解地下水流方程新方法

JIE DIXIASHUILIU FANGCHENG XIN FANGFA

周寤世 著

地质出版社

解地下水流方程新方法

周寤世　著

地质出版社

·北　京·

内 容 提 要

本书是作者在多年实践的基础上，通过理论研究，采用前人没有用过的方法解决复杂的稳定流和非稳定流的计算问题；充分论证了达西定律与牛顿定律和谢才的紊流公式是一致的，即达西定律适用于紊流。前人的非稳定流公式中由于含有积分指数而得不到直接解的公式，而本书得到直接解的非稳定流公式。书中还介绍了简化和比较精确的计算方法，井点排水计算、坝基渗漏计算和影响半径计算等内容。自然科学中一般只能解二维的拉普拉斯方程，无边界条件的三维拉普拉斯方程目前在数学中还没有解，但在地下水流方面本书能解此问题。流体力学可借鉴本书方法解决复杂的计算，假如天气预报和水文预报采用本书方法解决复杂的计算，则天气和水文预报的精度将进一步提高（见附录3）。本书见解新颖，理论充分，公式简单，应用方便，精度较高，符合实际。

本书主要供水文地质工程地质工作者阅读。也可供从事数学、物理学、水力学、电学、磁力学、热力学和空气动力学的工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

解地下水流方程新方法/周寤世著. -北京：地质出版社，2004.3
ISBN 7-116-04050-1

Ⅰ.解… Ⅱ.周… Ⅲ.地下水-工程计算-计算方法 Ⅳ.P641.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 015148 号

责任编辑：宋玉环 陈 磊
责任校对：黄苏晔
出版发行：地质出版社
社址邮编：北京海淀区学院路 31 号，100083
电 话：（010）82324508（邮购部）；（010）82324565（编辑部）
网 址：http://www.gph.com.cn
电子邮箱：zbs@gph.com.cn
传 真：（010）82310759
印 刷：北京印刷学院实习工厂
开 本：787mm×1092mm 1/16
印 张：7.5
字 数：200 千字
版 次：2004 年 3 月北京第一版·第一次印刷
定 价：18.00 元
ISBN 7-116-04050-1/P·2462

前　　言

作者经过多年工作实践和理论研究，采用前人没有用过的方法解决复杂的水文地质计算。作者提出的水文地质计算公式在许多工程中应用过，实践证明是符合实际的。编写此书的目的是总结过去的科研成果，在理论上进一步提高，在工作中得到推广应用，以便提高水文地质计算精度，使水文地质计算工作更好地为生产服务。

解地下水流方程的新方法主要有：代入消去微弧法、保角变换法、功能转换法、复利律法及用三维的拉普拉斯方程推导地下水流方程等。用这些方法都能解地下水的平面流和空间流问题，而且这几种方法所得的结果都相同，因此新公式的提出不是偶然的，在理论上是充分和完善的。不论是稳定流，还是非稳定流，前人只能解一般的平面流问题，而对于复杂的平面流和空间流都没有很好解决。在地下水流方程中遇到的最大数学难题是椭圆问题，因为椭圆的周长公式是无限多项的级数，若直接解椭圆公式就无法得到精确的结果，前人只好作一些与实际不很相符的假设而得到一些精度不高的公式。上述问题用新方法都能解，这是新方法解地下水流方程的核心。新方法不但能解决复杂的水文地质计算问题，而且流体力学也可借鉴本书方法解决复杂的计算。

经过充分论证，达西定律不仅适用于层流，而且适用于紊流和混流，达西定律与牛顿定律和谢才的紊流公式相一致。前人认为达西定律只适用于层流而不适用于紊流的结论是片面的，因为达西定律中的水力坡度是水头差与实际的流程长度之比，由于达西测不出紊流的流程长度，就用两侧管之间的距离（平距或斜距）作为流程长度，而紊流是弯弯曲曲的，实际的紊流流程长度要比达西所取的流程长度大得多，因此达西计算的水力坡度要比实际水力坡度大得多，这就是传统认为达西定律不适用于紊流的原因。作者采用好几种方法解决了测不到实际流程长度的紊流计算问题，因而证明了达西定律能够适用于紊流的计算问题。

水文地质计算的公式很多，前人的公式使人难于掌握计算要领。作者提出了简化的水文地质计算方法，只要掌握其中基本要领和窍门，就很容易把各种水流类型和状态的计算公式记住，在实际工作中根据实际情况灵活运用，这样不但计算方便，而且会提高计算精度。

本书提出了比较精确的计算方法。推导地下水流方程时，一般都采用两项插入法积分，结果有一小块面积不在积分范围内，所以采用不同的积分限，其计算结果是不同的，裘布依和蒂姆公式计算的结果不同就是其例。为了提高公式的精度，还要采用多项插入法或其他方法积分。

