高等学校基础数学教学参考丛书·学习指导系列

微积分学习指导

（第二版）

张广梵·编著

南開大學出版社

高等学校基础数学教学参考丛书·学习指导系列

微积分学习指导

（第二版）

张广梵 编著

7

南开大学出版社
天津

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习指导 / 张广梵编著. —2 版. —天津：南开大学出版社，2006.11

ISBN 7-310-00994-0

Ⅰ.微... Ⅱ.张... Ⅲ.微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 078926 号

南开大学出版社出版发行

出版人：肖占鹏

地址：天津市南开区卫津路 94 号 邮政编码：300071

营销部电话：(022)23508339 23500755

营销部传真：(022)23508542 邮购部电话：(022)23502200

*

河北省迁安万隆印刷有限责任公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2006 年 11 月第 2 版 2006 年 11 月第 8 次印刷

880×1230 毫米 32 开本 16.75 印张 477 千字

定价：30.00 元

如遇图书印装质量问题，请与本社营销部联系调换，电话：(022)23507125

内容提要

这一套高等数学教学参考书共三个分册:《微积分学习指导》,《线性代数学习指导》和《概率统计学习指导》,面向高等学校经济和管理类各专业,以及理工类有关专业。这套丛书自 1997 年出版以来已经多次重印,这是这套丛书的第二版,是在第一版的基础上根据教育部制定的高校数学“教学大纲”和“考研大纲”以及近年来使用的教材修订和充实的。

本册书是参照经济和管理类各专业,以及理工类非数学各专业通用的“微积分”教材编写的。全书共分十一章,第二版比第一版增加了一章内容,即“向量代数与空间解析几何”。每一章由四部分构成:一、内容提要,二、典型例题分析,三、自我检测题,四、自检题答案或提示。全书针对性强,是学习微积分的难得的参考书。

这一套“学习指导”的读者对象是高等学校师生,主要是经济和管理门类各专业,以及理工科(非数学)有关专业的师生;对于准备报考硕士研究生和 MBA 者也是一套很好的参考书。亦可供数学专业师生,以及应用概率统计的管理人员和工程技术人员参考使用。

出版说明

这一套“学习指导”，是按照高等学校经济和管理类各专业，以及理工科有关专业通用的教材编写的，是上述各专业必修的数学基础课程的教学参考书，包括《微积分学习指导》、《线性代数学习指导》和《概率统计学习指导》等三个分册。这套书自1997年出版以来，已经重印了多次。考虑到近年来上述各专业的教材都有所变化或更新，特别是教材中例题和习题的题型也有所变化，出现了许多新颖的题型；而且数学（包括“微积分”、“线性代数”和“概率统计”）是“全国硕士研究生入学统一考试”的必考科目，并且在全部必考4科的总分500分中数学占150分，所以我们决定修订这一套“学习指导”。

修订版保持了原书的结构和格式，只是使每一章前面的“内容提要”更贴近现行的有关教材和“全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》”的要求。“典型例题分析”更新了大部分例题，特别注意吸纳了历年“研究生入学统一考试”试题中比较新颖且有代表性的试题，通过例题向读者演示各种解题方法和技巧，并且使读者能更深入地领会有关理论知识。

编　者

2006年3月

前　言

本人多年从事实变函数、数学分析、高等数学、微积分方面的教学。1990年至2000年被教育部聘为全国硕士研究生入学统一考试数学学科命题组教师，2002年至2004年又连续三年被聘为该命题组审题教师，并参加了教育部制定的高校数学教学大纲与考研大纲的研讨与修订，对高等数学比较熟悉。结合自己及周围同事多年工作经验，并参考了许多高校造诣高深、学识渊博的专家、学者、教授的有关论著，参考了多种数学杂志、辅导书及多所高校多年期终试题与考研试题，我编写了这本《微积分学习指导》。

本书读者对象：工学类及经济与管理类本科在校生，特别是有志报考工学类及经济与管理类硕士研究生的考生、高校从事数学教学的教师及科技工作者。

本书使用方法：在校生应选择与自己教材相呼应的内容，报考硕士生的考生要依据考研大纲选择相应的内容。

本书结构严谨，突出基本概念、基本理论、基本方法的学习。各类各次考试，试题虽然不同，但教学大纲与考研大纲基本不变，各种考试都是以大纲为准命题的，精读并学会一定数量的范例，举一反三，融会贯通，不失为有效的学习途径。读者如能精读本书，定会提高对数学中概念、性质、定理的理解与掌握程度，增加自己的解题技巧与方法，提高思维能力与解决实际问题的能力，取得好的学习与考试效果。

