

中等专业学校试用教材

大地控制测量

下册

南京地质学校 编

地质出版社

中等专业学校试用教材

大地控制测量

下 册

南京地质学校 编

地质出版社

内 容 提 要

本书介绍三、四等控制测量内业计算的基础理论和基本方法,主要内容有:高斯投影,三、四等三角测量概略计算,条件平差,典型图形平差,间接平差,导线及高程网平差,最后介绍电算在测量平差计算中的应用。

本书内容结合实际,可作为中等专业学校地形测量专业和技术人员培训的试用教材,可供同类专业教学及工程技术人员工作中的参考。

大地控制测量

下 册

南京地质学校 编

地质部教育司教材室编辑

责任编辑:胡清泉

地质出版社出版
(北京西四)

地质印刷厂印刷
(北京安德路47号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本: $787 \times 1092^{1/16}$ 印张: $20^{1/4}$ 插页 6 个 字数: 477,000

1981年4月北京第一版·1981年4月北京第一次印刷

印数1—3,840册·定价3.60元

统一书号: 15038·教108

前 言

根据地质部中等地质学校地形测量专业三年制教学计划的要求，我校通过总结历年教学经验，调查研究，广泛征求有关测绘单位的意见，在原有教材的基础上编写了这本《大地控制测量》试用教材。

全书分为上、下两册。上册着重介绍大地控制测量外业工作；下册着重介绍内业计算。上册第一章至第四章由王文中同志编写，第五、第六章由高昌洪同志编写。下册由邵诚同志编写。

本书内容紧密结合国家现行作业规范，力求理论联系实际、简明扼要、通俗易懂，适当反映我国近代生产中的新技术。章节内容的编排，考虑到教学中上、下两册同时进行教学时的互相配合和衔接。部分内容仅作为学生的参考。

在编写过程中，我们参考了兄弟院校的教材及有关单位的文献、资料，下册原稿经武汉地质学院测量教研室胡清泉、李汝昌、陈永韶同志审校，在此谨表示感谢。

由于编者业务水平有限，加上时间仓促，难免存在缺点和错误，诚挚希望使用本教材的同志们提出批评指正。

编 者

一九八〇年五月

目 录

第七章 参考椭球与高斯平面直角座标	1
第一节 椭球面上法截线的曲率半径.....	1
第二节 观测值化算到参考椭球面上的概念.....	3
第三节 地图投影的概念.....	6
第四节 高斯克吕格投影.....	8
第五节 球面角超及洛戎德尔定理.....	14
第六节 椭球面上的角与高斯平面上角的关系.....	19
第七节 用《投影表》进行座标换算算例.....	23
第八节 距离改正计算.....	29
第九节 高斯座标的换带计算.....	32
第八章 三角测量概算	41
第一节 概算的目的和步骤.....	41
第二节 外业资料的检查.....	41
第三节 编制已知数据表, 绘制略图.....	42
第四节 近似边长和球面角超的计算.....	43
第五节 归心改正数计算.....	45
第六节 近似座标及曲率改正之计算.....	48
第七节 三角点水平方向及成果表.....	51
第九章 独立三角网按条件平差	54
第一节 三角网平差的目的和基本方法.....	54
第二节 独立三角网中的条件方程式.....	55
第三节 三角网条件式总数与独立网条件式个数的确定.....	65
第四节 条件平差原理.....	67
第五节 法方程式的组成.....	68
第六节 法方程式的解算.....	71
第七节 改正数计算及检核.....	79
第八节 检核公式的证明.....	80
第九节 单位权中误差 μ 之计算.....	84
第十节 平差值函数的中误差.....	86
第十一节 线性对称方程组的两个特性.....	94
第十二节 独立网条件平差算例.....	96
第十章 非独立三角网的条件方程式	107
第一节 基线条件与座标方位角条件.....	107
第二节 纵横座标条件.....	111

