LIGONG

高等学校理工科参考丛书

GAODENGXUEXIAOLIGONGKECANKAOCONG

吉米多维奇数学5000题〈附解答〉

第一卷

理工科参考丛书

吉米多维奇数学5000题

(附解答)

第一卷

米天林　许　康　何灿芝　陈　强
罗金云　　　　胡锡炎　　　　郭　忠　译

湖南科学技术出版社

湘新登字004号

高等学校理工科参考丛书

吉米多维奇数学5000题

（附解答）

第一卷

〔俄〕 B·A·波尔戈夫

译者 米天林 许 康 何灿芝 陈 强

罗金云 胡锡炎 郭 忠

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版发行

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1992年8月第1版第2次印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：19 字数：436,000

印数：29,201——32,200

ISBN 7—5357—1167—7

O·105 定价：9.90元

地科123—56

目　录

译者的话……………………………………………………（1）
第一卷序言……………………………………………………（3）
第一章　分析引论……………………………………………（5）
§1.　实数。集合。逻辑符号……………………………（5）
1.实数的概念（5）。2.集合及其运算（8）。3.上界和下界（13）。4.逻辑符号（15）。
§2.　实变量函数………………………………………（18）
1.函数的概念（18）。2.初等函数及其图形（24）。
§3.　实数数列的极限…………………………………（28）
1.数列的概念（28）。2.数列的极限（29）。
§4.　函数的极限。连续性。…………………………（32）
1.函数的极限（32）。2.无穷小和无穷大（37）。3.函数在一点的连续性．间断点的分类（40）。4.在集合上的连续性.一致连续性（43）。
§5.　复数…………………………………………………（45）
1.复数的代数运算（45）。2.多项式与代数方程（53）。3.复数列的极限（56）。
答案……………………………………………………………（59）
第二章　向量代数与解析几何………………………………（71）
§1.　向量代数……………………………………………（71）
1.向量的线性运算（71）。2.基与向量的坐标（74）。

3.点的笛卡儿直角坐标.解析几何的最简单问题（77）.
4.两向量的数量积（81）. 5.两向量的向量积（86）.
6.三向量的混合积（89）.

§2. 直线与平面…………………………………………（91）

1.平面上的直线（91）. 2.空间的平面和直线（97）.

§3. 平面曲线…………………………………………（105）

1.笛卡儿直角坐标系中的曲线方程（105）. 2.二次代数曲线(108). 3.曲线在极坐标系中的方程（118）. 4.曲线的参数方程（123）. 5.在数学及应用中常见的一些平面曲线(125).

§4. 空间曲面与曲线…………………………………（131）

1.笛卡儿直角坐标系中曲面与曲线的方程（131）. 2.二次代数曲面(134). 3.曲面按对称变换类型的分类(139)

答案…………………………………………………（145）

第三章 行列式和矩阵、线性方程组……………………（156）

§1. 行列式…………………………………………（156）

1.2阶和3阶行列式(156). 2.n阶行列式(160). 3.n阶行列式的基本计算方法（163）.

§2. 矩阵……………………………………………（169）

1.矩阵运算（169）. 2.逆矩阵（174）.

§3. 算术向量空间、矩阵的秩…………………………（179）

1.算术向量（179）. 2.矩阵的秩（182）.

§4. 线性方程组………………………………………（188）

1.克莱姆法则（188）. 2.解任意方程组（191）. 3.齐次方程组（197）. 4.若当——高斯逐次消去法（201）.

§5.* 线性代数的某些计算题…………………………（209）

1.矩阵计算（209）. 2.行列式的计算（212）. 3.线性方程组（215）.

答案…………………………………………（204）（219）

第四章　线性代数初步……………………………………(231)

§1.　线性向量空间和内积空间…………………………(231)

1.线性向量空间（231）.2.子空间和线性流形(241)．3.内积空间（243）.

