

21

世纪园丁工程丛书

学员专著系列

丛书总主编

王枏

陈时见

学员专著系列

主编

高金岭

欧阳群壮 著

发现与发展： 高中数学特长生教程

FAXIAN YU
FAZHAN :

GAOZHONG
SHUXUE TECHANGSHENG
JIAOCHENG

广西人民出版社

21

世纪园丁工程丛书

金钟图

学员专著系列

欧阳群壮 著

发现与发展： 高中数学特长生教程

FAXIAN YU

FAZHAN:

GAOZHONG

SHUXUE TECHANGSHENG

JIAOCHENG

广西人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

发现与发展 / 欧阳群壮著. — 南宁: 广西人民出版社,
2004.3

(21世纪园丁工程丛书. 学员专著系列)

ISBN 7-219-05007-0

I. 发... II. 欧... III. 数学课—中学—教学参考
资料 IV. G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字 (2004) 第015455号

责任编辑 覃 俭

版式设计 金 星

发现与发展:

高中数学特长生教程

欧阳群壮 著

出版 广西人民出版社

(邮政编码: 530028

南宁市桂春路6号)

发行 广西新华书店

印刷 广西区计委印刷厂

开本 850毫米×1168毫米 1/32

印张 11.25

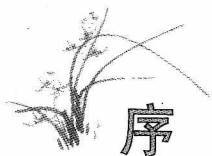
字数 296 千字

版次 2004年3月第1版

印次 2004年3月第1次印刷

书号 ISBN 7-219-05007-0/G · 1207

定价 19.00元



序

潘 晔

国运兴衰系于教育,教育肩负着提高劳动者素质、培养具有创新精神的社会主义新人的历史重任.而教育的改革与发展又离不开教师,教师队伍的状况直接关系到我国人才培养的质量.为了贯彻国家教育部《面向 21 世纪教育振兴行动计划》精神,建设一支面向 21 世纪的中小学骨干教师队伍,全面提高基础教育质量,广西教育厅决定在 1999 年至 2003 年间实施中小学教师队伍建设的“21 世纪园丁工程”.计划用五年时间,在广西壮族自治区、地市、县三级分别重点培养一批学科教学带头人和教学骨干,建立起广西中小学骨干教师群体和梯队,这是世纪之交改革和发展基础教育的重大举措,它不仅能通过加速培养一批高水平的骨干教师来带动教师队伍整体素质的提高,还将对加快中小学教育教学改革的历史进程、全面提高基础教育质量产生积极的现实意义和深远的历史影响.

教师素质的提高不是一朝一夕的事情,需要经过艰苦的努力方可成功.一方面,教师自身必须不断地充实和更新自己的知识,以一个“终身学习者”的身份去适应“学习化的社会”,自觉提高自身的修养;另一方面,社会有关机构在向教师提出高标准要求的同时,也要为教师的专业发展提供机会,创造条件.广西正在实施的“21 世纪园丁工程”就是本着“转变教师的教育观念、加强教师的专业素养、提高教师的理论水平、培养教师的研究能力”的宗旨,对入选“21 世纪园丁工程”的培养对象进行或集中或分散的理论培训.本套“21 世纪园丁工程”丛书便是“园丁工程”的培训用书及成果结晶,它是由广西 21 世纪园丁工程办公室、广西师范大学教育科学学院组织一批从事教育科学研究的博士、硕士以及“21 世纪园丁工程”的学

员在广西“21 世纪园丁工程”已经全面启动、理论培训已经全面展开并取得了初步成效的背景下编写的。

本丛书有如下几个特点:第一,鲜明的时代特征。编写者的意图之一就是要体现当代教育理论研究与实践的新成就。因此,在设计框架、搜集资料时,尽可能反映教育领域最新的研究动态,这使得本丛书具有浓郁的时代气息。第二,较高的学术品位。编写者将本丛书定位在理论含量高、学术价值大这个原则上。因此,在设计丛书系列和组织稿件时,以理论研究及理论指导下的实践为主,以从不同侧面反映当前的学术思想为主,以具有一定影响力的学术成果为主,来凸显本丛书的学术性。第三,明确的实践指向。编写本丛书的目的是为了在“21 世纪园丁工程”实施的过程中更好地达到培训的目标。因此,在内容上特别注意第一线中小学教师的实际需要,针对他们的情况有的放矢地进行编写,使本丛书的应用性更强。我相信,不仅广西壮族自治区一级的 100 名 A 类培训对象、地市一级的 1000 名 B 类培训对象和县一级的 1 万名 C 类培训对象在学习和使用这套丛书中会得到很多收获,而且其他有志于教育事业的中小学教师也会从中受益匪浅。