第三节	非独立网条件式的个数与选择	117
第十一章	分组平差	120
第一节	分组平差原理	120
第二节	乌尔马耶夫系数改化规则	124
第三节	分组平差中改正数和系数的有关性质	128
第四节	分组平差的精度评定公式	132
第五节	应用分组平差法平差非独立网算例	134
第十二章	典型图形平差	141
第一节	典型图形平差的特点及一般要求	141
第二节	应用两组平差法平差典型图形	142
第三节	应用三组平差法平差典型图形	149
第四节	典型图形的点位中误差公式	159
第五节	线型三角锁平差	165
第十三章	间接平差	175
第一节	间接平差原理	175
第二节	误差方程的线性化	179
第三节	按史赖伯法则改化方向观测误差方程式	183
第四节	误差方程式、法方程式的组成及检核。法方程式的解算	185
第五节	单位权中误差与 $[PVV]$ 的计算	189
第六节	未知数函数中误差和未知数中误差	191
第七节	用权系数计算未知数和未知数函数的权倒数	197
第八节	求最后两个未知数的权倒数	198
第九节	三角网按角度进行座标平差	199
第十四章	导线平差	208
第一节	导线的近近平差法	208
第二节	导线的严密平差	213
第三节	附和导线平差算例	219
第十五章	高程控制网平差	223
第一节	高程控制网平差概述	223
第二节	水准网的结点平差法 (一)	224
第三节	水准网的结点平差法 (二)	229
第四节	多边形平差法 (波波夫法)	232
第五节	以条件平差法平差水准网 (算例)	236
第六节	以间接平差法平差水准网 (算例)	240
第七节	三角高程网平差	244
第十六章	电算应用部分介绍	250
第一节	用塞德尔法解法方程组	250
第二节	用逐次趋近法 (点松弛法) 解误差方程式	252
第三节	用逐次趋近法 (点松弛法) 解条件方程式	255

第四节	日本EL-5002型电子计算器在控制测量计算中的应用.....	258
第五节	DS-202型台式电子计算机	271
第六节	三角网带有条件的间接平差程序.....	274
附 录		294
附录 1	$\lg f$ 、 f 、 $\frac{f}{3}$ 、 f' 表.....	294
附录 2	曲率改正数 δ 用表.....	296
附录 3	距离化归至高斯平面上的改正数 ΔS 所需用的系数 K 表	300
附录 4	典型图形固定系数表.....	301

第七章 参考椭球与高斯 平面直角坐标

第一节 椭球面上法截线的曲率半径

《大地控制测量》上册主要叙述三、四等水平和高程控制网的布设,精密测定外业成果,并进行外业验算等问题,下册主要讨论内业计算。

对建立水平控制网来说,地球表面上直接测定的结果,还不是大地测量的最后成果,还要将地球自然表面上直接测定的原素化算为相当于参考椭球面上的原素;通过计算再将这些原素投影到平面上,在平面上经过平差计算,最后获得三角点的平面坐标。

在第一章讨论参考椭球和建立坐标系的基础上,本章将进一步讨论参考椭球面上的主要曲线及其曲率半径和高斯平面直角坐标。

一、法截面与法截线

图(7-1)为椭球体, AA' 是垂直于 A 点切平面的法线。因为不是圆球,所以 AA' 不通过球心,但与短轴相交于 K 。包含法线 AA' 可以作无数个平面,这些平面称为 A 点的法截面,简称法面。法面与椭球面相截所成的弧线称为 A 点的法截线,也叫法截弧。过 A 点并过两极 P_1 、 P_2 的法截线称为 A 点的子午线。全球的子午线为一椭圆,叫做子午圈。如 $AP_1A'P_2$ 。与子午圈垂直的 $AEA'W$ 圈称为 A 点的卯酉圈, NAM 为任意方向的法截线。

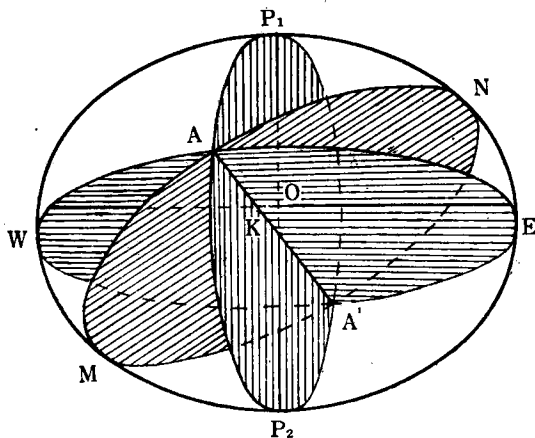


图 7-1

二、法截线的曲率半径

椭球体不同于圆球,同一点上不同法截线的曲率半径不同,同一法截线上不同点的曲率半径也不相同。

(一) 子午线曲率半径 M

考虑到 (7-3) 式和 (7-6) 式, 上式也可写成

$$R = \frac{a}{1 - e^2 \sin^2 B} \sqrt{1 - e^2} \quad (7-8)$$

椭球面上任一点的平均曲率半径, 是指该点无数法截线的曲率半径的算术平均值所趋近的极限。

上述曲率半径公式, 在以后的讨论中都会用到。如图 (7-3) 中, 设 A 点的大地纬度为 B 。在子午线上, A 点附近有一点 A' 的纬度为 $(B + dB)$, dB 为纬度 B 的微小增量, 因半径很大, $\widehat{AA'}$ 很小, 所以 $\widehat{AA'}$ 可作为一段半径为 M 的圆弧。当已知 A 点的子午线曲率半径后, 便可求得 $\widehat{AA'}$ 子午线弧长为