§2.　线性算子…………………………………………(248)

1.线性算子代数(248)．2.线性算子的特征值与特征向量(255)．3.内积空间的线性算子(259)．4.化线性算子的矩阵为对角形（264）.

§3.　双线性型和二次型…………………………………(266)

1.线性型（266)．2.双线性型(267)．3.二次型（269).4.二阶曲线和曲面（273).

答案……………………………………………………………(278)

第五章　一元函数微分学…………………………………(290)

§1.　导数……………………………………………………(290)

1.导数的定义、显函数的微分法（290)．2.隐函数或参数方程给定的函数的微分法(300)．3.高阶导数（304).4.导数在几何、力学方面的应用（309).

§2.　微分……………………………………………………(313)

1.一阶微分（313)．2.高阶微分（316).

§3.　关于可微函数的定理、泰勒公式………………(317)

1.中值定理(317)．2.罗必塔-伯努利法则（319).3.泰勒公式(324).

§4.　函数性质的研究及作图……………………………(328)

1.函数的增减性、极值（328)．2.凸向．拐点（333).3.渐近线（336)．4.函数作图（337).

§5.　实变量的向量函数与复值函数……………………(342)

1.向量函数的概念（342)．2.向量函数的微分（344).3.空间曲线的切线与法平面（346)．4.向量函数的二阶导数（347)．5.空间曲线的微分特征（351)．6.实变

量的复值函数（357）。
§6.* 一元函数的数值方法……………………………（376）
1.方程的数值解（376）．2.函数插值（384）．3.数值微分法（393）．
答案……………………………………………（358）（397）
第六章　一元函数积分学……………………………（415）
§1.　计算不定积分的基本方法……………………（415）
1.原函数和不定积分（415）．2.换元积分法（418）．3.分部积分法（423）．
§2.　基本初等函数的积分法………………………（427）
1.含二次三项式的最简积分(427)。2.有理分式的积分(429)。3.三角函数与双曲函数的积分(434)。4.某些无理函数的积分（441)。
§3.　不定积分杂题…………………………………（444）
§4.　定积分及其计算方法…………………………（446）
1.定积分作为积分和的极限(446)。2.牛顿-莱布尼兹公式(448)。3.定积分的性质(451)。4.定积分的变量代换(454).5.定积分的分部积分法（456)。
§5.　广义积分………………………………………（458）
1.无穷区间上的积分（458)。2.无界函数的积分(460)。
§6.　定积分的几何应用……………………………（463）
1.平面图形的面积（463)。2.曲线的弧长（470)。3.旋转面的表面积（474)。4.立体的体积（477)。
§7.　定积分在力学与物理上的应用………………（481）
1.平面曲线的质量、重心和矩(481)。2.物理问题(484)。
§8.* 一元函数的数值积分法………………………（505）
答案　…………………………………………（490）（513）
FORTRAN-IV算法语言的简单介绍…………………（517）
第七章　多元函数微分学……………………………（528）

§1.　基本概念……………………………………………(528)

1.多元函数的概念(528)．2.函数的极限和连续性(531)．3.偏导数（534)．4.函数的全微分及其应用（539)．

§2.　复合函数和隐函数的微分法……………………(544)

1.一个或多个自变量的复合函数（544)．2.一元隐函数和多元隐函数（549)．3.隐函数组和含参数的函数（553)．4.微分表达式中的变量代换（557)

§3.　偏导数的应用……………………………………(563)

1.泰勒公式（563)．2.函数的极值（566)．3.条件极值（569)．4.函数的最大值和最小值（572)．5.偏导数的几何应用（575)．

§4.　近似值及其计算…………………………………(583)

1.绝对误差和相对误差（583)．2.近似数的运算（585)．

答案……………………………………………………(588)

