21世纪普通高等教育基础课规划教材

PROBABILITY AND STATISTICS

概率论与数理统计

万维明　徐天博　顾颖　林美艳　编

第2版

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21世纪普通高等教育基础课规划教材

概率论与数理统计

第2版

万维明　徐天博　顾　颖　林美艳　编

机械工业出版社

本书主要介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和方法。内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和线性回归分析。每章末均附有适量习题，供学生练习之用。

本书结合工科教学实际，注意理论联系实际，选材适当，论述严谨，条理清楚，简明扼要，便于学生自学。本书可作为高校工科、理科（非数学专业）及经济管理各专业概率论与数理统计课程的教材，也可作为实际工作者的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/万维明等编. —2 版. —北京：机械工业出版社，2009. 11

21 世纪普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978－7－111－28521－2

Ⅰ. 概…　Ⅱ. 万…　Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材　Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 184801 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　封面设计：张　静
责任校对：魏俊云　责任印制：乔　宇
北京京丰印刷厂印刷
2010 年 1 月第 2 版 · 第 1 次印刷
169mm × 239mm · 14 印张 · 262 千字
标准书号：ISBN 978－7－111－28521－2
定价：25.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销 售 一 部：（010）68326294
销 售 二 部：（010）88379649
读者服务部：（010）68993821

网络服务
门户网：http：//www. cmpbook. com
教材网：http：//www. cmpedu. com
封面无防伪标均为盗版

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科，在生产实践和科学的各个领域都有着广泛的应用。

为了适应21世纪高等学校学生和广大工程技术人员对概率统计的需求，我们组织编写了这本教材。全书共10章，分概率论和数理统计两大部分。第一部分由前5章组成，主要讲授概率论基础知识，包括随机事件、随机变量及其分布和中心极限定理。第二部分由后5章组成，主要讲授数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和线性回归分析。本书各章配有适量习题，书后有习题解答供学生参考。

在内容表述上，力求做到清晰易读、便于自学，对于一些比较难或超出大纲要求的内容进行了合理的取舍，尽量达到简洁与严谨的适度统一。

本书由万维明、徐天博、顾颖、林美艳编写，具体编写分工如下：万维明编写第1、4、6章，顾颖编写第2、3、5章，徐天博编写第7、8章，林美艳编写第9、10章。顾颖对全书的图表和图形做了仔细的绘制。大连海事大学张运杰教授对本书做了认真、负责、细致的审阅，并提出了许多修改意见，在此深表感谢。

本书是在第1版基础上经过修订并增补而成。

由于编者水平有限，书中错、漏或欠妥之处在所难免，敬请专家、读者批评指正。

编　者

于大连交通大学

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

在自然界存在着两类不同的现象. 一类是在相同的条件下进行试验或观察时，其结果可以事先预知的现象，这称为**确定性现象**. 例如，水在标准大气压下加热到 100℃ 会沸腾；两个同性的电荷一定互斥等都是确定性现象. 另一类是在相同的条件下进行一系列的试验或观察时，可能会得到不同的结果，即每次试验的结果是无法事先预知的现象，这称为**随机现象**. 例如，抛掷一枚硬币，我们无法预知它是出现正面或反面；随机射出的一发子弹，可能击中目标，也可能偏离目标等都是随机现象.

虽然随机现象在一定的条件下，可能出现这样或那样的结果，而且在每一次试验或观测之前不能预知该次试验的确切结果，但经过长期的、反复的观察和实践，人们逐渐发现了所谓结果的“不能预知”，只是对一次或少数几次试验或观察而言的. 例如，多次抛掷均匀硬币时，出现带币值的一面朝上的次数约占抛掷总次数的一半. 这种在大量重复性试验或观察时，试验结果呈现出的规律性，就是我们以后所讲的统计规律性. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门学科.

在本章中，我们将介绍概率论的一些基本知识.

1.1　随机事件及其运算

一、随机试验

对随机现象加以研究所进行的观察或实验，称为试验. 若一个试验满足下列三个特点：

（1）在给定的一组条件下，试验可以或原则上可以重复进行；

（2）每次试验的可能结果不只一个，但是事先可以知道试验的所有可能结果；

（3）在具体的一次试验中，某种结果出现与否是不确定的，在试验之前不能准确地预知该次试验中将会出现哪一种结果，则称这一试验为**随机试验**，记作 E.

