲线 $y=f(x)$。

1.2.4 函数的表示法

在函数的定义中，并没有规定用什么方法来表示函数。为了能很好地研究函数的规律，就应该采用适当的方法来表示函数。函数的表示法通常有 4 种：解析法、图示法、列表法和叙述法。

1.2.4.1 解析法

用数学式子表示函数的方法叫**解析法**，也叫公式法，如例 1-1、例 1-2。解析法的优点是简单、明确，便于计算、分析和理论研究；缺点是直观性差，确定解析式有时比较困难，有的函数不能用解析式表示。

1.2.4.2 列表法

用表格形式表示函数的方法叫**列表法**，又叫表格法，如大家所熟悉的三角函数表、对数表、成绩单以及企业的产量表、利润表等。列表法的优点是使用方便，可以直接得到函数值；缺点是数据不全，缺乏直观性，不便于运算和理论研究。

1.2.4.3 图示法

用图形表示函数的方法叫函数的**图示法**，如地图、工作流程图、雷达散点图、人的心电图等。图示法的优点是直观形象，可直接看到函数的变化趋势；缺点是精确度受条件的限制，不便于数据分析研究。这种方法在工程技术上应用较普遍。

1.2.4.4 叙述法

用语言或各种专业语言直接叙述函数的方法称为**叙述法**。例如：设$x\in\mathbf{R}$，函数$y=[x]$为不超过x的最大整数。叙述法常用于专业性的理论研究，简单易行，但具有局限性。

函数的4种表示法各有优缺点，不同的问题可以采用不同的表示方法，有时为了研究函数的方便，往往同时使用两种以上的表示法。在高等数学中，常采用解析法表示函数，为了直观，又辅以图示法画出图形，以配合分析研究。

为了以后叙述的方便，如函数$y=f(x)$在x取某定值x_0时有确定的对应值$f(x_0)$，则称函数在点x_0处**有定义**；否则就称函数在点x_0处**没有定义**。如果函数$y=f(x)$在某区间上的每一点处都有定义，则称函数在该**区间上有定义**。

为了方便，又引入记号：$\forall$——任给；$\exists$——存在；$>\!|$——使得。

用以上记号，函数的概念可表述为：$\forall x\in D$，$\exists f$，$>\!|\ y=f(x)$。

1.2.5 分段函数

【例 1-4】 某旅游景区“十一”黄金周举办水果采摘节，每位游客可免费采摘不超过2.5kg的水果，超过2.5kg而不超过10kg的部分每千克交费3元，超过10kg的部分每千克交费2元。

(1) 求采摘水果费用与重量间的函数关系。

(2) 求采摘水果质量分别为2kg、10kg、15kg时应交的费用。

(3) 一家三口共采摘水果21kg，怎样才能使交费最少？

解：(1) 设水果质量为$x$kg，应交费用为y元，根据题意，应分以下3种情况考虑：

① 当$x\in[0,2.5]$时，$y=0$

② 当$x\in(2.5,10]$时，$y=3(x-2.5)$

③ 当$x\in(10,+\infty)$时，$y=3(10-2.5)+2(x-10)=22.5+2(x-10)=2x+2.5$

所求函数关系式为

$$y=\begin{cases}0 & x\in[0,2.5]\\ 3(x-2.5) & x\in(2.5,10]\\ 2x+2.5 & x\in(10,+\infty)\end{cases}$$

(2) 因为$2\in[0,2.5]$　　所以$f(2)=0$

因为$10\in(2.5,10]$　　所以$f(10)=3(x-2.5)\big|_{x=10}=3(10-2.5)=22.5$元

因为$15\in(10,+\infty)$　　所以$f(15)=(2x+2.5)\big|_{x=15}=2\times15+2.5=32.5$元

(3) 两人分别各带2.5kg不交费，余下$21-2\times2.5=16$kg由第三人带，交费最少，为

$$y_{\min}=f(2.5)+f(2.5)+f(16)=0+0+(2x+2.5)\big|_{x=16}=2\times16+2.5=34.5\text{元}$$

在本例中，函数的定义域为$x>0$，对其定义域内自变量x取不同的值，却不能用一个统一的数学解析式表示，而是在自变量的不同区段对应不同的解析式，称这样的函数为分段函数。

