

■ 李玉琪/丁宝璠/王运生/主编

简明 数学 方法论



CONCISE METHODOLOGY
OF MATHEMATICS

科学技术文献出版社

简明数学 方法论

■ 主编/李玉琪/丁宝蟠/王运生 ■

科学技术文献出版社

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

数学方法论是研究数学的思想、方法和数学发现、发明与创新法则的学科。作为数学方法论的专著,本书对其研究对象、发展简史、发展机制以及各种数学基本思维方法、综合思维方法、创造性思维方法、数学思想方法进行了全面论述,并对化归原则、公理化方法、数学模型方法及数学科学的辩证性质、数学基础流派的观点等作了专题研究。本书立论科学、论述严谨,并注意密切联系数学教育的实际,可作为高等师范院校的教材,也可供广大数学教育工作者、数学教学研究人员、数学教师和数学爱好者参考。

图书在版编目(CIP)数据

简明数学方法论/李玉琪等主编. —北京:科学技术文献出版社,1994

ISBN 7-5023-2279-5

I. 简… II. 李… III. 数学方法—方法论 IV. O1-03

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 14748 号

科学技术文献出版社出版

(北京复兴路 15 号 邮政编码 100038)

山东高青印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

1994 年 12 月第 1 版 1994 年 12 月第 1 次印刷

850×1168 毫米 32 开本 11.5 印张 280 千字

科技新书目: 印数:1—3800 册

定价:8.95 元

前 言

随着数学科学和数学教育的蓬勃发展,数学方法论在数学研究和数学教育中的重要作用正日益展现出来,它的发展不仅受到了人们的广泛关注,而且我国高等师范院校已经普遍开设了有关的必修或选修课。然而,作为一门新兴学科,数学方法论的理论体系还处在不断的发展和完善中,许多问题还有待于进一步研究和探讨。为了适应数学与数学教育发展的新形势,我们编著了这本书,期望能对数学方法论学科的发展和深化数学教育改革起到一定的促进作用。

众所周知,数学方法论是研究数学的思想、方法和数学发现、发明与创新法则的学科,内容是十分丰富的。作为一本简明数学方法论,本书不准备对数学方法论的理论作全面论述,而拟在宏观与微观的结合上,对数学方法论这一学科的若干基本问题进行讨论。

本书第一章首先阐明数学方法论的学科性质、发展简史、发展机制,然后简要论述它在数学发展和数学教育中的作用;第二、三、四章论述了数学思维、各种数学基本思维方法、综合思维方法和创造性思维方法;第五章介绍了数学中的推理方法;第六章对数学中具有普遍意义的化归原则进行了讨论;在第七、八章中,论述了具有典型意义的公理化方法和数学模型方法;第九章则对数学思想方法进行了专题研究;在第十、十一章中,对近代

数学基础流派的观点、方法及数学科学的辩证性质进行了简要的讨论。

数学方法论是数学、方法学、思维学、哲学和数学史等多门科学的交叉学科。在编写中,我们用辩证唯物主义作指导,用丰富的数学史料阐明数学方法论的理论和观点,重在数学、方法学与思维学的结合上说明问题,力求构建数学方法论的科学体系。同时,注意反映国内外数学教育科研的新成果,密切联系数学研究与数学教学的实际,实现理论与实践的结合。在文字上,则力求言简意明、深入浅出、通俗易懂。

本书第一、二、三章由李玉琪编写;第四章由李玉琪、王运生编写;第五章由李玉琪、丁敦强、房景洲编写;第六章由丁宝璠、李玉琪编写;第七章由范永顺、丛树凡、秦春霞、吴传统编写;第八章由李玉琪、范永顺、朱淑华、辛玉忠编写;第九章由李玉琪、赵立宽、李平、金之明编写;第十章由王纯洁、李玉琪编写;第十一章由王幼军、李玉琪编写。此外,陈翠花、周淑英也参加了部分章节的撰稿。全书由李玉琪统一修改和定稿。