例如，

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数.

E_4：抛一颗骰子，观察出现的点数.

E_5：记录电话交换台在上午 9 时到 10 时接到的电话呼叫次数.

E_6：测试某种型号灯泡的寿命.

等等，都是随机试验.

二、随机事件与样本空间

由一个特定随机试验所有可能发生的基本结果组成的集合，称为该试验的**样本空间**，通常用 S 表示. 样本空间的每一个元素，即试验的每一个基本结果，称为一个**样本点**，用小写字母 ω 表示.

一个特定随机试验的任意一个基本结果，即样本空间的任意一个样本点 ω 组成的单点集合，称为基本随机事件，简称**基本事件**. 样本空间 S 的一个子集，称为该试验的一个**随机事件**. 通常用大写字母 A，B，C 等表示随机事件，随机事件简称为事件. 样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中一定有样本空间 S 中的某一个样本点发生，因此称样本空间 S 为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**.

综上所述，我们可以直观地理解，随机试验的结果就是随机事件. 除 S 和 $\varnothing$ 之外，任一随机事件在随机试验中可能发生，也可能不发生. 随机事件 A 在某一随机试验中发生，当且仅当属于 A 的某一个样本点在随机试验中发生. 必然事件 S 在每次随机试验中都一定发生，不可能事件 $\varnothing$ 则一定不发生. 在这里，我们的定义中把两个确定性的事件 S 与 $\varnothing$ 作为两个特殊的随机事件来处理.

下面写出前面所举例子中随机试验 $E_k(k=1,2,\cdots,6)$ 的样本空间 S_k.

S_1：$\{H, T\}$.

S_2：$\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$.

S_3：$\{0, 1, 2, 3\}$.

S_4：$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

S_5：$\{0, 1, 2, \cdots\}$.

S_6：$\{t \mid t \geqslant 0\}$.

对于试验 E_4，若事件 A 为“出现奇数点”，则 $A=\{1, 3, 5\}$；若事件 B 为

“出现的点数小于 5”，则 $B=\{1,2,3,4\}$．对于试验 E_6，若事件 A 为“灯泡寿命在 200 到 1000 小时之间”，则 $A=\{t \mid 200 \leqslant t \leqslant 1000\}$．

三、随机事件间的关系与运算

在研究随机试验时，我们发现一个随机试验往往有很多随机事件，其中有些比较简单，有些比较复杂，为了通过较简单的随机事件寻求较复杂随机事件的性质和规律，我们需要研究任意一个特定随机试验的各随机事件间的关系与运算.

（一）事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

如果事件 A 包含事件 B，同时事件 B 包含事件 A，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

（二）事件的和

事件 A 与 B 中至少有一个事件发生，即“A 或 B”，也是一个事件，称为事件 A 与 B 的和，记作 $A \cup B$.

（三）事件的积

事件 A 与 B 同时发生，即“A 且 B”，也是一个事件，称为事件 A 与 B 的积，记作 $A \cap B$ 或 AB.

事件的和与积都可以推广到有限多个事件与可列多个事件.

$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个事件发生.

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots$ 中至少有一个事件发生.

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生.

$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 或 $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots$ 同时发生.

（四）事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，也是一个事件，称为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$.

（五）互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，称事件 A 与 B 互不相容（或称互斥）．如果对任何的 $i \neq j(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 都有 $A_iA_j=\varnothing$，则称 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容．此时，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和可以记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$.

（六）对立事件与完备事件组

事件 A 不发生，即事件“非 A”，称为事件 A 的对立事件，又称 A 的逆事件，记作 $\overline{A}$. 由定义看出，两个对立事件一定是互不相容事件；但是，两个互不相容事件不一定是对立事件.

如果 n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n（可以推广到可列无限多）两两互不相容，并且它们的和是必然事件 S，则称这 n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 构成一个完备事件组，简称完备组. 它的实际意义是在每次试验中必然发生且仅能发生 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 中的一个事件. 当 $n=2$ 时，构成完备事件组的两个事件 A_1，A_2 就是对立事件.