前人推导公式时往往都作了一些假设，如含水层均质、地下水位水平和含水层厚度相同等，它只能适用于特殊情况，多数情况是不适用的。本书推导公式不作任何假设，而是用统计法配合新公式来解决这些问题。

前人的非稳定流公式如泰斯公式由于带有积分指数而不能直接求得结果，而是用一些辅助方法（如标准曲线等）来解决地下水流问题。本书用新方法则可求得直接解的非稳

定流公式。

在自然科学中一般只能解平面的拉普拉斯方程，无边界条件三维的拉普拉斯方程目前在数学中还没有解。在地下水流方面本书能解无边界条件三维的拉普拉斯方程。

本书提出的公式比较简单、计算方便、精度较高，经实际验证符合实际。本书吸取了前人的一些公式，如裘布依公式、蒂姆公式和巴甫洛夫斯基的坝基渗漏公式等，凡是保留在本书中的前人公式都加以说明。

有人认为采用计算机多次逼近就可以求得精确的结果，不需要采用新公式计算。但是在水文地质计算中往往遇到椭圆问题，而椭圆的周边长是无限多项级数，前人由于解不了椭圆问题而作了一些与实际不很相符的假设，如吉林斯基、贵德曼和巴布什金等人即把椭圆的等压线假设为圆形的等压线，他们的公式有些收录于教科书和抽水试验规程中。但用圆形问题去解椭圆问题，从数学观点来看，他们的公式显然是不合适的，若把他们的公式输入计算机中计算，根本就得不到精确的结果。在第三章中将论证达西定律与谢才的紊流公式是一致的，但两者的水力坡度和渗透系数的数值都不同，假如用达西公式中的水力坡度和渗透系数来计算谢才公式中流速，即使用计算机多次逼近也不可能得到精确的结果。非稳定流一般都用泰斯公式计算，而泰斯公式只适用厚度比较小的承压含水层，但有人把他的公式扩大应用到厚度较大的承压含水层和潜水层中，他提出的导水系数在潜水层中不是常数，而泰斯把导水系数作为常数，因此用计算机计算泰斯公式时，在多数情况下，计算的结果是不正确的。本书中提出的新公式理论充分、公式简单、精度较高、符合实际，因此采用新公式计算是必要的。

本书的计算方法在研究和使用过程中曾经得到一些单位和个人审查，最终定稿后得到五位专家审查，他们是：陈国达（国际地科联矿床大地构造委员会副主席，国际地洼构造与成矿研究中心主席，中国科学院大地构造研究所名誉所长，湖南地质学会原理事长、中南大学教授、学术顾问，中国科学院资深院士）；金德濂（中国水利学会勘测专业委员会主任委员，湖南省水利水电厅原副厅长兼总工程师，教授级高级工程师）；杨心宜（自然科学期刊研究会常务理事，中国科学院长沙大地构造研究所研究员、编审）；黎盛斯（湖南省地质学会原副理事长兼秘书长，湖南省地质矿产局原总工程师，教授级高级工程师）；陈仕谋（湖南省地质学会原副理事长兼秘书长，湖南省地质矿产局原副总工程师，教授级高级工程师）。在这里特向审查过本书的单位和个人表示衷心感谢。本书难免有错误之处，恳请读者批评指正。

目　　录

第一章 解地下水流方程新方法的研究过程

一、代入消去微弧法的研究

钱塘江七堡工程拟建超大型潮汐发电站，地基为粉砂土，若开挖基坑，将会产生流沙，故需降低地下水位才能开挖基坑。初步设计，上层采用水力开挖，下层采用轻型井点降低地下水位。若用一般的井点设备，至少需要钢材 300 多吨，铜网 10 吨以上，20 世纪 60 年代若采用这样多钢材和铜网是比较困难的。而浙江省竹子较多，就地取材，初步拟定以竹井点代替钢井点降低地下水位。如能获得成功，不但能够解决七堡工程的钢材和铜网问题，而且对华东地区也有普遍意义。

竹井点排水试验作为一个科研项目由华东水利学院负责进行，作者当时负责竹井点排水的水文地质工作。试验于 1960 年 6 月至 1961 年 2 月进行，通过试验，作者发现已有的水文地质计算公式都不适用于七堡的排水试验。为此经过理论研究，并经竹井点排水检验，提出一些符合七堡工程的计算公式，并写于 1961 年华东水利学院的科研报告《竹井点试验初步研究报告》中。经华东水利学院、江苏省水利委员会和钱塘江治理工程局会审，一致认为作者所提公式符合于七堡工程，同意将新公式编入竹井点研究报告中，并作为该工程将来设计处理的依据。