由于时间仓促、水平有限,书中缺点错误在所难免,恳请广大读者批评指正。

编 者

1994年6月于泉城

目 录

第一章 数学方法论概述	1
第一节 数学方法论的性质与对象.....	1
第二节 数学方法论的发展简史.....	9
第三节 数学方法的本质与发展机制	16
第四节 研究数学方法论的意义	21
第二章 数学基本思维方法	34
第一节 数学思维方法概述	34
第二节 逻辑思维方法	53
第三节 形象思维方法	67
第四节 灵感思维方法	81
第三章 数学综合思维方法	92
第一节 经验思维方法	92
第二节 理论思维方法.....	104
第四章 数学创造性思维方法	121
第一节 数学家关于数学创造的观点.....	121
第二节 数学创造性思维的条件与结构.....	127
第三节 数学创造性思维的方法.....	130
第五章 数学中的逻辑推理方法	142
第一节 必真推理方法.....	142
第二节 似真推理方法.....	158
第六章 化归原则	177
第一节 化归原则概述.....	177

第二节	化归策略.....	184
第七章	公理化方法.....	213
第一节	公理化方法的产生与发展.....	213
第二节	公理系统的基本要求.....	218
第三节	典型公理系统简介.....	221
第四节	公理化方法评述.....	230
第八章	数学模型方法.....	233
第一节	数学模型方法概述.....	233
第二节	数学模型方法典型例析.....	238
第三节	数学建模的方法步骤.....	242
第九章	数学思维方法.....	254
第一节	数形结合.....	254
第二节	分类讨论.....	263
第三节	构造方法.....	269
第四节	反例方法.....	277
第五节	数学思想方法的其它形式.....	287
第十章	数学的辩证性质.....	297
第一节	数学的客观基础.....	297
第二节	数学内容的辩证性质.....	306
第三节	数学思想方法的历史演进.....	317
第十一章	数学基础学派的观点简介.....	328
第一节	数学基础研究的起源.....	328
第二节	逻辑主义学派的观点.....	332
第三节	直觉主义学派的观点.....	339
第四节	形式主义学派的观点.....	346
主要参考文献		351

第一章 数学方法论概述

当前,人类历史正由工业时代向信息时代转变,世界性的新技术革命正在到来.在现代科学技术的飞速发展中,方法学正在迅速崛起,成为一门引人注目的新兴科学.

数学方法论是方法学学科群中一门独立的学科,它在数学研究和教学中的地位与作用日益受到人们的普遍重视.下面,将对数学方法论的学科性质、研究对象、发展简史、产生机制和研究数学方法论的意义进行讨论.

第一节 数学方法论的性质与对象

方法学是关于认识世界和改造世界的根本方法的科学.任何科学都有自己的研究方法,但任何一种具体的研究方法都不是万能的.不过,个别中包含着一一般,各种具体方法中包含着一一般方法,包含着思想与方法的一般原则.这种从一般方法上研究方法问题的学问,即关于一般方法的理论就是方法学,或称为方法论.

不同的世界观决定了不同的方法论.马克思主义哲学认为,方法的使命是引导思维沿着正确的途径去认识客观世界,只有体现事物发展客观规律的认识方法才是科学的、行之有效的方法.在科学发展的进程中,按照辩证唯物主义的认识论,人们逐

步总结出其中的固有规律和研究方法,这就是科学的方法论.数学方法论是科学方法论在教学中的具体体现,隶属于科学方法论的范畴.

一、数学方法论的学科性质

数学方法论是研究数学的发展规律、数学的思想、方法、原则、数学中的发现发明和创新法则的学科.

数学方法论有宏观和微观之分.把数学置于各门科学以至客观世界中来认识,重在数学发展的外部规律以及人才成长规律的研究,这是宏观的数学方法论.从数学的内在联系中讨论数学中的一般研究方法,即着眼于数学的思想、观念、数学研究的方法、数学发现发明和创新法则等内部规律的研究,则属于微观方法论的范畴.显然,要达到对数学本质及其规律的全面认识,需要宏观与微观方法论的密切结合.

为了认识数学方法论的学科性质,需要注意它同哲学、逻辑学、思维科学、数学史等相关学科的关系.

首先,哲学是世界观,也是认识论,马克思主义的世界观与认识论又是认识世界和改造世界的根本方法.因此,马克思主义哲学是世界观、认识论和方法论的统一,是最一般的方法论.数学方法论作为科学方法论的一个特殊领域,是科学认识规律在数学中的反映和总结,它的全部理论都离不开马克思主义哲学思想的指导.

其次,逻辑学源于数学,逻辑规律与逻辑方法作为重要的科学认识方法,在数学中具有特殊的地位,因而数学方法论的研究与逻辑学密切相关.