为了直观，有时用图形表示事件间的关系和运算. 比如用平面上某一个正方形（或矩形、或其他平面图形）区域表示必然事件 S，用该区域上一个子区域表示随机事件. 如图 1-1 所示.

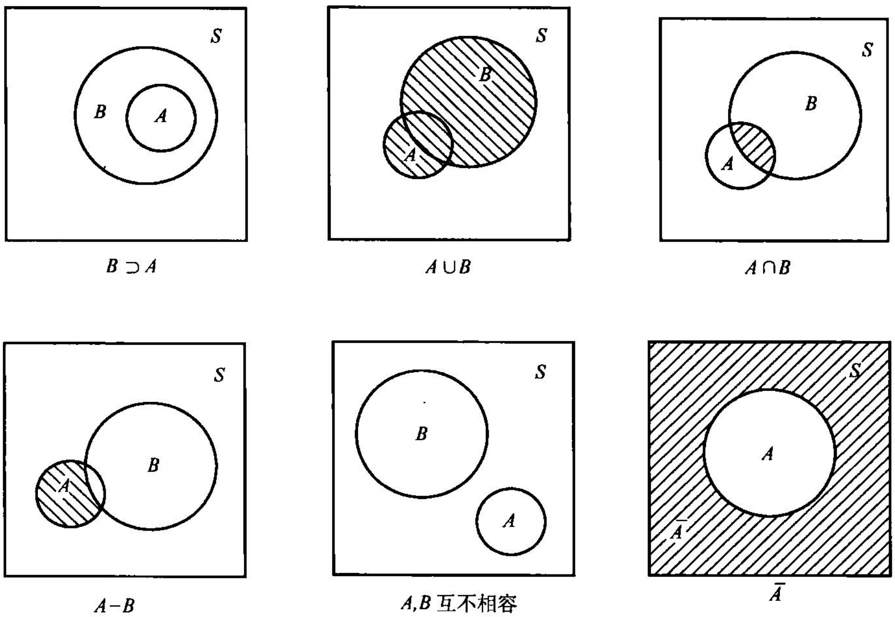

图 1-1

（七）事件的运算律

设 A，B，C，$A_k(k=1,2,\cdots)$ 为事件，则有

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律：$(A\cup B)\cup C=(A\cup C)\cup(B\cup C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

德·摩根(De Morgan)律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

一般地，对有限个事件及可列无限个事件也有

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A}_k,\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A}_k,$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k,\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k.$$

例1 设 A，B，C 为三个事件，试用 A，B，C 表示下列事件：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生；

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生；

(3) A，B，C 都发生；

(4) A，B，C 恰有一个发生；

(5) A，B，C 中至少有一个发生；

(6) A，B，C 中不多于两个发生；

(7) A，B 至少有一个发生而 C 不发生；

(8) A，B，C 恰有两个发生.

解 (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$或 $A-B-C$.

(2) $AB\overline{C}$或 $AB-C$.

(3) ABC.

(4) $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$.

(5) $A\cup B\cup C$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$.

(6) $\overline{ABC}$或 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$.

(7) $(A\cup B)\overline{C}$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}$.

(8) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$.

例2 试求事件“甲种产品滞销，且乙种产品畅销”的对立事件.

解 设 A 表示“甲种产品畅销”，B 表示“乙种产品畅销”，则由题意，有

$$\overline{\overline{A}\cap B}=\overline{\overline{A}}\cup\overline{B}=A\cup\overline{B},$$

即所求对立事件为“甲种产品畅销或乙种产品滞销”.

1.2 概率的定义及其运算

对于一个事件(除必然事件和不可能事件)来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 人们常常通过实际观察来确定某个事件发生的可能性的大小. 例如看到天气阴沉，人们常会说“今天十有八九要下雨”，这个“十有八九”就是表示“今天下雨”这一事件发生可能性的大小. 这是人们通过大量实践所得

出的一种统计规律，即已经经历过 n 次这种天气，下雨的天数在这 n 天中所占比例大约是0.8到0.9. 一般地，人们希望用一个适当的数字来表示事件在一次试验中发生的可能性的大小.