$$\widehat{AA'} = M dB \quad (7-9)$$

若要求得平行圈上一段微分弧 $\widehat{AD}$ 时, 同理, 只要已知 D 与 A 的经差 dl 和平行圈半径 $AC = r$ 便可按下式求得 $\widehat{AD}$ 的弧长

$$\widehat{AD} = r dl \quad (7-10)_1$$

或

$$\widehat{AD} = N \cos B dl \quad (7-10)_2$$

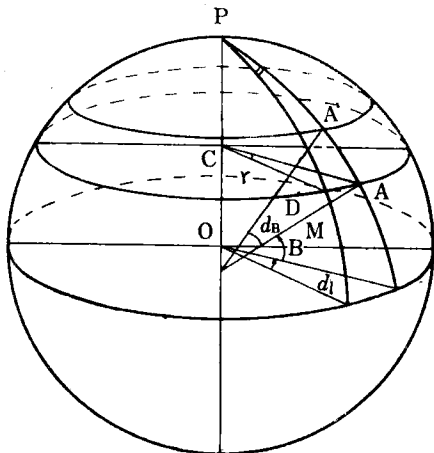


图 7-3

第二节 观测值化算到参考椭球面上的概念

在三角测量中直接测定的值, 是为了计算点与点之间的相关位置, 为此首先必须考虑推算基准面的问题。显然在平面上或曲面上进行计算, 所用的数学公式和方法是不相同的, 如果在小面积内, 我们把这个范围假定为平面, 那么一切测定值都归结到平面上进行计算, 这样问题就简易得多。但当测量的面积较大时, 不仅不能用平面来代替曲面, 而且必须正确确定推算的基准面, 否则计算工作将要产生很大的误差。目前, 世界各国都采用旋转椭球面即各自的参考椭球面作为计算的基准面。野外的测定值是在地球的自然表面上获得的, 所以在计算之前必须把测定值化算到参考椭球面上去, 构成参考椭球面上的几何图形, 然后在椭球面上进行解算。以下我们仅讨论将测定值化算到参考椭球面上去的几项改正的概念。

一、垂线偏差改正

地表上一点的垂线与参考椭球面上相应点的法线间的夹角称为垂线偏差。如图 (7-4)。过 A 点的垂线 ng 与椭球面上相应点 a 的法线 $n'r$ 之间的夹角叫做 A 点的垂线偏差 (也称绝对垂线偏差)。而以垂线 ng 为棱线的二面角与以法线 $n'r$ 为棱线的二面角是不相等的, 这一差异如同观测时仪器的旋转轴不垂直所引起的水平方向误差那样, 当进行水平角观测时, 仪器是按铅垂线整置的, 所测得两方向间的夹角是以铅垂线为棱线的二面角, 所以在所有三角点上, 要把以铅垂线为准的观测方向值, 化算为椭球面上以法线为准的

值,即必须对测定值进行这一改正,我们把这项改正称为垂线偏差改正。

在大地原点上,由于把这个点上的天文经纬度作为大地经纬度,所以垂线与法线是一致的,即这时垂线偏差为零,因而把地面上任一点对于大地原点的垂线偏差,称为相对垂线偏差。因为推求绝对垂线偏差比较困难,所以一般所指的垂线偏差都是相对于大地原点而言的相对垂线偏差。地面垂线偏差的大小,主要决定于:

- (1) 地壳内部物质的分布;
- (2) 所采用的参考椭球及定向;
- (3) 大地原点上的绝对垂线偏差。

就我国目前所采用的参考椭球及其定位来说,垂线偏差一般不大于 $5''$,用作垂线偏差改正,其值是很微小的。在实际工作中,除一等三角点上的观测值归算到椭球面上时,才考虑垂线偏差改正外,对于二、三、四等三角测量来说,可不顾及此项影响,而把以铅垂线为准的观测结果当作以法线为准的参考椭球面上的结果。