译者的话

“四化”建设飞跃发展，新的技术革命迅速迫近，各种学科都在“数学化”，各行各业都要“电脑化”，高等教育正面临这场尖锐的挑战。

由于“数学化”，越来越多的专业需要开设高等数学课程，教材内容要新颖多样；

由于“电脑化”，大学生更须熟悉电子计算机，数学课程应在这方面多加指导。

这样，便对数学教科书提出了更高的要求，但是，能做到二者得兼的似不多见。

我们发现，吉米多维奇和叶菲莫夫主编的这本书（一九八一年初版），可算差强人意，便加迻译，以资借镜，并应急需。

大家知道，由吉米多维奇主编而在五十年代初及五十年代末相继出版的两本习题集（我国都有译本），曾获得很大成功，蜚誉国际数学教育界。这本书则是最近的成果，它几乎囊括了现行高等数学和工程数学的主要课题，在取材的广泛性和内容的新颖多样性方面，显然有新的发展。本书其他十一位合作者，以叶菲莫夫为首，多半是他的老搭档，都具有丰富的教学和著作经验，不少人写过出色的教材或参考书（有的还有中译本），因此，本书的作者阵容相当强大。

苏联的数学居于世界先进行列，教材内容与我国也相近，

读来并不陌生。本书按他们的教学大纲安排，学时较多，注意贯彻教学法原则，体例严谨，深浅适当，例题丰富，讲究启发。而近年来我国教本也有自己的特色，优点甚多，读者若博采两者之所长，当能相得益彰。由于本书既有理论概述又有解题示范，读者将它作为"复习手册"、"工科数学手册"乃至"解题指南"也可相宜，就看各人运用之妙了。

在电子计算机解题方面，本书简介了目前国外科技计算中使用最广的FORTRAN语言（这也是我国愈益广泛采用的一种高级程序设计语言），在一些章节编排了相应的例题与习题，解答过程出示较详，使读者容易掌握，成为本书一个新的特点。

习题答案及提示列于各章之后，请查目录中相应页码。

全书翻译分工是：陈强（第一、七、十三章），罗金云（第二、十一章），郭忠（第三、四、八章），许康（第五、十章），何灿芝（第六、十二章），米天林（第九章），胡锡炎（数值计算、附录）。

译稿承周叔子、吴茂贵同志认真校阅，吴茂贵还花费很多精力疏通全书文句，功不可没。在此谨向他们致以衷心的感谢。

由于时间紧、篇幅大，译者水平有限，未遑仔细推敲，疏漏之处恐所难免，敬希读者指正。

译者　1983.12

第一卷序言

编写一本包括高等院校工科数学课程全部篇章的《工科数学习题集》的想法是Б.П.吉米多维奇教授提出来的，但是由于他的过早逝世而使这项工作未能完成。现在的这本书是他一生思想的体现，编著者们都是在工科院校具有丰富教学经验的人员。

本书的总体结构由A.B.叶菲莫夫提出，反映了高等院校工科专业数学教学大纲的要求，是按苏联高等教育部教学法管理局1979年5月14日批准的510小时内容编排的（译者按：这个时数大概包括习题课等项在内）。在编著过程中，还参考和反映了莫斯科电子技术学院600—700小时数学课程的教学经验。

全书包含了除概率论及某些专门教程以外的工科高等数学课程全部篇章的习题和例题。此外，为了把中学教学大纲范围内的材料加以巩固，还安排了比中学学过的分析和向量代数那些基本内容深一些的复习题目。

本书的基本特点之一是在大多数章节里反复出现数值习题，在求解这些题目时需要用上电子计算机。

本书第一卷包括的是按传统在第一学年所学的内容。这里有向量代数（及初等解析几何），线性代数，一元函数及多元函数微分学，一元函数积分学。

上述内容分章叙述，章下面又分节、目，习题的编号以章

为单元并且按节区分。每章之后给出所有计算题的答案，有单星号的题目还有提示，而有双星号的题目则附解法。

本书各章节目有简单的引言，不仅包括必要的理论概述（定义、公式、定理），而且有大量分析得很详尽的例题。

附录《FORTRAN IV语言简介》是应编著者之请由A.M.杰列申柯副教授撰写的。

书稿曾经莫斯科工程物理学院、莫斯科钢铁与合金学院、莫斯科动力学院数学教研室讨论，提出了一系列宝贵的批评建议，有助于我们修改定稿。在此编著者们谨向各该教研室主任A..И.勃里列伯柯、B.A.特列诺金娜、A.И.博霍萨也娃教授以及参加讨论的教研室成员们致谢！