我期待着,在新的世纪,我们的教师能以学者、专家的形象出现在教育舞台上,并成为教学改革的生力军。



推荐意见

孙杰远

《高中数学特长生教程》一书,突出了高中数学特长生培养中竞赛数学的相关内容,选题符合现代数学教育的发展,符合当前课程改革中的理念,具有时代特色。全书四个部分内容主题突出,主次分明,说理充分,论据可靠,语言叙述简洁、明了、通俗易懂。第一部分给读者展示了古今中外关于数学的经典智力游戏和故事,这些游戏和故事均具有相当的教育意义。第二部分适合高中数学竞赛中的集合、函数、数列、平面几何、立体几何、解析几何、重要不等式、数学建模、最值问题、排列组合与二项式定理等问题,结合严谨的逻辑和美妙的论证进行讲解和论述,并且给读者配备了同步练习和参考解答。该部分内容的写作中作者以一名教师和培训者的视角对数学奥林匹克的问题进行了具有结构性的归纳、阐述和举例说明,所展示的理论框架和例题证明可以作为一线教师高中数学活动的重要参考资料,也可以作为学生接触竞赛数学的良好资源。第三部分是关于高中数学学习中主要数学思想方法的总结,分7个专题,对构造法、估算法、数学归纳法、反证法、递推法、逐次逼近法、数形结合思想7个数学思想方法做了详细的论述,配备了同步训练和参考解答。此部分是对上一部分12类问题的一种理论总结和升华,它从思想方法的角度将数学竞赛中的问题进行了再一次的总结,并且突出了高中数学特长生培养过程中不仅仅是题解,更多的应该是学生思维火花迸发源泉——数学思想方法的交流与运用。第四部分里收录了近三年国内外各类数学竞赛的试题和参考解答,具有良好的资料参考价值。

本书是作者作为一线教师在组织数学特长生培养和竞赛培训

过程中的经验总结及提升,与同类的数学活动及竞赛辅导资料相比较,更具有适合一线的教师和学生作为数学特长生培养的教材、竞赛辅导资料使用的特点.全书结构排列显示出了作者对数学特长生培养的课程的理解,特别是对数学竞赛活动的深刻领会,当中所展现的例题和证明是所要阐述数学知识和数学观念的有力佐证,其中不乏对一些问题精辟的解释和独到的证明.作为一名中学教师,能有这样的数学思想方法总结,能对高中数学中的竞赛数学作出如此归纳和总结实属可贵.该书的出版将给广大中学数学教师在数学特长生培养和数学竞赛培训中提供一本具有趣味性、知识性、理论性和启发性的参考书,并且为中学生提供一本具有智力挑战性的课外读物.

2003年6月



目 录

第 1 篇 神奇的数学

一、大哉！数学之用	(1)
二、灵机一动，啊哈！	(6)
三、游戏取胜策略	(8)
四、巧解三个古老的几何问题	(12)
五、有趣的七桥问题	(16)
六、神奇的不动点	(18)
七、圆周率 π 的故事	(21)
八、奇妙的斐波那契数列	(23)

第 2 篇 奥林匹克数学

第一专题 中国数学奥林匹克竞赛概况

一、中国数学奥林匹克	(27)
二、全国高中数学联赛试题分析	(28)
三、中国数学奥林匹克试题研究	(32)

第二专题 集合与函数

第一节 竞赛中的集合问题	(39)
一、元素、集合的关系问题	(39)

二、集合的运算	(42)
★ 同步训练	(47)
第二节 函数	(49)
一、一次绝对值函数	(49)
二、二次函数、二次方程与二次不等式	(52)
三、函数思想的应用	(57)
★ 同步训练	(61)
第三专题 数列问题	
第一节 竞赛中的等差、等比数列	(66)
一、等差数列	(66)
二、等比数列	(72)
第二节 递推数列	(75)
一、解决递推数列问题的常用方法	(76)
二、构造递推数列解竞赛题	(80)
★ 同步训练	(84)
第四专题 立体几何解题策略	
一、化归为平面问题	(89)
二、巧用空间度量公式	(92)
三、构造辅助图形法	(96)
★ 同步训练	(99)
第五专题 解析几何	
一、直线与二次曲线的有关问题	(103)
二、设而不求与整体思想	(107)
★ 同步训练	(111)
第六专题 重要不等式的应用	
一、平均值不等式	(115)
二、柯西不等式	(117)
三、排序不等式	(120)
★ 同步训练	(123)