1963 年江苏省地质学会召开学术年会，经华东水利学院推荐，作者以《潜水不完整井的水文地质计算》的论文在该年会上宣读，此论文的摘要登于江苏省地质学会 1963 年年会《论文摘要汇编》（水文物探部分）中。当时华东水利学院讨论该论文时，提出一个问题：新公式的推导方法与裘布依的假设条件不同，但为什么作者的承压水完整井和潜水完整井公式与裘布依公式是一样的，当时作者不能很好回答这个问题。直到 1968 年用保角变换法推导公式后，才知道裘布依的假设（地下水流接近于水平和圆柱垂直过水断面）基本是符合保角变换的。1961 年用的推导方法是按保角变换的第二性质（伸长度的固定性）进行的，它用一般的微积分就能把流线和等压线的微弧消去后，而能解地下水流方程。为了与其他方法区别，1968 年把 1961 年的推导方法叫做代入消去微弧法。地下水空间流是属于三维流，通过代入消去微弧法把微弧消去后，就能把三维流变成二维流，这样就能解地下水流方程。

二、保角变换法的研究

为了答复华东水利学院 1963 年提出的问题，1966 年以后继续研究。保角变换也叫保角映射，1968 年作者根据 N. N. 普里瓦洛夫著《复变函数引论》中关于保角变换的两个性质（角度的不变性和伸长度的固定性）推导地下水流方程，所得结果与 1961 年采用的代入消去微弧法得到的结果相同。1966 年至 1968 年期间，作者结合云南的情况，对水工建

筑物的水文地质计算作了一些研究，用保角变换法解决了一些坝基渗漏、渠道渗漏和隧洞涌水等计算公式，经验证符合实际情况。

1980 年第 3 期《工程勘察》发表了作者的论文《用代入消去微弧法和流网保角变换法推导地下水运动方程式》。

三、功能转换法及其他方法的研究

1975 ~ 1976 年作者在湖南省长沙麻田磷矿区外围工作时，在震旦系灯影组的倾斜含水层中打到自流井，矿山要利用它作为生活用水。为了取得合理的取水方案及取得精确的透水性资料，因此需要对自流井及倾斜含水层进行计算。在已有的书中很少有倾斜含水层的计算公式，只有卡明斯基有这方面的公式，他将倾斜角的余弦乘上水平含水层公式的分子后就成为倾斜含水层的计算公式。但是卡明斯基违反了水力学中流线与等压线必须正交的原则，因为把倾斜含水层变为水平含水层后，流线和等压线是斜交的，因此卡明斯基的倾斜含水层公式是错误的，它不能作为麻田磷矿区倾斜含水层的计算依据。

但是采用代入消去微弧法和保角变换法又难于推导出倾斜含水层公式，因为既要将倾斜含水层变换，同时又要将流线和等压线变换，而代入消去微弧法和保角变换法仅仅是对流线和等压线的变换。为此，作者用功能转换法推导倾斜含水层的地下水流方程，于 1978 年获得成功。功能转换法不仅能解决倾斜含水层问题，也能解决水平含水层问题，它得到的结果与代入消去微弧法和保角变换法相同。

1979 年作者将研究的新公式送给湖南大学教水文地质课的谢庆道老师审查，经该校水工教研组共同审查后，认为作者的公式可以采用。湖南大学打水井，邀请我单位用地球物理勘探方法进行工作，水井由湖南煤田勘探公司施工。地层为岳麓山组砂岩，水井布置在断层破碎带上。钻孔还没有打到断层，施工单位的水文地质人员认为没有水，不需要继续钻进。但谢老师采用作者的公式计算后，认为不但有水，而且有水 800t/d。该水文地质人员不相信有这样多水，于是两人打赌。谢老师根据物探资料，要求钻孔再打 5 m。钻孔打完后，抽水结果完全符合作者公式计算结果，该水文地质人员只好认输。

1979 年至 1983 年期间，作者先后采用解拉普拉斯方程和复利律法推导地下水流方程，并论证了达西定律与牛顿定律和谢才的紊流公式是一致的，同时论证了达西定律不但适用于层流，而且还适用于紊流。1979 年湖南省地质学会学术年会，作者宣读了《水文地质计算方法探讨》的论文，湖南省地质学会邀请专家对该论文进行审查，其摘要登于该年会《论文摘要》中。为了推导公式的完整性，该论文在《论文摘要》中破格增加了一些篇幅。1982 年湖南省地质学会《论文摘要》中又选登了作者的两篇论文《地下水空间流的简化计算原理》和《达西定律适用于紊流》。

用上述方法也可以推导承压水完整井和潜水完整井的裘布依公式和蒂姆公式，但是采用裘布依公式和蒂姆公式计算的结果是不同的。作者研究后发现，裘布依和蒂姆都是用两项插入法积分，裘布依是用井的半径和影响半径作积分限（图 1 – 1），蒂姆则用两个观测孔作积分限（图 1 – 2）。两项插入积分的结果，在图 1 – 1 和图 1 – 2 中都有一小块面积不在积分范围内（见图中上部斜线部分）。由于水位下降曲线靠近水井附近的地下水下降曲线弯度大，按裘布依方法不在积分范围内的面积相对大些；按蒂姆方法不在积分范围内的面积相对小些，因此两人的公式计算结果是不同的。于是作者采用多项插入法或其他方法