借此也向莫斯科电子技术学院高等数学教研室的л.B.拉宾柯、C.A.佛明诺依在本书准备付印中的帮助致以衷心的感谢！

第一章 分析引论

§1. 实数.集合.逻辑符号

1. **实数的概念**. 从中学课本中知道，任何非负实数x都可表为十进制的无限小数

$$[x].x_1x_2\cdots, \tag{1}$$

其中对任何$n\in N$, $x_n\in\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$, $[x]$是不超过x的最大整数，称为数x的整数部分。

对于循环小数，由于有下面的等式

$$[x].999\cdots=[x]+1,$$

$$[x].x_1x_2\cdots x_{n_0-1}999\cdots=[x].x_1x_2\cdots(x_{n_0-1}+1)$$

$$(n_0>1, x_{n_0-1}\neq 9),$$

故我们在今后的讨论中，将对于所有$n\geqslant n_0$(n_0是某个自然数)都满足$x_n=9$的那些小数除外。

实数x，当且仅当其小数式(1)为循环小数时，它才是有理数，即形如$\frac{m}{n}$这一类的数，m, $n\in Z$。

非负数

$$|x|=\begin{cases}x, & 当x\geqslant 0,\\ -x, & 当x<0\end{cases}$$

称为实数x的绝对值或模。

关于实数大小的比较规则以及它们的运算法则，在中学课本中都已经讲过了。

1.1. 证明数

$$0.1010010001\cdots1\underbrace{0\cdots0}_{n}1\cdots$$

是无理数。依次用一位、二位、三位十进制小数，分别表示这个数的不足近似值和过剩近似值。

1.2. 将下列各数表为正有理分数：

a) 1.(2)；b) 3.00(3)；B) 0.110(25)。

（译注：以上分别指循环小数$1.\dot{2}$，$3.00\dot{3}$，$0.110\dot{2}\dot{5}$）

1.3. 证明数lg5是无理数。

证 假定lg5为有理数，即

$$\lg 5=\frac{m}{n};\ m,\ n\in Z.$$

则 $10^{\frac{m}{n}}=5$，$10^{m}=5^{n}$，$2^{m}\cdot 5^{m}=5^{n}$.

但后一等式不可能成立：因为该式左边部分含有因子2，而右边部分却不含因子2，这与整数分解为质因子的唯一性相矛盾。因此，所作假定不真，故数lg5是无理数。▌

证明下列各数是无理数：

1.4. $\sqrt{3}$。　　**1.5.** $\sqrt[n]{p}$，p是质数，$n>1$。

1.6. $2+\sqrt{3}$。　　**1.7.** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$。

1.8. $\log_3 p$，p是质数。

1.9. $\frac{\pi}{2}+\pi n$，$n\in Z$，设已知π是无理数。

在题1.10—1.13中比较给定数的大小。

1.10. $\sqrt{2}-\sqrt{5}$和$\sqrt{3}-2$。　　(2)

解 假定不等式

$$\sqrt{2}-\sqrt{5}<\sqrt{3}-2 \qquad (2)$$

成立，则 $\sqrt{2}+2<\sqrt{5}+\sqrt{3}$，$6+4\sqrt{2}<8+2\sqrt{15}$，

$2\sqrt{2}<1+\sqrt{15}$，$8<16+2\sqrt{15}$。

因为后一不等式成立，又由于所用变换的等价性，故亦导致不等式（2）成立。∎

1.11. $\log_{1/2}\frac{1}{3}$和 $\log_{1/3}\frac{1}{2}$。

1.12. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lg\frac{1}{7}}$和$\left(\frac{1}{7}\right)^{\lg\frac{1}{5}}$