一、概率的统计定义

实践告诉我们，尽管在一次试验中，任一随机事件 A 是否发生具有不确定性，但是如果多次重复同一试验，事件 A 的发生具有统计规律性. 比如，抛掷一枚硬币10次，正面出现(即正面向上)6次；掷一颗骰子100次，6点出现20次. 尽管各事件出现次数不能说明什么问题，但是它们出现的次数与试验次数之比都是一个很有价值的量. 一般地，记 $n(A)$ 为 n 次试验中事件 A 出现的次数，$n(A)$ 与试验总次数 n 的比值，称为事件 A 发生的**频率**，即

$$f_n(A)=\frac{n(A)}{n}. \tag{1.1}$$

(一) 事件的频率

在同一条件下，重复进行 n 次试验，如果事件 A 发生 m 次，事件 B 发生 k 次，则它们的频率分别为

$$f_n(A)=\frac{m}{n},\qquad f_n(B)=\frac{k}{n}.$$

显然，对于任何随机事件 A，$n(A)$ 一定满足 $0\leqslant n(A)\leqslant n$，频率 $f_n(A)$ 一定满足 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$，而且必然事件 S 的频率 $f_n(S)=1$，不可能事件 $\varnothing$ 的频率 $f_n(\varnothing)=0$. 如果 A 与 B 互不相容，则事件 $A+B$ 的频率应该等于两个事件的频率 $\frac{m}{n}$ 与 $\frac{k}{n}$ 之和. 综上所述，随机事件的频率满足下面三个条件：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若事件 A，B 互不相容，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

一般地，若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} f_n(A_i).$$

在历史上，有些人曾多次做过投掷钱币的试验，令 $A=\{$出现正面朝上$\}$，则表1-1给出了他们的试验记录.

表 1-1

试验者	投掷次数 n	A 的出现次数 $n(A)$	频率 $f_n(A)$
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上表看到，虽然在一次试验中不能预知 A 是否会发生，然而当试验次数

n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 几乎总在 0.5 附近摆动.

(二) 概率的统计定义

定义 1.1 在不变的一组条件下，重复进行 n 次试验，以 $n(A)$ 表示事件 A 在 n 次试验中出现的次数，则当试验次数 n 很大时，频率 $f_n(A)=n(A)/n$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动，而且一般说来，随着试验次数的增多，这种摆动幅度将减小. 我们将这个客观存在的频率的稳定值 p 称为事件 A 在一次试验中发生的概率，记作 $P(A)=p$.

这个定义通常称为概率的统计定义，但是它只是一种描述性的定义. 定义中谈到的客观存在的频率稳定值 p 无法具体确定. 一般只是采取进行大量重复试验，通过频率值及一系列频率的平均值作为概率 $P(A)$ 的近似值，估计 $P(A)$ 的大小.

二、概率的公理化定义

(一) 公理化定义

定义 1.2 假设试验 E 的样本空间为 S，对于试验 E 的每一个事件 A，即对于样本空间 S 的一个相应子集 A，都赋予一个实数 $P(A)$，如果 $P(\cdot)$ 满足下面三条公理：

公理 1 非负性：对于任何事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

公理 2 规范性：对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

公理 3 可列可加性：对于任意可列个两两互不相容的事件 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

上述三条公理称为概率论的公理化结构. 这三条不需证明的公理是随机事件的概率所应具备的三个基本属性，也是我们研究概率的基础与出发点.

(二) 概率的性质

从概率的三条公理出发，我们可以得到下面一系列重要推论，称为概率的性质.

1. 不可能事件的概率是零，即 $P(\varnothing)=0$.

证明 令 $A_n=\varnothing$, $n=1,2,\cdots$，显然 $A_1,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容，且其和仍为 $\varnothing$，由公理 3，有

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

上式成立的充分必要条件是 $P(\varnothing)=0$.

2. 有限可加性.

假设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.2}$$

特别地，如果两个事件 A 与 B 互不相容，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1.3}$$

证明 令 $A_{n+i} = \varnothing$，$i = 1, 2, \cdots$，由公理 3 和性质 1，易得等式成立.

3. 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 构成一个完备事件组，即 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容，其和为 S，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = 1. \tag{1.4}$$

证明 由公理 3 及公理 2 有

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

对于有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成的完备事件组，由性质 2 及公理 2 也很容易得到下面等式

$$P(A_1) + \cdots + P(A_n) = 1.$$

特别地，两个对立事件概率的和为 1，即

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

4. 如果事件 $A \supset B$，则有

$$P(A - B) = P(A) - P(B). \tag{1.5}$$

证明 由于 $A \supset B$，因此 $AB = B$，又 $A - B$ 与 AB 互不相容，且 $A = (A - B) + AB$. 由性质 2 可得

$$P(A) = P[(A - B) + B] = P(A - B) + P(B),$$

移项可得等式.