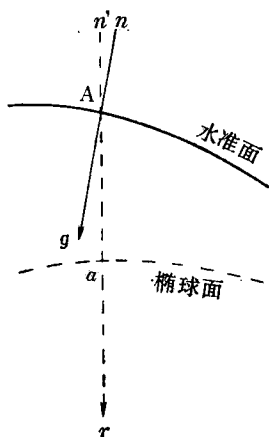


图 7—4

二、截口差(截面差)改正

因为地球是椭球形,所以不在同一子午圈或同一平行圈上的两点,它们的法线在空间并不相交,因而不位于同一平面内。如图(7—5)中,在椭球面上有A、B两点,B点的纬度高于A点的纬度, An_a 为A点的法线, Bn_b 为B点的法线, n_a, n_b 都在短轴上。从理论上可以证明, on_b 必然大于 on_a ,即纬度高的点,法线与短轴的交点离椭球中心O要远些,纬度低的点,法线与短轴的交点离O要近些。在A点向B点观测时,化算到椭球面上的方向应当是包含法线 An_a 并过照准点B这样一个法面与椭球面相截所得的法截线 AaB ,而B点向A点观测时,法截线则为 BbA ,由于从A点到B点和由B点到A点的法截面并不重合,相交成AB弦线,此弦线位于椭球面下部,所以这两条法截线不会重合,既然B点的纬度大于A点的纬度,又因为 $on_b > on_a$,所以法截线 BbA 就一定在法截线 AaB 的北(上)边。

对A点来说,我们称 Aab 为由A点到B点的正法截弧。 BbA 称为A点的反法截弧。两者称为相对法截弧。由于不在同一子午圈和纬圈上,两点产生两条相对法截弧,这就说明两点间的对向观测不是同一方向。尽管相对法截弧之间的夹角很小,但实际上是存在的。在椭球面上,如果还有第三个点C,且在A、B、C三点上都进行了对向观测,则在各点都有两条正、反法截弧。各点上所测得的角度应是正法截面之间的二面角,即正法截弧的切线方向之间的夹角(图7—6中画有双弧线所表示的角)。然而图(7—6)中出现了6条边,这样,三个顶点的三角形便构不成闭合图形,要解决这一矛盾,需要在椭球面上找出两点之间的唯一一条线来,这条线叫大地线。

椭球面上两点之间最短的连线叫做大地线。大地线位于正、反法截弧之间。如图(7—7)。在三角形的三个顶点之间,如果用大地线联结起来, ABC 之间就成为一个闭合图形了。经证明,A、B两点间的大地线,在A点(或B点)与正法截弧所构成的夹角等于正、反法截弧之间夹角的三分之一。例如在图(7—7)的A点上,设大地线与正法截弧 AaB 之间的夹角 δ ,A点正、反法截弧的夹角为 Δ ,则

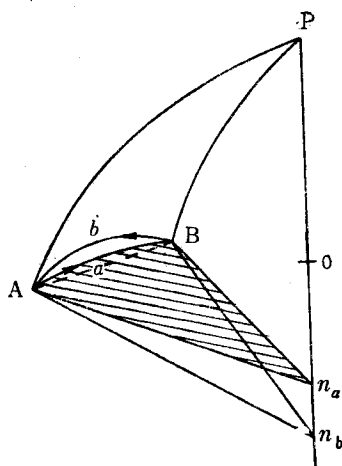


图 7—5

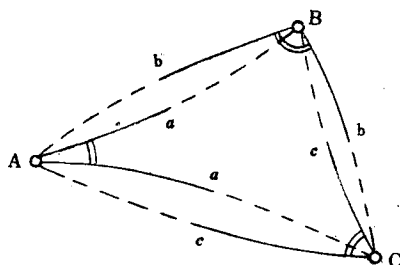


图 7—6

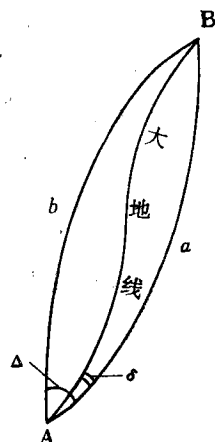


图 7—7

$$\delta = \frac{1}{3} \Delta \quad (7-11)$$

按 (7—11) 式, 就可以将正法截弧的方向化算为大地线方向, 这项改正称为截口差改正 (也称为截面差改正)。正、反法截弧之间的夹角 Δ 是很小的, 例如当距离为 50 公里时, Δ 最大角不过 $0.''02$, 所以在二、三、四等三角测量中不要考虑这项改正。至于大地线长度与法截线长度的差, 也是一个极微小的数值, 例如当 AB 间距离为 600 公里时, 最大差不超过 $\frac{1}{13.5 \text{ 万}}$, 所以在二、三、四等三角测量中, 可以把两者视为相等。