1.13. $\log_{\log_3 2}\frac{1}{2}$和1。

不用查表，证明下列数值不等式：

1.14. $\log_3 10+4\lg 3>4$。

1.15. $\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2$。

1.16. $\log_4 26>\log_6 17$。

1.17. 证明实数的模具有下列性质：

а) $|x|=\max\{x, -x\}$；

б) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$和$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$；

в) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$和$|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$

（三角形不等式）；

г) $\sqrt{x^2}=|x|$。

解方程：

1.18. $|3x-4|=\frac{1}{2}$。 **1.19.** $\sqrt{x^2}+x^3=0$。

1.20. $|-x^2+2x-3|=1$。 **1.21.** $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|=1$。

1.22. $\sqrt{(x-2)^2}=-x+2$.

解不等式：

1.23. $|x-2|\geqslant 1$.

1.24. $|x^2-7x+12|>x^2-7x+12$

1.25. $x^2+2\sqrt{(x+3)^2}-10\leqslant 0$.

1.26. $\dfrac{1}{|x-1|}<4-x$.

1.27. $\sqrt{(x+1)^2}\leqslant -x-1$.

2. 集合及其运算. 一些对象组成的全体叫做集合. 而这些对象叫做这个集合的元素.

记号$a\in A$表示对象a是集合A的元素（或a属于A）；否则记为$a\notin A$. 不含任何元素的集合叫做空集，记为$\varnothing$. 记号$A\subset B$（A含于B）是指，集合A的每一个元素都是集合B的元素；这时称A为B的子集. 如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称A与B相等（$A=B$）.

集合的表示有以下两种基本方式：

a）由直接列举它的所有元素a_1，a_2，…，a_n来表示集合A，即

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}.$$

б）集合A为某基本集合T中所有具有共同性质α的元素的全体. 这时表为

$$A=\{x\in T\,|\,\alpha(x)\},$$

其中记号$\alpha(x)$表示元素x具有性质α.

例1. 用列举元素法表示集合

$$A=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,(x-3)(x^2-1)=0\text{且}x\geqslant 0\}.$$

解 A是方程$(x-3)(x^2-1)=0$的所有非负整数根的集合. 因此，$A=\{1,\ 3\}$. ▮

集合

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}$$

叫做集合A与B的并。集合

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}$$

叫做集合A与B的交。集合

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{且}x\notin B\}$$

叫做集合A与B的差。

特别地，如果A是某个母集T的子集，则差$T\setminus A$叫做集合A（关于母集T）的余集，记为$\bar{A}$。

1.28. 指出下面两种写法中哪种正确：

а) $\{1, 2\}\in\{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$或$\{1, 2\}\subset\{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$；

б) $\{1, 2\}\in\{1, 2, \{1, 2\}\}$或$\{1, 2\}\subset\{1, 2, \{1, 2\}\}$。

在题1.29—1.34中，将给定集合用列举其所有的元素来表示。

1.29. $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^3-3x^2+2x=0\}$。

1.30. $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x+\frac{1}{x}\leqslant 2\text{且}x>0\}$。

1.31. $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x^2-3x-4\leqslant 0\}$。

1.32. $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid \frac{1}{4}\leqslant 2^x<5\}$。

1.33. $A=\{x\in\mathbf{N}\mid \log_{1/2}\frac{1}{x}<2\}$。

1.34. $A=\{x\in\mathbf{R}\mid \cos^2 2x=1\text{且}0<x\leqslant 2\pi\}$。

在坐标平面上表示下列集合：

1.35. $\{(x, y)\in\mathbf{R}^2\mid x+y-2=0\}$。

1.36. $\{(x, y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2-y^2>0\}$。

1.37. $\{(x, y)\in\mathbf{R}^2\mid (x^2-1)(y+2)=0\}$。