第七专题 数学建模

一、函数模型	(126)
二、不等式模型	(129)
三、数列模型	(130)
四、解几模型	(132)
五、其他模型	(133)
★ 同步训练	(135)

第八专题 数学竞赛中的最值问题

一、解决最值问题的常用技巧	(138)
二、复合最值问题	(148)
★ 同步训练	(150)

第九专题 排列组合与二项式定理

第一节 竞赛中的排列组合问题	(152)
一、有关排列组合的应用题	(152)
二、排列数和组合数的计算与证明	(154)
第二节 二项式定理在解竞赛题中的应用	(157)
一、直接利用二项式定理	(157)
二、巧妙构造二项式证(解)题	(160)
★ 同步训练	(163)

第十专题 平面几何

第一节 解决平几竞赛问题的常用方法	(167)
一、类比联想	(167)
二、反推寻联	(169)
三、退中求进	(170)
四、几何变换	(171)
五、变更结论	(175)
六、正难则反	(175)
七、数形结合	(176)
第二节 平面几何最值问题的解法探讨	(178)
一、综合法	(178)

二、不等式法	(179)
三、解析法	(180)
四、三角法	(182)
五、判别式法	(183)
六、二次函数法	(184)
七、猜测法	(184)
★ 同步训练	(185)
第十一专题 与整数有关的问题	
★ 同步训练	(191)
第十二专题 离散最值问题	
★ 同步训练	(196)

第3篇 思维的火花

第一专题 构造法

一、构造函数	(198)
二、构造方程	(200)
三、构造数列	(201)
四、构造图形	(202)
五、构造对应关系	(204)
★ 同步训练	(205)

第二专题 估算法

一、特例估算	(208)
二、近似估算	(210)
三、整体估算	(211)
四、范围估算	(213)
★ 同步训练	(215)

第三专题 数学归纳法

一、第一数学归纳法	(219)
二、第二数学归纳法	(222)



★ 同步训练	(224)
--------------	-------

第四专题 反证法

★ 同步训练	(229)
--------------	-------

第五专题 递推法

一、以某位置或两个元素关系求递推式	(230)
-------------------------	-------

二、按递推方式分类求递推式	(232)
---------------------	-------

★ 同步训练	(235)
--------------	-------

第六专题 逐次逼近法

★ 同步训练	(240)
--------------	-------

第七专题 数形结合思想

一、利用“形”求解“数”的问题	(241)
-----------------------	-------

二、利用“数”求解“形”的问题	(245)
-----------------------	-------

★ 同步训练	(249)
--------------	-------

附 录

一、高中数学竞赛大纲	(253)
------------------	-------

二、近三年竞赛试题及解答分析	(256)
----------------------	-------

1. 2001~2002 年广西“创新杯”高中数学竞赛试题及解答	(256)
--	-------

2. 2000~2002 年全国高中数学联赛试题及解答	(268)
-----------------------------------	-------

3. 2000~2002 年 CMO 试题及解答	(306)
--------------------------------	-------

三、数学特长生的培养策略	(341)
--------------------	-------

四、作者辅导的学生参加全国高中数学联赛获奖名单	(344)
-------------------------------	-------

21 世纪园丁工程丛书后记	(347)
---------------------	-------



第1篇 神奇的数学

数学好玩！

一、大哉！数学之用

华罗庚教授在1959年5月《人民日报》上发表了《大哉数学之为用》，精彩地叙述了数学的各种应用：宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日月之繁等各个方面，无处不有数学的重要贡献。很难比这篇文章写得更全面了。从下面的例子我们会看到，有些重要问题的解决，数学方法是唯一的，也就是说，除数学外，用任何其他方法、仪器、手段都会一筹莫展。

（一）数学在军事方面的应用

1. “沙漠风暴”与数学战。1990年伊拉克点燃了科威特的数百口油井，浓烟遮天蔽日。美国及其盟军在“沙漠风暴”以前，曾严肃地考虑点燃所有油井的后果。据美国《超级计算评论》杂志披露，五角大楼要求太平洋—塞拉研究公司研究此问题。该公司利用 Navier-Stokes 方程和有热损失方程作为计算模型，在进行一系列模拟计算后得出结论：大火的烟雾可能招致一场重大的污染事件，它将波及波斯湾、伊朗南部、巴基斯坦和印度北部，但不会失去控制，不会造成全球性的气候变化，不会对地球的生态和经济系统造成不可挽回的损失。这样才促成美国下定决心。所以说第一次世界大战是化学战（火药），第二次世界大战是物理战（原子弹），海湾战争是数学战。

数学在军事方面的应用不可忽视.例如,海湾战争中,美国将大批人员和物资调运到位,只用了短短一个月时间.这是由于他们运用了运筹学和优化技术.另一例是,由于采用可靠性方法,美国研制 MZ 导弹的发射实验从原来的 36 次减少为 25 次,可靠性却从 72% 提高到 93%.