1.2.5.1 分段函数定义

在定义域的不同范围具有不同解析式的函数，称为**分段函数**。

在求分段函数的函数值时，务必先确定自变量所在的区段，再找本区段对应的解析式，然后代入求值。

1.2.5.2 求函数值的步骤

一定段，二定式，三代入，四求值。

分段函数在数学、工程技术上，特别是在工作和日常生活中都会经常遇到，平时接触的好多实际问题的数学模型都是分段函数，熟练掌握建立分段函数解析式的方法、规律、技巧具有非常重要的实际意义。

1.2.6 反函数

世界万物，变化万千，交替往复。运动的变量相互依赖、相互关联又相互转化。函数的自变量与因变量的主从关系在实际问题中随着时间的推移、环境的变化、要求的改变也会发生位置的交换，原来的自变量(因变量)就变成了因变量(自变量)，这就产生了反函数的概念。

1.2.6.1 反函数的定义

设 $y=f(x)$，$x\in D$, $y\in W$。如对于 W 中的每一个 y 值，都可以由关系式 $y=f(x)$ 确定出唯一的 x 值 $(x\in D)$ 与之对应，这样就确定了一个以 y 为自变量的新函数 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 W，值域为 D。$x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，或称它们互为反函数。

考虑作图、研究、思维等多方面因素，习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以将 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$，定义域为 $x\in W$，值域为 $y\in D$。

1.2.6.2 求反函数步骤

(1) 反解——由 $y=f(x)$反解出 $x=f^{-1}(y)$。

(2) 改写——x、y 互换，得反函数 $y=f^{-1}(x)$。

(3) 换域——反函数的定义域为原函数的值域。

1.2.6.3 反函数的图像

$y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称。

注 1：互为反函数的定义域与值域正好互换。

注 2：并不是所有的函数都有反函数，如 $y=c$(常量)就无反函数。

注 3：只有 x 与 y 是一一对应时函数才有反函数，即反对应关系是单值的，多值对应无反函数。多值对应时，可将定义域适当分段，使函数在所分各段上的反对应关系是单值的，再分别求出各段的反函数。

如 $y=x^2$，$x\in\mathbf{R}$，$x=\pm\sqrt{y}$ 多值，无反函数。

但如把原定义域分成 $\mathbf{R}=(-\infty,0)\cup[0,+\infty)$，则：

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y=x^2$ 有反函数 $x=-\sqrt{y}$，即 $y=-\sqrt{x}$。

当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$y=x^2$ 有反函数 $x=\sqrt{y}$，即 $y=\sqrt{x}$。

注 4：一个函数若有反函数，则有恒等式

$$f^{-1}[f(x)] \equiv x, \quad x \in D$$

相应地有

$$f[f^{-1}(y)] \equiv y, \quad y \in W$$

1.3　函数的性质

函数的性质反映了函数动态(或静态)的变化规律、特点、特征，为大家更好地认识、研究、掌握函数，进而达到可测、可控、可用的目的提供了理论帮助。在初等数学中已经学习了函数的部分性质，现归纳如下。

1.3.1　单调性

定义　设函数 $y = f(x)$ 在区间 D 上有定义，$\forall x_1, x_2 \in D$，$x_1 < x_2$，有：

(1) 若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加，用符号↗表示。

(2) 若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少，用符号↘表示。

单调增加与单调减少的函数统称为**单调函数**，使函数 $f(x)$ 单调的区间称为**单调区间**。

定义给出了判断函数单调的方法，待学习导数后，本书第 4 章将给出更简捷有效的判定方法。

1.3.2　奇偶性

定义　设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，$\forall x \in D$，恒有：

(1) $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数。

(2) $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数。

例如：函数 $y = x^2$，$y = \cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数。

函数 $y = x^3$，$y = \sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数。

函数 $y = \sin x + \cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是非奇非偶函数。

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称。

注：显然，在定义中，定义域关于原点对称的条件是必要的，因为在非对称区间上根本就谈不上奇偶性。如 $y = x^2$ 在 $x \in [1,8)$ 上无从说及奇偶性。所以研究函数奇偶性时必须指明对称区间。

1.3.3　周期性

定义　设函数 $y = f(x)$ 在 $D=(-\infty,+\infty)$ 上有定义。$\forall x \in D$，如果 $\exists$ 常数 $T > 0$，恒有

$$f(x+T) = f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$ 的**周期**。

注：对每一周期函数而言，定义中的 T 有无穷多个，因为如果