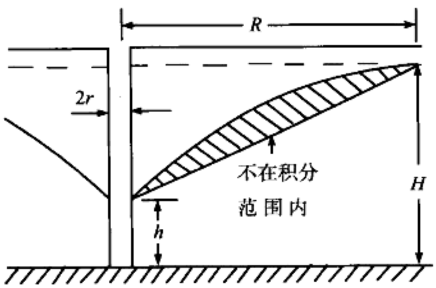

图 1-1 裘布依潜水完整井分析图

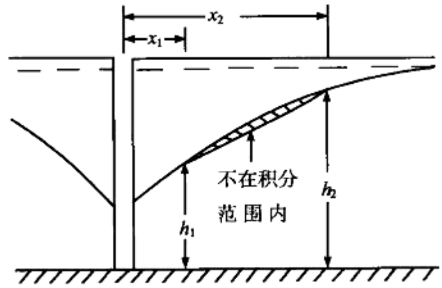

图 1-2 蒂姆潜水完整井分析图

得到比较精确的计算公式，详见第七章。

1983 年作者根据湖南省青山冲黄铁矿岩溶区矿坑涌水情况，采用稳定流与降雨补给地下水的叠加计算方法，计算 220 m 中段最大洪峰涌水量的标准值。1991 年开采到 220 m 中段，实际的矿坑最大洪峰涌水量与作者计算的标准值相同。

此外作者还采用统计法，配合新方法推导的公式解决了地下水不水平、含水层不均质和厚度不同等问题，使新公式计算的结果更加符合实际。

1987 年我单位在湖南省酒埠江水库进行工程地质勘察，负责该工程水文地质工作的梁钜英工程师采用已有的公式与作者公式反复计算对比后，最后采用作者的公式作为计算依据，计算结果编写于《湖南省酒埠江水库主副坝增埋监测仪器及工程地质勘察报告》中，经实际流速测验和埋设的监测仪器观测验证，用作者公式计算结果符合酒埠江水库的实际情况。湖南省水利水电厅对该报告中提出的公式计算结果，邀请两位专家进行专门审查，同意报告计算的结果，1988 年湖南省水利水电厅在评语中指出该报告“在水文地质方面有独特之处”。1989 年有全国水利专家参加的酒埠江水库安全论证会议鉴定此报告为优秀工程勘察报告，在评语中写有“在水文地质方面有独特见解，符合酒埠江水库实际情况，为酒埠江水库的安全论证和设计处理提供了可靠的工程地质资料。”1991 年湖南省建设委员会评选该工程勘察为优秀工程勘察三等奖（湖南省石油化学工业厅评为二等奖），由于该报告中采用了作者的水文地质公式，因此在上级评审时，“有创新”的评语。

1990 年在湖南省郴州市桥口铅锌矿尾矿库勘察时，王卫平根据注水试验采用作者公式计算渗透系数，计算结果符合实际。

1991 年湖南省长沙县（现为望城县）望城坡湖南省锅炉压力容器检验所液化气钢瓶检验站工程的房屋地基由我单位进行工程地质勘察，检验所要求找到 30～40 t/d 地下水源，我单位打了一个水文地质勘探孔，进行提水试验，流量和水位降深都是不稳定的。作者采用统计法求得平均值：水位降深 0. 65 m，流量 1. 56 L/min，计算供水井的水量为 50 t/d，负责该勘察报告编写的王洪波在报告中只写 40 t/d。检验所怕报告中提供的水量不可靠，暂不支付勘察费用。检验所请湖南省地质局 402 队打水井，抽水结果有 50 t/d 水，检验所才把勘察费付给我单位。

1992 年作者将以前的研究成果汇总为《解地下水流方程新方法》，这是本书的由来。1998 年本书稿的摘要选入由廖茂才主编，四川科学技术出版社出版的《当代科教论文选》中，此文于 2000 年发表于《工程勘察》第 1 期和第 2 期，并收录于《中国改革开放的理论与实践》（中国大地出版社，2000）和《中国科技发展精典文库》（中国言实出版社，2001）中。

第二章　解稳定流方程的新方法

第一节　为什么要用新方法解地下水流方程

在前人的稳定流公式中只能解简单的平面流问题，对于复杂的平面流和空间流还没有很好解决。以地下水流网推导公式为例，地下水流网是双曲线和椭圆的正交线族，因此解地下水流方程时就会遇到比较难解的椭圆问题，因为椭圆的周边长公式是：

$$L = \pi(a+b)\left(1+\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{64}+\frac{\lambda^6}{256}+\frac{25\lambda^8}{16384}+\cdots\right) \qquad (2-1-1)$$