全书共选编了800道例题，都给出了解答；自测题约300道，并附

有答案或提示，作为自我检测题。

书中提供了一些解题的简捷方法，如能掌握，对解题技巧的提高会很有益。

由于编者水平有限，时间仓促，疏漏与错误在所难免，望读者勿吝指正。

编　者

2006.4 于北京

目　录

高等数学一览表

- 一元微积分
  - 函数与极限
  - 微分学
    - 导数和微分概念及计算
    - 中值定理与导数的应用
  - 积分学
    - 不定积分
      - 概念
      - 计算方法
    - 定积分
      - 概念
      - 计算方法
      - 应用
      - 广义积分
- 多元微积分
  - 多元函数微分学
  - 多元函数积分学
    - 二重积分
    - 三重积分
    - 两类曲线积分
    - 两类曲面积分
    - 场论初步
- 无穷级数
  - 数项级数
  - 幂级数
  - 三角级数
- 常微分方程
- 差分方程

第一章　函数　极限　连续

一　内容提要

微积分是在实数范围内，用极限的方法研究函数的一门数学学科.

（一）函数

1. 函数概念　设 D 是一个非空实数集合，如果存在一个对应法则 f，使得对任一 $x\in D$，通过法则 f 都有唯一一个确定的实数 y 与之对应，则称对应法则 f 是定义在 D 上的一个函数，也称 y 是 x 的函数. 记成

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中 D 称为函数 f 的定义域，通常记为 $D(f)$，x 称为自变量，y 称为因变量.

函数概念反映的是变量 x 与变量 y 之间的依赖关系. 它是由定义域和对应法则两个要素决定的，与自变量、因变量、函数符号用什么字母表示无关.

函数的表示法是多种多样的，通常用的有三种：公式（解析）法、表格（列表）法、图示（图像）法.

函数概念中，对于下面三个问题必须清楚：

(1)会求函数的定义域　如果函数是由公式法给出的，没有赋予实际意义，其定义域通常称为自然定义域，就是使函数表达式有意义的自变量的全体. 对实际问题建立的函数关系，其定义域要由问题的实际意义来确定.

(2)会求一点函数值　函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的值记为 $f(x_0)$ 或

$y|_{x=x_0}$，即用 x_0 代替 x 得 $f(x_0)$. 这里 x_0 可以是定义域中的某个实数，也可以是一个代数式.

(3)会判断两个函数是否为同一个函数. 断言两函数相同，必须从定义域与对应法则两方面入手. 只有两定义域相同且对应法则也相同时，两函数才相同，否则不是同一个函数.

2. 函数的基本性质

(1)单调性　设函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 内有定义，任取 $x_1,x_2\in$ I，且 $x_1<x_2$，若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在 I 内单调递增(单调递减). 单调递增与单调递减，统称单调. 通常利用导数符号. 在学微积分之前，可按下法处理：任取 $x_1,x_2\in$ I，且 $x_1<x_2$，计算 $f(x_2)-f(x_1)$ 并与零比较；若函数恒正(负)，也可计算 $\frac{f(x_2)}{f(x_1)}$ 并与 1 比较.

(2)奇偶性　设函数 $y=f(x)$ 在对称于原点的实数集 D 上有定义，若任取 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若任取 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数. 奇函数的图形对称于原点；偶函数的图形对称于 y 轴.

●判断奇偶性的方法

1)若 $f(x)$ 的定义域不对称于原点，则 $f(x)$ 必非奇非偶；

2)若 $f(x)$ 的定义域对称于原点，则计算 $f(-x)$，并将 $f(-x)$(有时需适当变形)与 $f(x)$ 或 $-f(x)$ 进行比较，并用定义予以判定.

(3)周期性　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在常数 $w>0$，使得对任意的 $x\in D$，有 $x+w\in D$，且恒有

$$f(x+w)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，满足上式的最小正常数 w_0，称为 $f(x)$ 的周期.

设 w 为 $f(x)$ 的周期，则 $\frac{w}{|a|}$ 为 $f(ax+b)$ 周期.

设 w_1,w_2 分别为 $f(x),g(x)$ 的周期，且 $\frac{w_1}{w_2}$ 为有理数，则 $f(x)\pm g(x),f(x)\cdot g(x),\frac{f(x)}{g(x)}$(分母不为零)，是周期函数.

●判断 $f(x)$ 是否周期函数并求其周期的方法

1)将 $f(x+w)=f(x)$ 理解成 w 的方程,求解.

一般说来,应解得 $w=\varphi(x)$. 若 $\varphi(x)$ 中有不含 x 的正常数解,则 $f(x)$ 是周期函数,其中最小的正常数解就是所求的周期;若 $\varphi(x)$ 中没有不含 x 的正常数解,则 $f(x)$ 不是周期函数.