第三,数学方法实质上是数学思维活动的方法,是数学思维

活动的步骤、程序和格式,它体现了人的意识的能动作用,因而数学方法论的研究离不开思维科学的规律。

第四,数学方法是与数学同时产生的,数学方法的演变与数学科学的发展紧密相连。因此,探讨数学方法的产生与发展、分析数学家的思维特点与方式、研究数学人才成长的规律等等,都离不开对丰富的数学史料的分析。也只有在对数学史的研究中,才能充分揭示数学的发展规律,提炼出数学思想和方法的一般原则。所以数学史是数学方法论丰富的源泉和重要依据。

第五,对于数学方法论的研究,一方面要以丰富的数学知识为背景材料,另一方面要在对数学的纵向结构和横向联系的分析中揭示出蕴含的思想、方法、原理与模式,因而数学方法论要以数学科学作为基本素材。

通过以上分析不难看出,数学方法论是数学、哲学、逻辑学、思维科学、方法学和数学史等科学的交叉学科。它以广阔的数学史为背景,重在数学与方法学的结合上,利用哲学、逻辑学和思维科学的理论,探讨数学的精神、观念、思想、方法、规划和模式,从而揭示数学的本质和发展规律。因此,数学方法论有着特定的研究对象和丰富的内容,它的学科性质如图 1-1 所示。

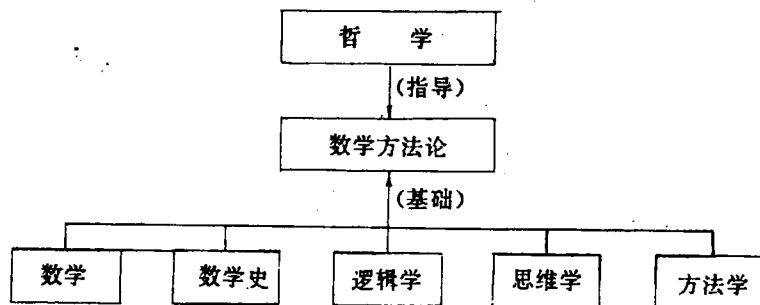


图 1-1 数学方法论的学科性质

二、数学方法论的研究对象

数学方法论的研究对象问题是一个重要的理论问题。一般认为,作为一门独立的学科,数学方法论的研究范围应当包括以下十个方面。

1. 数学的对象

按照法国数学家组织布尔巴基(Bourbaki)学派的观点,关于数学的对象问题,是“半哲学、半数学的棘手问题”。^①

恩格斯指出:“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系。”^②一百多年来,随着现代数学的蓬勃发展,人们对数学的对象问题不断进行探讨,提出了许多新的见解。例如,布尔巴基学派认为,数学“是研究抽象结构的科学”;苏联著名数学家亚力山大洛夫认为“数学是以纯粹形态的量的关系和形式作为自己的对象”;我国数学家关肇直先生认为“数学是研究现实世界中量的关系的科学”;我国数理逻辑学家胡世华先生提出,数学“是研究思想事物的抽象的科学。”还有人认为,“只要适当扩充空间形式和数量关系的概念,恩格斯的论述仍然适用于现代数学”;“数学是关于秩序的科学”;“数学是结构及其模型的科学”等等。固然关于数学对象的不同见解实质上是从不同的角度反映了现代数学的发展,各种观点都丰富了人们对数学的认识,但数学的对象究竟是什么?解决这样一个重大的理论问题对于深入认识数学的本质、促进数学的发展,无疑是完全必要的。

2. 数学的功能

^① 尼古拉·布尔巴基:《数学的建筑》,载于《数学史论文集》第18页,上海科学技术出版社,1985年第一版。

^② 恩格斯:《反杜林论》第35页,人民出版社,1970年第一版。

众所周知,数学有着广泛的应用,这来自于它的多重功能.数学的功能主要有四个方面:第一,科学功能,即数学作为一种科学语言和科学方法,它在自然科学、社会科学和哲学等领域中的方法论价值.第二,思维功能,即数学作为一种思维工具,它在日常思维活动中所起的作用,以及它对思维科学发展的意义等.第三,社会功能,即数学作为认识世界和改造世界的工具,它在社会生产、经济、文化和教育等方面的作用与地位等.第四,心理功能,即数学作为人类的一种宝贵文化,它在塑造人们健康完善的个性心理品质方面具有特殊的意义和作用.数学为什么具有多重功能?在各门科学的数学化趋势日益增强和数学的应用更加广泛的今天,解决这些问题具有重要的意义.