$\lambda=\frac{a-b}{a+b}$，a 为椭圆的长半轴，b 为椭圆的短半轴，L 为椭圆的周边长。

由于（2－1－1）式是无限多项的级数，若直接解此式就无法得精确的结果。为了避开椭圆问题，有人作了一些与实际情况不符的假设。例如吉林斯基将椭圆表面积主要部分$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$中的 b^2 略去不计，即当$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=1$ 时，就是将椭圆假设为圆形。吉林斯基是根据承压水推导出公式，然后把它变换成潜水，而得到潜水完整井公式，潜水不完整公式他不能用数学方法直接推导出来。宾德曼则直接假设等压线为圆形，推导结果与吉林斯基公式基本相同，但宾德曼将承压水公式直接应用于无压水的计算，显然比吉林斯基公式有更多缺点。巴布什金把水流区分为 $A-B$ 流面的上下两个区域（图 2－1），上部区域可认为潜水完整井，下部区域为承压水不完整井，他假设下部的等压面为球面，将上下两部的流量相加即得巴布什金潜水不完整井公式。

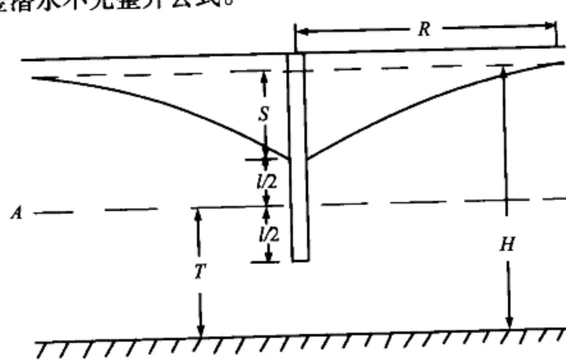

图 2－1　巴布什金计算简图

施克巴拉诺维奇假定水是从上下受到形状类似于地下水下降曲线的水流流向过滤器中，而推导出潜水不完整井公式（图 2－2），因为实际的渗水面积比施克巴拉诺维奇假设的渗透面积大，通过实践计算，施克巴拉诺维奇公式的误差较大。

此外还有一些潜水不完整井和承压水不完整井的经验公式，这里不一一叙述了。在上

述公式中，巴布什金公式应用较广，在DLJ 203－81 SLJ 1－81 钻孔抽水试验规程中推荐了一些巴布什金公式。由于前人无法解决椭圆问题，因此他们提出的公式大多数是不符合实际的。以酒埠江水库为例，根据酒埠江水库的水文地质试验资料，采用巴布什金公式是不令人满意的。

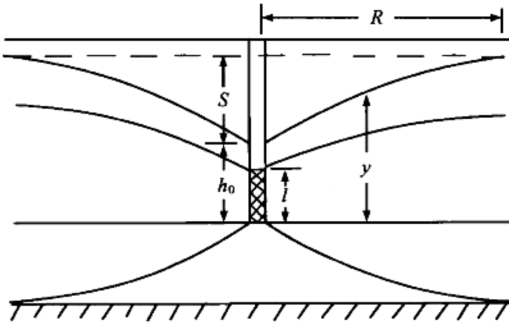

图 2－2　施克巴拉诺维奇计算简图

根据 DLJ 203－81 SLJ 1－81 规程推荐的巴布什金公式：

$$K=\frac{0.16Q}{lS}\times\left(2.3\lg\frac{0.666}{r}-\operatorname{arsh}\frac{0.45l}{b}\right) \tag{2-1-2}$$

K 为渗透系数，Q 为流量，l 为过滤器长度，S 为水位降深，r 为井的半径，b 为主井至地表水的距离。（2－1－2）式适用于 $l<0.3H$，H 为含水层厚度。

根据（2－1－2）式计算酒埠江水库主坝砂壳的渗透系数 $K=2934$ m/d，但根据颗粒分析，砂壳的颗粒组成是：卵石（>20 mm）29.7×10^{-2}，圆砾（20～2 mm）37.5×10^{-2}，砂（2～0.05 mm）28.3×10^{-2}，粉粒（0.05～0.005 mm）3.8×10^{-2}，粘粒（<0.005 mm）0.7×10^{-2}。从颗粒分析情况来看，用巴布什金公式（2－1－2）计算 K 偏大。根据作者的计算，砂壳的 $K=215.4$ m/d，它与在地基砂卵石层中（其颗粒组成与砂壳相同）用多孔流速测验方法求得的渗透系数基本相同。