2)在方程 $f(x+w)=f(x)$ 中令 $x=x_0$,解关于 w 的单变量方程 $f(x_0+w)=f(x_0)$,其中 x_0 的取法,使 $f(x_0+w)=f(x_0)$ 关于 w 尽可能好解. 解得 $w=\varphi(x_0)$. 将该解回代入 $f(x+w)=f(x)$,看其是否对任意 x 都成立. 若成立,则 $f(x)$ 是周期函数,w 为所求周期;否则 $f(x)$ 不是周期函数.

3)利用已知周期,求其他函数的周期. 例如,我们已知 $\sin x$,$\cos x$ 周期为 2π;$\tan x$,$\cot x$ 周期为 π,可用它们求其他函数的周期.

(4)有界性　设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义,若存在常数 $M>0$,使对任意的 $x\in D$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在集合 D 上有界,否则称 $f(x)$ 在 D 上无界. 若存在常数 $M(m)$,使对任意的 $x\in D$,恒有 $f(x)\leqslant M$ ($f(x)\geqslant m$),则称 $f(x)$ 在 D 上有上(下)界.

显然,有界函数必有上界和下界;反之,既有上界又有下界的函数必有界. 因此,有界也可以叙述为:若存在常数 A,B ($A<B$),使对任意的 $x\in D$,恒有 $A\leqslant f(x)\leqslant B$,则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

注意　一个函数是否有界,不仅与函数表达式有关,而且与给定集合 D 有关. 例如 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界,但在 $(1,+\infty)$ 内却有界.

3. **反函数**　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$,值域为 $z(f)$,如果对每一个 $y\in z(f)$,都有唯一确定的 $x\in D(f)$ 与之对应且满足 $y=f(x)$,则 x 是定义在 $z(f)$ 上以 y 为自变量的函数,记此函数为 $x=f^{-1}(y)$,$y\in z(f)$,并称其为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 显然,$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数,且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域和定义域. 在 $x=f^{-1}(y)$ 中 y 为自变量,x 为因变量. 习惯上,常用 x 作自变量,y 作因变量. 因此,$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常记为 $y=f^{-1}(x)$,$x\in z(f)$. 在同一直角坐标系中,$y=f(x)$ 与 $y=$

$f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

反函数的求法　将函数 $y=f(x)$中的 x 作为未知量,解关于 x 的方程得 $x=f^{-1}(y)$,再将字母 x 与 y 互换,得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

4. **复合函数**　设函数 $y=f(u)$的定义域为 $D(f)$,函数 $u=\varphi(x)$的值域为$z(\varphi)$. 若 $D(f)\cap z(\varphi)\neq\varnothing$(空集),则称 $y=f(\varphi(x))$为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,u 称为中间变量. 不是任意两个函数都能复合成复合函数,必须满足条件$D(f)\cap z(\varphi)\neq\varnothing$才能复合.

5. **隐函数、分段函数**　若由方程 $F(x,y)=0$,能够确定 y 为 x 的函数,则称如此确定的函数 $y=f(x)$为隐函数.

在定义域内各个互不相交的子集(多为子区间)上,分别用不同的解析表达式表示的函数,称为分段函数.

分段函数在其整个定义域上表示的是一个函数,不是几个函数.

6. **基本初等函数**

(1)常数函数　$y=f(x)=c$,其中 c 为常数.

(2)幂函数　$y=f(x)=x^{a}$,其中 a 为常数.

(3)指数函数　$y=f(x)=a^{x}$,其中底数 a 为大于零且不等于 1 的常数. 特别地,$y=f(x)=e^{x}$,其中 $e=2.71828\cdots$.

(4)对数函数　$y=f(x)=\log_{a}x$,其中底数 a 为大于零且不等于 1 的常数. 特别地,$y=f(x)=\ln x$ 的底为 e,称为自然对数.

(5)三角函数　正弦函数($\sin x$),余弦函数($\cos x$),正切函数($\tan x$),余切函数($\cot x$),正割函数($\sec x$),余割函数($\csc x$).

(6)反三角函数　反正弦函数($\arcsin x$),反余弦函数($\arccos x$),反正切函数($\arctan x$),反余切函数($\mathrm{arccot}\, x$).

7. **初等函数**　由基本初等函数出发,经过有限次四则运算、有限次复合,并且在定义域内用一个解析表达式表示的函数称为初等函数. 特别地,对幂指函数$[f(x)]^{g(x)}$(其中 $f(x)$与 $g(x)$为初等函数,且 $f(x)>0$),由于

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)},$$

故幂指函数$[f(x)]^{g(x)}$也是初等函数.

初等函数是微积分学研究的主要对象.一般地,分段函数虽不是初等函数,但在各段上,因为表达式单一,故可按初等函数处理.