3. 数学科学的特点

亚力山大洛夫在《数学——它的内容、方法和意义》一书中把数学的特点归结为抽象性、精确性和应用的广泛性,也就是说数学具有高度的抽象性、严谨的逻辑性和广泛的适用性,这是人们的普遍认识.近年来,随着数学的发展,人们的认识不断深化,对数学的特点也有了不同的见解.例如,在西方数学家们谈论美是比较多的,他们称“数学是创造性的艺术”,美籍华裔数学家王浩在《从数学到哲学》一书中就明确提出了数学的第四个特征——幽美性,即数学美.还有人提出数学的确切性、严格性等等.根据数学研究的对象和科学发展的实际,就数学的特点进行深入探讨,对于充分发挥数学的功能显然具有积极的作用.

4. 数学内容的辩证性质

唯物辩证法指出,客观世界充满了矛盾.作为现实世界量的侧面的反映,数学中也必然充满矛盾、充满辩证法.深入研究数学内容的辩证性质,对于把握数学的本质和规律是十分有益的.

对于数学辩证性质的研究主要集中在两个方面:第一,关于数学中矛盾的研究,即数学中有哪些重要的矛盾?它们的形成与发展有什么规律?在数学研究与教学中有什么作用?第二,关于数学辩证内容的分析,包括数学内容辩证实质的分析、演进过程的分析等等.

5. 数学思想方法的历史演进

数学在其漫长的发展过程中,不仅建立了严密的知识体系,而且形成了一整套行之有效的思想和方法.总结这些思想方法形成和演进的规律,有助于深化对数学的认识并促进数学的发展.因此,对数学思想方法作历史的考察是数学方法论的重要内容.这里主要包括两个方面的问题:第一,从整体上研究数学思想方法的系统进化,例如从算术到代数、从综合几何到几何代数化、从常量数学到变量数学、从必然数学到或然数学、从明晰数学到模糊数学等几次数学思想方法重大转折的孕育、产生过程及其规律.第二,数学思想、方法的个体发育,主要是研究每个数学思想与方法的结构、功能和产生、演变、发展的规律,以及在数学发展中的地位、作用等等.

6. 数学的科学认识方法

数学作为人类对世界的一种认识,是客观世界在人脑中能动的反映,人们正是在对数学的研究中更加深刻地认识着客观世界.按照马克思主义的认识论,对数学科学的认识方法进行系统的研究和总结,对于加强数学研究和指导数学教学都有十分重要的意义.数学的科学认识方法主要包括分析、综合、比较、划分、抽象、概括等等.对各种认识方法的结构、规则和功能的 research 是数学方法论的重要内容.

7. 数学中的逻辑推理方法

数学是演绎科学,逻辑推理是最为经常的数学活动,因而掌握数学中归纳、类比、演绎等逻辑推理方法对于数学研究和数学学习都具有重要的价值.对于逻辑推理方法的研究,主要是探讨各种方法的原理、规则、结构和程序,并分析它们在数学发展及数学教学中的地位和作用.

⑧. 数学中的常用方法

数学是一门方法科学和工具科学,它源于科学、高于科学、又服务于科学.正因为如此,数学方法在数学中有着特殊重要的地位.在众多的数学方法中,作为数学研究、表述和问题解决的基本的、常用的方法主要是公理化方法、数学模型方法、构造方法、化归原则、映射方法等等.就这些方法的科学性、程序性、结构作用等方面进行研究,对于进一步发挥数学的功能是十分必要的.

9. 数学思维方法

数学活动的核心是数学思维活动,成功的思维活动离不开正确的思维方法,因此思维方法的重要性并不亚于思维的内容和形式.那么数学思维的结构、特征是什么?数学思维方法的一般模式是什么?从思维科学和方法学的结合上深入探讨数学思维及其方法的规律,对于促进数学研究、发展数学能力和改善人才素质无疑是十分重要的.这里,主要研究数学思维及其特征、数学基本思维方法、综合思维方法和数学创造性思维方法等等.

10. 数学方法论与数学教育

近年来,随着国内外数学教育的发展,数学方法论的地位及作用越来越受到人们的普遍重视,已成为我国数学教育学科群中一个十分重要的学科.进一步发挥数学方法论的教育功能,对于改善人才的知识结构和提高数学素养,对于大面积提高数学

教学质量显然具有积极意义. 对于数学方法论与数学教育的研究主要集中在两个方面: 第一, 数学方法论在数学教育中的作用, 即数学方法论在数学课程、数学教学、数学学习和人才成长中的作用; 第二, 加强数学方法论的学习、研究和普及的途径等.