根据《水文地质手册》（1978）和《工程地质手册》（1982）推荐的压水试验和注水试验公式如下：

当压水试验段底部距隔水层之厚度大于试验长度时，按下式近似计算渗透系数 K：

$$K=0.525\omega\lg\frac{0.66l}{r} \tag{2-1-3}$$

r 为钻孔半径（m），l 为压水试验段长（m），ω 为单位吸水量（L/min·m·m）。

当压水试验段底部距离隔水层之厚度小于试验长度时：

$$K=0.525\omega\lg\frac{1.32l}{r} \tag{2-1-4}$$

（2－1－3）和（2－1－4）式中的单位吸水量 ω 为：

$$\omega=\frac{Q}{l\cdot S}(\mathrm{L/min\cdot m\cdot m}) \tag{2-1-5}$$

Q 为钻孔压水的稳定流量（L/min），S 为试验压水时所施加的总压力值（m），l 为试验段长度（m）。在《水文地质手册》中的单位为升/分，作者修正为 L/(min·m·m)。

若是注水试验，根据水工建筑部门的经验，在巨厚且水平分布较宽的含水层作常流量注水时，两手册建议按下两式计算 K 值：

当 $l/d\leqslant2$ 时，

$$K=\frac{0.08Q}{\dfrac{dh}{2}\sqrt{\dfrac{l}{d}+\dfrac{1}{4}}} \tag{2-1-6}$$

当 $l/d > 2$ 时，
$$K = \frac{0.366Q}{lh}\lg\frac{4l}{d} \tag{2-1-7}$$

d 为钻孔或过滤器直径，h 为孔中水头高度，其他符号同（2-1-3）和（2-1-4）式。

两手册在推荐以上公式时还指出，用（2-1-6）和（2-1-7）式计算的 K 值比用抽水试验计算的 K 值一般小 15% ~20%。

在酒埠江水库钻孔注水试验时曾用过（2-1-6）和（2-1-7）式计算，补绕$_3$孔的泥质板岩的渗透系数 K 值分别为 0.113 m/d 和 0.273 m/d。而该孔注水试验的单位吸水量按（2-1-5）式计算 ω =0.08 L/min · m · m。从单位吸水量基本可以判断，前者 K 值偏小，后者 K 值偏大，因为一般渗透系数（m/d）为单位吸水量的 1.3 ~2 倍。根据作者公式（2-2-38）式计算，K=0.136 m/d，这个数值与用经验方法按单位吸水量计算的 K 值相同。

在两手册中已经指出用（2-1-3）和（2-1-4）式计算的 K 值是近似值。实际上，此两公式本身是有缺点的，因为 ω 值按（2-1-5）式计算时（SDJ 16-78 压水试验规程也推荐此式计算单位吸水量），公式中只考虑流量、水头压力和试验段长三个数值。但在酒埠江主、副坝进行压、注水试验的孔径有 91 mm、110 mm、130 mm 和 150 mm。而压水的流量还与孔径大小有关，因为流量与过水面积成正比。150 mm 孔径的面积比 91 mm 孔径的面积多 65×10^{-2}，在相同压力和试验段长的情况下，150 mm 孔径的压入水量要比 91 mm孔径多 65×10^{-2}，所以单位吸水量 150 mm 比 91 mm 孔径大 65×10^{-2}；同样150 mm 比 110 mm 孔径的单位吸水量大 36×10^{-2}等等。

另外根据 H. F. 温特科思（1983）的压水试验公式计算酒埠江 3 号孔岩石的渗透系数则偏小。

所以前人公式在大多数情况下是不符合实际的，因而采用新方法解决地下水流方程问题。

作者解地下水流方程时，没有直接解椭圆问题，而是用代入消去微弧法、保角变换法、功能转换法、复利律法和解拉普拉斯方程等方法来解地下水流方程，成功地解决了地下水流问题。

第二节　代入消去微弧法和保角变换法

地下水流网是流线和等压线（等水头线）的正交线族。地下水的流量 Q 为：
$$Q = Av \tag{2-2-1}$$

A 为过水面积，v 为流速。

对于直线型（如水平渗透或垂直渗透）的地下水流来说，（2-2-1）式是适用的。但是多数的地下水流线都是曲线，若要精确计算，必须用下式：
$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}A \cdot v \tag{2-2-2}$$

根据达西定律，流速 $v = K\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}l}$。同时 $\mathrm{d}A = u\mathrm{d}s$，

$$\therefore \quad \mathrm{d}Q = Ku\mathrm{d}s\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}l} \tag{2-2-3}$$

$\mathrm{d}A$ 为过水面积的微分值，$\mathrm{d}Q$ 为流过 $\mathrm{d}A$ 的流量，$\mathrm{d}s$ 为等压线的微分值，$u = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s}$，若

为平行水流，则 $u=B$（B 为水流宽度），若为放射水流，$u=2\pi x$（x 为某点至汇点的距离），K 为渗透系数，dh 为水头差的微分值，dl 为流线的微分值。