三、因照准点高出椭球面而加的改正

经过上述改正, 还不能算已把观测方向化到椭球面上, 这是因为, 前面的讨论是假定三角点位于椭球面上, 如果三角点高出椭球面, 而且当测站点和照准点又不位于同一子午圈或平行圈上时, 因两点的法线在空间并不相交, 观测方向化为椭球面上相应方向是会有变动的。在图 (7—8) 中, C 是测站点, B 是照准点, B 位于椭球面以上, 其大地高连同觇标高为 H_B , B_1 处的法线为 BB_1 , 延长后与短轴相交于 n_b , 则 B_1 就是 B 点化到椭球面上的相应位置。 CB 间在椭球面上的方向为法截弧 CB_1 , 但在观测时, 是无法照准 B_1 点的。当在 C 点照准 B 点时, 包含法线 Cn_c 并过 B 点的照准面与椭球面相交的法截弧为 CB_2 , 从图中可以看出, CB_1 与 CB_2 并不一致, 其夹角设为 δ_H , 这就是当照准点高出椭球面时观测方向值应加的改正。

交角 δ_H 的大小取决于两点间的大地方位角、照准点的大地纬度与高出椭球面的距离。通过计算表明, 当方位角和照准点的纬度均为 45° , $H_B = 1000^M$ 时, $\delta_H = 0.''05$, 所以在三、四等三角测量中, 也不必考虑这项改正。

经上述三项改正, 观测方向值便化算为椭球面上相应的

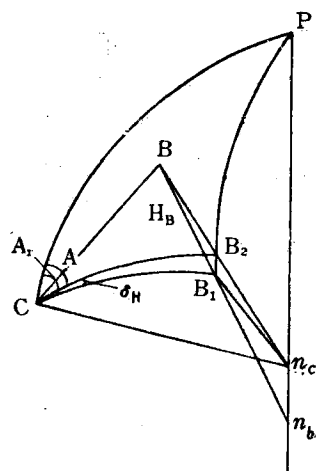


图 7—8

方向值。因为在三、四等三角测量中并不需要进行这些改正，所以并没有列出计算公式，我们可以把野外观测成果直接作为椭球面上的方向值。

三角网中，如果测定了基线或直接测定了三角形的边长，也要化算为椭球面上的长度，此项化算在长度测量这一章里已作了讨论。

三角网的方向值和起算边长都化算到参考椭球面上后，就相当于把地球自然表面上的图形，描写到椭球面上，构成了椭球面上的图形，以后的计算，就可在椭球面上进行。已如前述，除一等三角网外，二、三、四等三角测量都是在所谓高斯平面上进行计算，所以下要讨论高斯投影的问题。

第三节 地图投影的概念

前面已讨论了将直接观测值化算到参考椭球面上去的概念，经过这些化算，已把地球自然表面上的测量数据化归到了参考椭球面上，现在再来研究如何将椭球面上的图形投影到平面上，即所谓地图投影问题。

一、什么叫地图投影？为什么要投影？

椭球面是一个封闭的曲面，地形图是平面，研究椭球面上的图形投影到平面上的一种学科叫做地图投影。地图投影的实质是研究同一个点位于曲面和平面上的数学关系。参考椭球面上点的位置是以大地坐标 (B, L) 表示，投影到平面上后是以直角坐标 (x, y) 表示，相互间坐标的函数关系可以表示为

$$\begin{aligned} x &= f_1(B, L) \\ y &= f_2(B, L) \end{aligned} \quad (7-12)$$

函数 f_1, f_2 称为投影函数，函数的形式决定于所确定的投影性质。(7-12)式说明，椭球面上每一个点在投影平面上相应地有完全确定的点，而且仅有唯一的点与之相对应。当曲面上的点连续移动时，平面上对应点也按一定规律连续地移动，所以 f_1, f_2 是连续函数。

为什么必须把椭球面上的图形投影到平面上去？这是因为，如果把地球表面的地形，按比例缩小描绘在地球的立体模型上，当然不产生由曲面投影到平面上的问题，但由于模型的半径受一定的限制，模型总是不可能做得很大，因此所显示的地形就不可能很详尽，况且模型在制作上有一定困难，使用也很不方便，所以地形图都要测绘在图纸（平面）上。再如，在椭球面上解算三角形、平差三角网和推算三角点的坐标，计算工作是复杂的，这是因为平面几何和平面三角的公式都不能直接应用。例如解算椭球面上的三角形，在一定范围内，我们虽然可以用圆球来代替椭球，应用球面三角的公式来解算，但又必须知道每个三角形的平均曲率半径；又如推求三角点的大地坐标 (B, L) 以及由此反求长度、方位角等，都是一个较为复杂的计算过程。如果将三角网投影到平面上，就可用平面直角坐标来推算，各种运算就会简易得多，所以从三角网计算来看，也必须考虑投影问题。