5. 如果事件 $A \supset B$，则有 $P(A) \geqslant P(B)$.

证明 由性质 4 知 $P(A - B) = P(A) - P(B)$. 由公理 1 知 $P(A - B) \geqslant 0$. 因此 $P(A) - P(B) \geqslant 0$，即 $P(A) \geqslant P(B)$.

6. 对任何事件 A，$P(A) \leqslant 1$.

证明 由于任何事件 A 与必然事件 S 满足关系 $S \supset A$，由性质 5 及公理 2 可得 $P(A) \leqslant P(S) = 1$.

7. 对于任意两个事件 A 与 B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.6}$$

证明 由性质 4，可得 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$. 由事件运算法则可得

$$A \cup B = (A - B) + B,$$

且 $A - B$ 与 B 互不相容，根据有限可加性知

$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

(性质2称为加法公式，性质7称为广义加法公式.)

可以证明，对于任意三个事件，A，B，C，有

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$；

对于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，有

$P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n+1}P(A_1A_2\cdots A_n)$.

概率的上述性质对于计算事件的概率是非常有用的.

例1 某人外出旅游两天，据天气预报，第一天下雨的概率为0.6，第二天下雨的概率为0.3，两天都下雨的概率为0.1. 试求：

(1) 第一天下雨而第二天不下雨的概率；

(2) 第一天不下雨而第二天下雨的概率；

(3) 至少有一天下雨的概率；

(4) 两天都不下雨的概率；

(5) 至少有一天不下雨的概率.

解 设 A_i 表示"第 i 天下雨"的事件，$i=1$，2. 由题意，有

$$P(A_1)=0.6,\ P(A_2)=0.3,\ P(A_1A_2)=0.1.$$

(1) 设 B 表示"第一天下雨而第二天不下雨"的事件，则由 $B=A_1\overline{A_2}=A_1-A_2=A_1-A_1A_2$，且 $A_1A_2\subset A_1$，得

$$P(B)=P(A_1-A_1A_2)=P(A_1)-P(A_1A_2)=0.6-0.1=0.5.$$

(2) 设 C 表示"第一天不下雨而第二天下雨"的事件，则同(1)的解法，有

$$P(C)=P(A_2-A_1A_2)=P(A_2)-P(A_1A_2)=0.3-0.1=0.2.$$

(3) 设 D 表示"至少有一天下雨"的事件，则由 $D=A_1\cup A_2$，得

$$P(D)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=0.6+0.3-0.1=0.8.$$

(4) 设 E 表示"两天都不下雨"的事件，则由 $E=\overline{A_1}\,\overline{A_2}=\overline{A_1\cup A_2}$，得

$$P(E)=P(\overline{A_1\cup A_2})=1-P(A_1\cup A_2)=1-0.8=0.2.$$

(5) 设 F 表示"至少有一天不下雨"的事件，则

$$P(F)=P(\overline{A_1A_2})=1-P(A_1A_2)=1-0.1=0.9.$$

例2 某地发行 A，B，C 三种报纸. 已知在市民中订阅 A 报的有45%，订阅 B 报的有35%，订阅 C 报的有30%，同时订阅 A 报及 B 报的有10%，同时订阅 A 报及 C 报的有8%，同时订阅 B 报及 C 报的有5%，同时订阅 A，B，C 报的有3%. 试求下列事件的概率：

(1) 只订 A 报;

(2) 只订 A 报及 B 报;

(3) 至少订一种报纸;

(4) 不订任何报纸;

(5) 恰好订两种报纸;

(6) 恰好订一种报纸;

(7) 至多订一种报纸.