由于（2－2－3）式中的 ds 和 dl 都是微弧段，若直接解（2－2－3）式是比较困难的。作者采用代入消去微弧法和保角变换法可解（2－2－3）式。

一、代入消去微弧法

如图 2－3，dx 为流线微段 dl 的水平投影，dy 为等压线微段 ds 的垂直投影。根据水力学理论，流线必须与等压线正交，即 $ds \perp dl$，所以 $dy \perp dx$，即$\dfrac{ds}{dy}=\dfrac{dl}{dx}$

$$\therefore \qquad ds = \frac{dl\,dy}{dx} \tag{2-2-4}$$

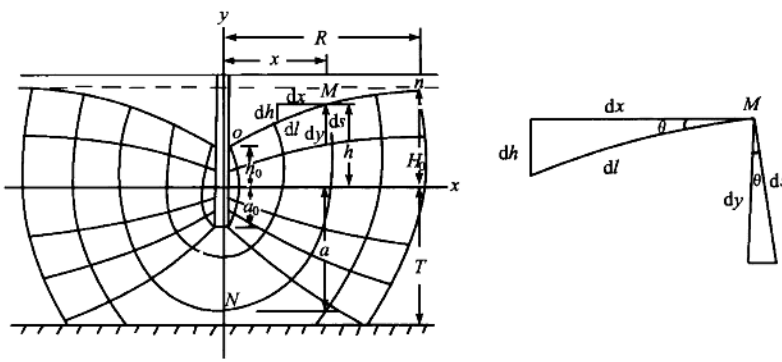

图 2－3　潜水不完整井流网图

$\widehat{no}$——地下水下降曲线；$\widehat{MN}$——等压线；右图为 M 点放大图

将（2－2－4）式代入（2－2－3）式中：

$$dQ = Ku\frac{dl\,dy}{dx}\cdot\frac{dh}{dl} = Ku\,dy\frac{dh}{dx} \tag{2-2-5}$$

放射水流（如抽水井），$u=2\pi x$，由（2－2－5）式得：

$$dQ = 2\pi Kx\,dy\frac{dh}{dx} \tag{2-2-6}$$

平行水流，单宽过水面积的 $u=B=1$，

$$\therefore \qquad dq = K\,dy\frac{dh}{dx} \tag{2-2-7}$$

dq 为单宽流量的微分值。

（2－2－5）、（2－2－6）和（2－2－7）式都是推导地下水流的基本方程式。此三式是利用（2－2－4）式代入（2－2－3）式把微弧段 ds 和 dl 消去后得到的，式中的 dy 和 dx 都是直线微段，故称为代入消去微弧法。

现举例说明如下：如图 2－3，$\widehat{no}$为地下水下降曲线（流线之一），$\widehat{MN}$为等压线（等压线之一）。实际的过水面积为等压线$\widehat{MN}$的旋转面（沿 y 轴转），过水面积的微分值 $dA=2\pi x\,ds$，把 dA 值代入（2－2－3）式后得：

$$dQ = 2\pi Kx\mathrm{d}s\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}l} \tag{2-2-8}$$

将（2－2－4）式代入（2－2－8）式中即得（2－2－6）式。将（2－2－6）式分离变数定积分：

$$\int_r^R\int_{-Q_2}^{Q_1}\mathrm{d}Q\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{h_0}^{H_0}\int_{-a}^{h}2\pi K\mathrm{d}y\mathrm{d}h$$

a 为等压线在 x 轴下部的垂直投影，根据积分的中值定理，把平均值$\bar{a}$代替 a 后即可积分：

$$\int_r^R(Q_1 + Q_2)\frac{\mathrm{d}x}{x} = 2\pi K\int_{h_0}^{H_0}(h + \bar{a})\mathrm{d}h \tag{2-2-9}$$

R 为影响半径，r 为井的半径，H_0 为 x 轴至静止水位高度，h_0 为 x 轴至井壁动水位高度，h 为 x 轴至地下水位下降曲线上任意一点 M 的高度，Q_1 为 x 轴上部流入井中的流量，Q_2 为 x 轴下部流入井中的流量。

设流入井中的全部流量为 Q，则 $Q = Q_1 + Q_2$，代入（2－2－9）式积分得：

$$Q\ln\frac{R}{r} = \pi K(H_0^2 - h_0^2) + 2\pi K\bar{a}(H_0 - h_0)$$

即

$$Q = \frac{\pi K(H_0^2 - h_0^2)}{\ln\frac{R}{r}} + \frac{2\pi K\bar{a}(H_0 - h_0)}{\ln\frac{R}{r}}$$

∴

$$Q = \frac{\pi K(H_0 - h_0)(H_0 + h_0 + 2\bar{a})}{\ln\frac{R}{r}} \tag{2-2-10}$$