二、地图投影的分类

地图投影的方法很多，有两种不同的分类：

(一) 按投影的特性或投影误差的特征分类

椭球表面是曲面,无法要求使曲面上的图形毫无改变地展到平面上去,因此任何一种投影都只能保持某种条件不变的特性,而同时总要产生某些变形,即发生投影误差。投影误差有长度误差、角度误差和面积误差三种,按投影的特性和投影误差特征的不同,地图投影可分为:

1. 正形(等角)投影 在投影平面上任何一点,从该点出发所画的方向线,在极小的范围内,各方向线在平面上长度与相应的椭球面上长度之比(称为投影长度比)为一常数;平面上各方向线间的夹角和椭球面上的夹角相等。例如在椭球面上一个微小的圆,投影到平面上后,其形状不变,仍是个圆,但长度(大小)和面积有了改变,因此只能保持相似的性质,所以称为正形投影,或叫做等角投影。

2. 等积投影 在投影面上能保持面积相等,即没有面积误差,但长度和角度都要产生变形的一种投影叫做等积投影。例如在椭球面上一个微小的圆,经等积投影后,在投影面上成为面积与圆相等的椭圆。

3. 任意投影 凡既不保持等角也不保持等积的投影称为任意投影。例如在椭球面上一个微小的圆,经任意投影后,成为形状不同,面积不等的椭圆。等距投影便是任意投影的一种,例如椭球面上的小圆,经等距投影后,半径与投影后的椭圆的一个半径相等,而其角度和面积都发生了变形。

(二) 按经纬线投影后的形状分类

1. 透视投影 运用透视原理把椭球面上的图形投影到平面上叫做透视投影。如图(7-9)。\$O'O\$与投影平面垂直,\$P\$点称为视点,它位于地轴上(此处设与地极重合)。若要把点\$A\$、\$B\$投影到平面上去,只要从视点\$P\$起,分别引与\$A\$、\$B\$的直线,延长至投影面的\$A'\$、\$B'\$,则\$A'\$、\$B'\$便是\$A\$、\$B\$的透视投影。

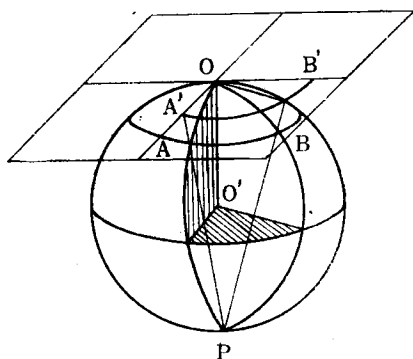


图 7-9

根据投影面对球面的位置不同,透视投影又可分为三种:当投影面与赤道面平行时为**正透视投影**;当投影面与子午面平行时,为**横透视投影**;此外,投影面与某点切平面平行时为**斜(水平)透视投影**。图(7-9)因视点\$P\$与地极重合,所以又称为极球面透视投影。在这种投影中,纬线投影为一组同心圆,经线投影为同心圆的半径,显然其夹角等于相应两子午线的经差。

2. 圆柱投影 设想以圆柱面包围椭球体,按照一定条件,把椭球面上的图形投影到平面上,然后沿圆柱的一条母线切开,将圆柱展成平面,便得圆柱投影。根据圆柱对于椭球体的位置不同,圆柱投影又可分为正圆柱投影、横圆柱投影和斜圆柱投影。当圆柱的轴与椭球的短轴一致时,叫**正圆柱投影**。如图(7-10-a),其经线投影为平行的直线,纬线投影为与经线投影后成正交的直线。当圆柱的轴与椭球的长轴一致时,叫**横圆柱投影**。如图(7-10-b)。横圆柱投影除相切子午线和赤道投影后成互相垂直的直线外,经线投影后与切子午线成对称的曲线;纬线投影后与赤道也成对称的曲线。图(7-10-c)为**斜圆柱投影**。当圆柱面和椭球体相切时,称为**切圆柱投影**;和椭球体相割时,称为**割圆柱投影**。如图(7-10-a)、(7-10-b)、(7-10-c)都是切圆柱投影,图(7-10-d)为