解 设 A, B, C 分别表示"订 A 报"、"订 B 报"、"订 C 报"的事件, 则由题设, 有

$$P(A)=0.45, P(B)=0.35, P(C)=0.30,$$
$$P(AB)=0.10, P(AC)=0.08, P(BC)=0.05, P(ABC)=0.03.$$

(1) $$\begin{aligned}P(A\overline{B}\overline{C})&=P(A-B-C)=P(A-AB-AC)\\&=P(A-A(B\cup C))=P(A)-P(AB\cup AC)\\&=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)\\&=0.45-0.10-0.08+0.03=0.30.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}P(AB\overline{C})&=P(AB-C)=P(AB-ABC)\\&=P(AB)-P(ABC)=0.10-0.03=0.07.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+\\&\quad P(ABC)\\&=0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-0.05+0.03=0.90.\end{aligned}$$

(4) $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=1-0.90=0.10.$

(5) 由(2)可知

$P(A\overline{B}C)=P(AC)-P(ABC)=0.08-0.03=0.05,$

$P(\overline{A}BC)=P(BC)-P(ABC)=0.05-0.03=0.02,$

故所求概率为

$$\begin{aligned}P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)&=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)\\&=0.07+0.05+0.02=0.14.\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)&=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})-P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)-\\&\quad P(ABC)\\&=1-0.10-0.14-0.03=0.73.\end{aligned}$$

(7) 由(4)和(6), 得

$$\begin{aligned}P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+\overline{A}\overline{B}\overline{C})&=P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)+P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})\\&=0.73+0.10=0.83.\end{aligned}$$

三、古典概型

随机事件的概率是在试验中该事件出现的可能性大小的数值度量. 但是在

很多情况下，直接计算某一事件的概率是非常困难甚至是不可能的，不过对于一些简单的试验，其事件的概率可以直接计算，其中最简单的试验模型是古典概型.

定义 1.3　设随机试验 E 满足下列条件：

（1）试验的样本空间只有有限个样本点，即 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$；

（2）每个样本点的发生是等可能的，即 $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$，

则称此试验为**古典概型**，也称为**等可能概型**.

由于每个样本点所表示的基本事件是互不相容的，因此有

$$P(S)=P\{e_1\cup e_2\cup\cdots\cup e_n\}=P(e_1)+P(e_2)+\cdots+P(e_n)=1,$$

由条件(2)，即得 $P(e_i)=\dfrac{1}{n}$, $i=1, 2, \cdots, n$.

设事件 A 包含了 k 个基本事件 $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}$，即

$$A=e_{i_1}\cup e_{i_2}\cup\cdots\cup e_{i_k}(1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n),$$

则有

$$\begin{aligned}P(A)&=P\{e_{i_1}\cup e_{i_2}\cup\cdots\cup e_{i_k}\}\\&=P(e_{i_1})+P(e_{i_2})+\cdots+P(e_{i_k})\\&=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件个数}}{S\text{ 中基本事件总数}}.\end{aligned}\tag{1.7}$$

古典概型中，事件的概率称为**古典概率**. 对于古典概率的计算，关键在于计算基本事件总数和所求事件包含的基本事件个数. 由于样本空间的选取可能有不同的方法，因此可采用不同的方法计算古典概率.

一般地，当基本事件总数相当大的时候，可利用排列、组合及乘法原理、加法原理的知识计算基本事件数，进而求得相应的概率.

例 3　一个口袋中装有 5 只乒乓球，其中 3 只是白色的，2 只是黄色的. 现从袋中取球两次，每次取 1 只，取出后不再放回. 试求：

（1）两只球都是白球的概率；

（2）两只球颜色不同的概率；

（3）至少有一只白球的概率.

解　设 A 表示“两只球都是白球”的事件，B 表示“两只球颜色不同”的事件，C 表示“至少有一只白球”的事件，则有

基本事件总数 $n=\mathrm{A}_5^2=5\times4=20$；

A 所包含的基本事件数 $k_A=\mathrm{A}_3^2=3\times2=6$；

B 所包含的基本事件数 $k_B=\mathrm{A}_3^1\mathrm{A}_2^1+\mathrm{A}_2^1\mathrm{A}_3^1=3\times2+2\times3=12$；

C 所包含的基本事件数 $k_C=\mathrm{A}_3^1\mathrm{A}_2^1+\mathrm{A}_2^1\mathrm{A}_3^1+\mathrm{A}_3^2=12+6=18$，

（1）$P(A)=\dfrac{k_A}{n}=\dfrac{3}{10}$.