2. 我国原子弹的研制成功实验次数为西方国家的 $1/10$,从原子弹到氢弹制成只用 2 年 3 个月,重要原因之一,是有许多优秀数学家参加了工作.我国之所以能在很短时间内制成原子弹、氢弹和其他先进武器,发射火箭与卫星,是由于许多优秀科技工作者的共同努力,其中也凝聚着数学家的劳动和智慧.

(二)数学在大型工程方面的应用

工程设计以周密的计算、精确的数据为基础,大型工程尤其如此.中国科学院计算中心早在 20 世纪 60 年代,运用冯康教授等创立的有限元法,设计了一批工程计算专用程序,在国家重点工程建设中发挥了作用.他们先后完成 23 个工程建筑的设计,解决重大工程技术问题 58 项,并对 18 座水坝工程进行过计算,其中包括三峡工程、葛洲坝工程、新丰江大坝、白山电站、长湖水电站等.

中国科学院武汉数学物理研究所仔细研究古老而又青春常驻的都江堰渠道工程.根据历史典籍、数学模型与实例资料,揭示了此项工程系统科学原理,阐明了它“千年不衰”的原因,并提出了发展开拓这一古老工程的具体建议,在此基础上提出了可行的、合理的《都江堰集中调度系统》数学模型与优化策算法结构,其中包括水情预报模型、需水模型等.原则上,他们的研究成果可使用于一切灌溉水系及“流系系统”(如交通运输流、金融财政流、商品供销流等)的调度与规划.

三峡水利工程是举世关注的超大型工程,其中一个严重的施工问题是大体积混凝土在凝结过程中化学反应产生的热,它使得坝体产生不均匀应力,甚至形成裂缝,危害大坝安全.以往的办法是花大量财力在事后修补.现在我国已研制成可以动态模拟混凝土施工过程中温度、应力和徐变的计算机软件.人们可用计算方法来分析、比



较各种施工方案以挑选最佳者,还可用它来对大坝建成后的运行进行监控和测算,以保安全。

(三)数学在设计与制造方面的应用

制造业中广泛地应用到数学,以飞机为例,设计师必须考虑结构强度与稳定性,这是用有限元来分析的;而机翼的振动情况则需解特征值问题;为了使飞机省油与提高速度必需找到一种最佳机翼和整个机体的形状;如何为飞行员选择最优控制参数,也是必须考虑的问题。飞机设计在极大程度上以计算为基础,人们研究描绘机翼和整个机体附近气流的方程。工程设计和制造工艺主要靠计算机辅助设计(CAD)和计算机辅助制造(CAM)两大工具,而这两者又都以数学为理论基础。计算流体力学可以帮助人们设计新的飞行器。数学模型已代替了许多的实验,既便宜、省时,又有适用性、安全性。如风洞实验,以前利用风洞设计飞机某一部件,若要改变某一部位,必须在机械车间建一模型;而今天只要在计算机上设计一数学模型,通过键盘打进新的参数即可。自动导航与自动着陆系统是根据卡尔曼滤波的方法设计的,而后者主要又是数学。在涡轮机、压气机、内燃机、发电机、数据存储盘、大规模集成电路汽车车身、船体等的设计中,也都用到了类似的先进数学设计方法。

(四)数学在 DNA 与 CT 研究中的应用

如果说第二次世界大战以前,数学主要用于天文、物理,那么,现在数学已深入到化学、生物和经济、管理等社会科学中。例如, DNA 是分子生物学的重要研究对象,是遗传信息的携带者,它具有一种特别的立体结构——双螺旋结构,后者在细胞核中呈扭曲、绞拧、打结和圈套等形状,这正好是数学中的纽结理论研究的对象。北京大学姜伯驹教授对此深有研究。下面两项有关生物、医学和化学的高技术中,数学起着关键性作用。X 射线计算机层析摄影仪(简称 CT)的问世是 20 世纪医学中的奇迹,其原理是基于不同的物质有不同的 X 射线衰减系数。如果能够确定人体的衰减系数的分布,就能重建其断层或三维图象。但通过 X 射线透射时,只能测量到人体的直线上的 X 射线衰减系数的平均值(是一积分)。当直线变化时,