割圆柱投影。

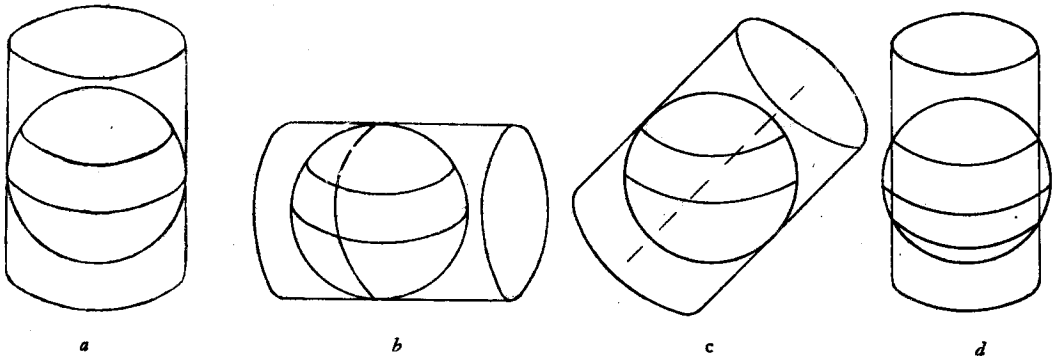


图 7—10

3. 圆锥投影 设想以圆锥包围椭球体，按一定条件，将椭球面上的图形，投影到圆锥面上，然后沿一条素线（投影后的经线）切开，再将圆锥展成平面，成一扇形，便得到圆锥投影。当圆锥的轴线与短轴一致时，称为正圆锥投影。如图（7—11—a）中，纬线投影为一组同心圆；经线投影为交于圆心的一束直线。当圆锥面与椭球体相切时，称为切圆锥投影。当圆锥面与椭球体相割时，称为割圆锥投影。如图（7—11—b）。



图 7—11

测绘大、中比例尺图时，根据用图目的，一般要求成图有相似的性质，对长度误差（变形）也要有一定限制，此外对三角测量来说，因为直接观测值中大量的角度，都要化归到平面上参与计算，如果投影能保持等角的性质，则可使计算工作大为方便。

上面已经说过，正形投影能满足等角的要求，目前我国选择高斯正形投影作为大、中比例尺测图的投影方法。高斯正形投影是一种横圆柱投影，将在下节专门讨论。

第四节 高斯克吕格投影

地图投影这一概念，现在已不能用直观的几何意义来理解，它已推广到高等数学的范畴。

首先研究正形投影的叫兰勃特，在他以前，研究地图投影都局限于用透视的方法，到了兰勃特才开始用更高的观点即用数学投影（又称抽象投影）来分析问题，并得出了圆锥

正影投影的理论。高斯投影也是正形投影的一种，首先由高斯推导出公式，后经克吕格研究扩充，使之更为完善，所以后人称这种投影为高斯克吕格投影，简称高斯投影。

一、高斯平面直角坐标

因为高斯克吕格投影，无论按纵横坐标轴的组成，投影后图形的形状和投影误差的规律来说，符合横圆柱正形投影的几何特性，所以我们在讨论这种投影时，总还是按图（7—12）来说明问题，这样比较直观和易于理解。

已如《地形测量》所述，在图（7—12）中，椭球体与圆柱相切，切子午线 $P_1O'P_2$ 称为轴子午线或称中央子午线。将椭球面上 3° 或 6° 瓜瓣形范围内的图象，投影到圆柱面上，再将圆柱展成平面，便可得到椭球面上投影到平面上的图形，各个投影范围内的中央子午线与赤道投影后构成高斯克吕格平面直角坐标的纵横轴。如图（7—13）。为了避免横坐标 y 出现负值，纵坐标轴从500公里起算，这就相当于将坐标纵轴向西平移500公里。

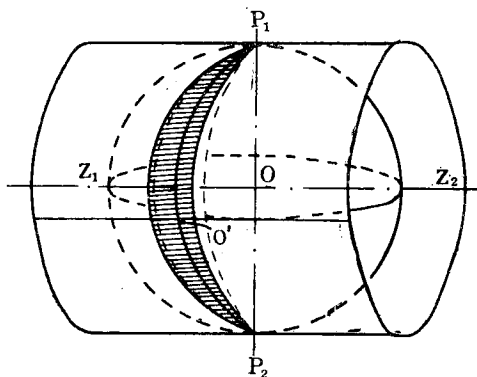


图 7—12

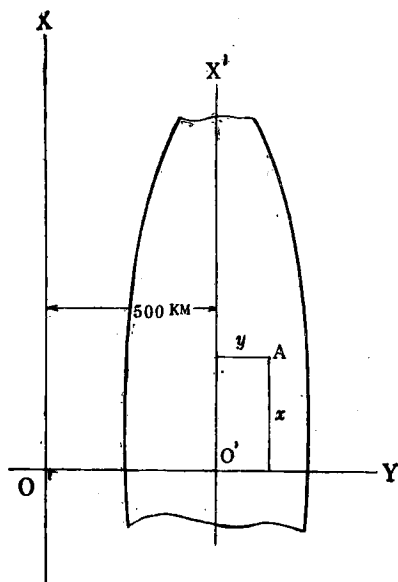


图 7—13

二、高斯投影公式

公式（7—12）是投影的一般函数式，因为任何一种投影都可表达为两种不同坐标系换算的这样普遍形式，但不同性质的投影，函数形式当然是不同的。投影的性质决定于所选择的投影条件与投影误差的特征，所以我们可以根据一定的投影条件来推导出具有一定特性的投影公式，这是推求各种投影公式的基本思想。