用两项插入法，$\bar{a} = \frac{0+T}{2} = \frac{T}{2}$时得：

$$Q = \frac{\pi K(H_0 - h_0)(H_0 + h_0 + T)}{\ln\frac{R}{r}} \tag{2-2-11}$$

T 为 x 轴至含水层底板的距离。

若含水层厚度很大，（2－2－11）式中的 T 用 R 代替。当有观测孔时，$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2}{2}$，代入（2－2－10）中：

$$Q = \frac{\pi K(h_2 - h_1)(h_2 + h_1 + a_1 + a_2)}{\ln\frac{x_2}{x_1}} \tag{2-2-12}$$

若只有一个观测孔，而且 $a_2 > T$ 时，则

$$Q = \frac{\pi K(h_2 - h_0)(h_2 + h_0 + T)}{\ln\frac{x_2}{r}} \tag{2-2-13}$$

x_1 和 x_2 分别为主井中心至 1 号观测孔和 2 号观测孔的距离，h_1 和 h_2 分别为 x 轴上部的两个观测 孔水位高，a_1 和 a_2 分别与 h_1 和 h_2 相应的等压线在 x 轴下部的垂直投影长度。

二、保角变换法

保角变换又称保角映射。N. N. 普里瓦洛夫著《复变函数引论》中指出：由解析函数

构成的映射，在所有导函数不等于零的点，都具有两个性质：（1）角度的不变性；（2）伸长度的固定性。1979 年人民教育出版社出版的《数学手册》也有类似叙述，但在第（1）性质中还加了“保持角的方向”。

地图、地形图和地质图即是将实际的地物、地形和地质情况等一点一点地投影到平面图上，这是将立体变为平面的典型保角变换的例子。地图、地形图和地质图是根据坐标线（经纬线）投影，地下水流网中的流线和等压线好像地图中的经纬线，地下水流网的保角映射与地图的投影相同，即可将空间流映射成平面流。

地下水流网即可根据此原理进行变换，但变换时必须按照保角变换的两个性质进行。即像地图那样既要有方位（角度的不变性），又要按比例（伸长度的固定性）。如图 2-3，若流线和等压线的每一个交叉点都像 M 点那样，把 $\mathrm{d}s$ 变为 $\mathrm{d}y$，同时把 $\mathrm{d}l$ 变为 $\mathrm{d}x$，则是符合保角变换的。若把图 2-3 中的 M 点放大图就可知道，由于 $\mathrm{d}s \perp \mathrm{d}l$ 及 $\mathrm{d}y \perp \mathrm{d}x$，所以将 $\mathrm{d}s$ 变为 $\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}l$ 变为 $\mathrm{d}x$ 后，其角度不变（角度的不变性），同时由于 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}$（伸长度的固定性），故符合保角映射的两个性质。前面的代入消去微弧法即是按保角映射的第（2）性质进行的，但由于它可以单独解地下水流方程，而且只用一般的微积分就可以进行，不需要涉及复变函数问题，因此把它单独作为解地下水流的一种方法。为了说明保角变换法，现将变换的第（1）性质进一步说明如下。

把（2-2-3）式中的 $\mathrm{d}l$ 移项，两边乘 $\cos\theta$：

$$\mathrm{d}Q\mathrm{d}l \cdot \cos\theta = Ku\mathrm{d}s\mathrm{d}h \cdot \cos\theta$$

参看图 2-3 可知，$\mathrm{d}l \cdot \cos\theta = \mathrm{d}x$，$\mathrm{d}s \cdot \cos\theta = \mathrm{d}y$

∴
$$\mathrm{d}Q\mathrm{d}x = Ku\mathrm{d}y\mathrm{d}h$$

即
$$\mathrm{d}Q = Ku\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{2-2-14}$$

（2-2-14）式与（2-2-5）式相同，故由（2-2-3）式变为（2-2-5）式是符合保角变换的两个性质。

∴
$$\mathrm{d}Q = Ku\mathrm{d}s\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}l} = Ku\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{2-2-15}$$

由于 $\mathrm{d}s$ 变为 $\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}l$ 变为 $\mathrm{d}x$ 是顺时针方向转了一个角度，所以 $\mathrm{d}Q = Ku\mathrm{d}s\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}l}$ 变为 $\mathrm{d}Q = Ku\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$ 属于第一类保角变换。

把（2-2-15）式中的 $\mathrm{d}Q$ 从 0 至 Q 及 $\mathrm{d}y$ 从 0 至 y 积分后得：

$$Q = Kuy\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{2-2-16}$$

Q 为流量，K 为渗透系数，y 为任意断面上含水层厚度，u 为面积系数，放射水流 $u = 2\pi x$，平行水流 $u = B$（B 为渗透带宽度）。

设渗透的过水面积为 A，则 $A = uy$，

∴
$$Q = KA\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{2-2-17}$$

（2-2-17）式为地下流的基本公式，它与达西公式基本相同，（2-2-17）式中的