此平均值(依赖于某参数)也随之变化.能否通过平均值以求出整个衰减系数的分布呢?人们利用数学中的 Radon 变换解决了问题, Radon 变换已成为 CT 理论的核心.首创 CT 理论的 A. M. Cormack(美)及第一台 CT 制作者 C. N. Hounsfield(英)因而荣获 1979 年诺贝尔医学和生理学奖.另一项高技术是 H. Hauptman 与 J. Karle 合作,发明了测定分子结构的新方法,利用它可以直接显示被 X 射线透射的分子的立体结构.人们应用此方法,并结合利用计算机,已测出包括维生素、激素等数万种分子结构,推动了有机化学、药物学和生物学等的发展.两位发明人分享了 1985 年的诺贝尔化学奖.由此可见,在两项技术中数学的关键作用.

(五)数学在经济发展中的应用

宏观经济学研究经济综合指标的控制,例如研究失业价格水平以及收支平衡的控制等.而微观经济学是在买方和卖方的角度,讨论消费与生产中的选择问题.1972 年以来,承担调整美国经济的政府机构联邦储备局,以最优控制方法,特别是线性二次方法为背景,提出了包括失业与通货膨胀平衡的政策建议.1973 年,《商业周刊》登了一篇文章,概述了最优控制在经济学中的潜在作用.文章说:“你如何努力地及时地刹住过于繁荣的经济,而又不至于滑入灾难性衰退的危险之中?……美国的决策者们恰好面临这种情形,而从经济学家那里极少得到明确的建议……对这种两难的情况,可从最优控制理论得到方法上的帮助.”利用控制理论和梯度法,人们求得了南朝鲜经济的最优计划模型(参考 *Econometrica*, Vol. 33, 1970, D. Kendrick 等的文章).美国、加拿大、智利等也有类似的经济模型.

20 世纪 70 年代,华罗庚教授登高一呼,并且亲自动手,率领研究小组,深入到工厂、农村、矿山,大力推广优选法与统筹法,足迹遍及许多行业,解决了许多问题.例如,纺织业中提高织机效率与染色质量,减少细纱断头率;电子行业中试制新的 160V 电容器,使 100 万米废钨丝复活;农业中提高农产品加工中的出米率、出油率、出酒率等.



目前张里千、陈希孺教授等正在开展的现场统计,对国家经济建设也起了很好作用.由于改善数学模型,运用最优控制理论和改进计算方法,生产过程和工艺参数的优化已在钢铁、冶金、电力、石油化工中取得很好效果.武汉钢铁公司、上海石油化工总厂、南京炼油厂、燕山石化公司通过上述优化技术,提高生产率最高可达到20%,一套装置每年可增加几百万元的经济效益.攀枝花钢铁公司建立了提钒工艺流程系统优化的数学模型,进行全面调优后,使钒的回收率达到国际水平,使我国从钒进口国一跃而为钒出口国.我国应用数学所运用运筹学指导全国原油合理分配和石油产品合理调运,年增效益2亿元等.

(六)预测与管理

自然科学的主要任务是预测、预见各种自然现象.在经济和管理中,预测也非常重要.数学是预测的重要武器,而预测则是管理(资金的投放、商品的产销、人员的组织等)的依据.我国数学工作者在台风、地震、病虫害、鱼群、海浪等方面进行过大量的统计预测.中科院系统所对我国粮食产量的预测,获得很好的结果,连续11年的预测产量与实际产量平均误差只有1%.上海经济信息中心对上海的经济增长进行预测,连续多年预测的误差都不超过5%.云南大学统计系运用多元分析和稳健统计技术,通过计算机进行了地质数据处理和矿床统计预测.

为了配合机构改革,中科院应用数学所周子康等做了“中国地方政府编制管理定量分析”的研究,建立了编制与相关因素分析模型等五组数学模型,构成了同级地方政府编制管理辅助决策分析体系,使编制管理科学化、现代化.

(七)石油勘探

这是数学取得重大经济效益的应用场所之一.石油深藏地下,人们通过人工地震记下反射过来的地震波,波形随着地层地质的不同而变化.用计算机处理所得的波形数据可以提供地下岩层、岩性以及有关石油、天然气等的分布情况.1991年5月,美国壳牌石油公司应用计算机技术于新奥尔良以南39公里的河流之下930公里