高斯投影的投影函数 f_1 、 f_2 是由下列条件确定的：

（1）由一点画出的有限线段，对于任何方向的长度比都一致，即长度比与方向无关；

（2）赤道投影后为一直线，当 $B=0^\circ$ 时， $X=0$ ，即赤道投影后为坐标横轴；

（3）中央子午线投影后为一直线，与横轴垂直，且长度比为1，即各带切子午线投影后为坐标纵轴。

如图（7—14），设椭球面上有一点 P ，大地坐标为 (B, L) ，附近有另一点 P' ，大地坐标为 $(B+dB, L+dL)$ ，大地线长 $PP'=ds$ ，投影在高斯平面上相应有点 $p(x, y)$ 和 $p'(x+dx, y+dy)$ 两点， pp' 之间应是曲线，因就其长度来说，可以直接以弦表示，如图

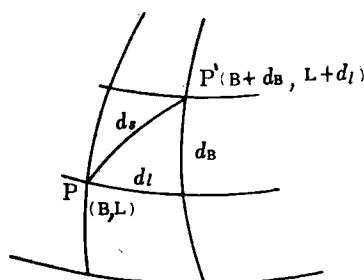


图 7-14

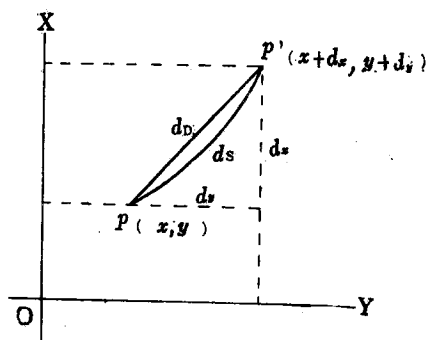


图 7-15

(7-15), $pp' = dD$, $dD^2 = dx^2 + dy^2$ 。又因 ds 为微分线段, 故可按勾股定理及 (7-9)、(7-10)₂ 式得

$$ds^2 = M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dL^2$$

设

$$m^2 = \frac{dD^2}{ds^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{M^2 dB^2 + N^2 \cos^2 B dL^2} \quad (7-13)$$

将 (7-12) 式全微分, 经过推导, 代入 (7-13) 式后得

$$m^2 = \frac{E \cos^2 \alpha + 2F \sin \alpha \cos \alpha + G \sin^2 \alpha}{N^2 \cos^2 B} \quad (7-14)$$

m 称为 pp' 的投影长度比。

为了满足条件 (1), 应设法消去有方位角 α 的各项, 于是令上式中

$$\left. \begin{array}{l} F = 0 \\ E = G \end{array} \right\} \quad (7-15)$$

这时

$$m^2 = \frac{E}{N^2 \cos^2 B} = \frac{G}{N^2 \cos^2 B} \quad (7-16)$$

在 (7-15) 式中, E 、 F 、 G 分别代表三个偏微分式子, (7-16) 式中, N 为卯酉圈曲率半径, 该式已与方位角 α 无关。(7-15) 式便是正形投影的数学条件, 按照这一条件推导所得的函数式, 就能使椭球面上任一点出发的微分线段, 投影后的长度比都等于同一个值, 从而投影保持了等角的性质。所以采用正形投影的地形图, 能与实地形状相似。

条件 (1) 是正形投影的特性, 正形投影必须满足条件 (1), 反之, 凡合乎条件 (1) 的一定是正形投影。

条件 (2)、(3) 是高斯投影的另一个特征, 条件 (3) 可以表达为

$$F(\theta) = X \quad (7-17)$$

θ 是纬度 B 的函数, 为了使推导公式简化起见, 给定这个 θ 值, 叫做等量纬度。

(7-17) 式说明, 如果在中央子午线上有一点, 其大地座标为 (L_0, B) , 则 $F(\theta)$ 就是由赤道起到该点的子午线弧长。高斯投影要求中央子午线投影后其长度不变, 即这一点在投影平面上的纵座标 x 应等于这一段子午线弧长 X , 以式表示为当 $y = 0$ 时, $x = X = F(\theta)$, 即 x 只与纬度 B 有关。