8.经济学中常用的函数

(1)需求函数　在一定价格条件下,消费者愿意购买并且有支付能力的商品量.若不考虑价格以外的其他因素,只研究价格与需求的关系,则 $Q=f(P)$,其中 Q 为需求量,P 为商品价格,一般说来 $Q=f(P)$ 是单调减函数.

(2)收益(入)函数　设 Q 为销售量,P 为价格,则收益 R 为

$$R=R(Q)=PQ.$$

(3)成本函数　$C=C(Q)=C_0+C_1(Q)$,其中 Q 为产品产量,C_0 是 $Q=0$ 时的成本,称为固定成本,$C_1(Q)$ 称为可变成本.C 称为总成本.

称 $\overline{C}=\dfrac{C}{Q}=\dfrac{C_0}{Q}+\dfrac{C_1(Q)}{Q}$ 为平均成本.

(4)供给函数　在一定价格条件下,生产者愿意出售且有可供出售的商品量,略去价格以外的其他因素,只讨论价格与供给量间的关系,则 $Q=\varphi(P)$,其中 P 为价格,Q 为供给量.一般而言,它是单调增函数.

(5)利润函数　利润 L 为收益 R 与成本 C 之差,即

$$L=R-C=R(Q)-C(Q).$$

(二)极限

1.数列极限　无穷多个数按一定次序排成一排:$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$ 称为数列,简记为 $\{u_n\}$,其中 u_n 称为数列的一般项或通项.

设有数列 $\{u_n\}$ 和常数 A.若任给 $\varepsilon>0$,总存在自然数 $N=N(\varepsilon)$,当 $n>N$ 时,恒有

$$|u_n-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为数列 $\{u_n\}$ 的极限.也称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A\ (n\to\infty)$.没有极限的数列称为发散数列.

2.函数的极限　设有函数 $f(x)$ 和常数 A.

(1)若任给 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

(2)若任给 $\varepsilon>0$, 总存在 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$, 当 $0<x_0-x<\delta$ $(0<x-x_0<\delta)$时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的左极限(右极限),分别记为

$$f(x_0-0)=A \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad (左极限),$$

$$(f(x_0+0)=A \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^+}f(x)=A) \quad (右极限).$$

定理 1.1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A.$

注 该定理多在讨论分段函数分界点的极限时使用.

(3)若任给 $\varepsilon>0$,总存在 $X=X(\varepsilon)>0$,当 $|x|>X$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为 $x\to\infty$时函数 $f(x)$的极限. 记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或$f(x)\to A$ $(x\to\infty)$.

(4)若任给 $\varepsilon>0$,总存在 $X=X(\varepsilon)>0$,当 $x>X$ $(x<-X)$时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为 $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$时函数 $f(x)$的极限,分别记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to+\infty),$$

$$(\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to-\infty)).$$

定理 1.2 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A.$

3. **无穷小量(无穷小)** 以零为极限的变量,称为无穷小.

(1)无穷小的性质

1)有限个无穷小的和或差仍为无穷小;

2)有限个无穷小之积仍为无穷小;

3)有界量与无穷小之积仍为无穷小;

4)无穷小除以极限不为零的变量,其商仍为无穷小.

(2)无穷小的比较　设 α 与 β 是同一过程下的两个无穷小，即 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$.

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β 高阶的无穷小；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则称 α 是比 β 低阶的无穷小；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c$（$c$ 为常数，且 $c\neq 0,1$），则称 α 与 β 是同阶无穷小；

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是等阶无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

当 $x\to 0$ 时，经常使用下列等价关系：

$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，

$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

定理 1.3　$\lim u=A\Leftrightarrow u=A+\alpha$，其中 α 为无穷小.

4. 无穷大量(无穷大)　若对任意给定的常数 $G>0$，在变量 u 的变化过程中，总存在那么一个时刻，在该时期以后，恒有 $|u|>G$，则称变量 u 为此过程下的无穷大量. 记为 $\lim u=\infty$ 或 $u\to\infty$.　特别地，在变量 u 的变化过程中，若能变得保持正(负)值且为无穷大，则称 u 为正(负)无穷大. 此时仅需把 $|u|>G$ 改为 $u>G$（$u<-G$）. 并记为 $\lim u=+\infty$（$\lim u=-\infty$）. 无穷小与无穷大有如下关系：

(1)若 $\lim u=\infty$，则 $\lim\dfrac{1}{u}=0$；

(2)若 $\lim u=0$，且 $u\neq 0$，则 $\lim\dfrac{1}{u}=\infty$.

5. 极限的性质

(1)唯一性　若极限 $\lim u$ 存在，则极限值是唯一的.

(2)局部有界性　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域内有界.

(3)局部保号性　1)若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$（$A<0$），则在点 x_0 的某空心邻域内，恒有 $f(x)>0$（$f(x)<0$）. 2)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且在 x_0