三、数学方法的分类

对于方法, 人们可以根据不同的标准作出不同的划分. 按照抽象程度的不同, 可以把数学方法作如下分类

$$\sqrt{\text{数学方法}} \begin{cases} \text{具体方法(解题方法)} \\ \text{一般方法(逻辑方法)} \\ \text{数学思想方法(具体方法的概括)} \end{cases}$$

具体方法就是各种数学解题方法, 例如待定系数法、解析法、反证法、同一法等. 具体方法有着步骤明确、程序清楚、操作具体的特点, 但适用范围较小, 是最低层次的数学方法. 一般方法主要指各种逻辑方法, 它们适用于数学的各个分支学科, 具有较高的层次. 例如, 从整体到部分的分析法, 从部分到整体的综合法, 从一般到特殊的演绎法, 从特殊到一般的归纳法以及从特殊到特殊的类比法等等都是逻辑方法.

数学思想方法是一类具体数学方法的概括, 是贯穿于该类数学方法中的思维策略和调节原则, 它制约着数学活动中主观意识的指向, 对方法的取舍组合具有规范和调节作用. 例如, 数形结合的思想方法就是解析法、三角法、复数法、向量法、图解法等一类方法的概括, 其思维策略是把数与形这两个数学研究的基本对象联系起来作综合考察, 充分发挥代数与几何等学科理论各自的优势来解决问题, 把这一类方法的基本精神概括上升,

就形成了数形结合的思想方法. 其它如公理化方法、数学模型方法以及特殊化、一般化等等, 都属于数学思想方法的范畴.

最后, 还要指出下列两点: 第一, 数学方法论是一门新兴学科, 具有开放性的学科体系. 伴随着数学和其它科学的发展, 数学方法论的内容必然要得到不断调整和充实. 第二, 数学是一门历史悠久、分支繁多、层次鲜明的基础科学, 数学方法论相应地也有不同的层次. 不仅初等数学与高等数学的方法论有着不同的内容, 就是近代数学与现代数学也有着不同的方法论对象. 本书将以初等数学的方法论为重点, 在初等数学与高等数学的结合上对数学方法论的若干基本问题展开讨论.

第二节 数学方法论的发展简史

古往今来, 凡是对数学作出重大贡献的数学家、哲学家和思想家, 都十分关注数学的发展规律以及它的思想方法和研究方法, 因此数学方法与数学是同时产生并同步发展的. 一部数学的发展史, 就是数学方法论产生和演进的发展史.

一、数学方法论的萌芽

人们对于数学方法的研究, 在人类文化发展的早期就已经开始了. 截止到 17 世纪中叶, 是数学方法论的萌芽时期, 这一时期又可以划分为两个阶段.

1. 数学方法的积累

从远古时代到公元前 6 世纪, 是数学的萌芽时期, 也是数学方法发生和积累的时期. 在这个时期, 人类根据生活和生产的需要, 研究了土地丈量、天文历算、航海测量等许多实际问题. 在解

决这些问题的过程中,不仅形成了自然数、分数、几何图形等概念,创立了初步的算术与几何,而且总结和积累了一些数学研究方法。

例如,在算术中印度人创立了十进位记数法,采用了十位制记数系统。在几何中,人们依靠不充分的观察方法和简单的逻辑推理方法直观地把握图形的性质,形成了简单的测量方法和实验方法。俄语中几何一词“ГЕОМЕТРИЯ”的原意,就是土地测量的意思。在流传至今的古埃及纸草纸的文献和巴比伦的楔形文字中,就有算术运算的方法、几何计算的方法、典型算术题的解法和开平方的方法等。在我国战国时代的《考工记》一书中记载了尺、规、竿、绳一类简单量器的资料,在汉代的著作《周髀算经》中也记载了用“矩”测量的方法等等。

这个时期的数学知识是零乱的,数学还未形成独立的科学,人们对数学方法的研究也仅仅局限于解决实际问题中个别的、具体的方法。虽然如此,数学方法的发生和不断积累已经预示着数学方法论的萌芽。

2. 数学方法论的萌芽

从公元前6世纪到17世纪中叶,是常量数学时期。在这个时期,一方面数学的对象已经从实际事物的性质中抽象出来,并理想化为数与形等纯粹的数学研究对象;另一方面人们运用了逻辑方法(主要是演绎方法)把零乱的数学知识整理成了演绎体系。此外,数学引入了自己的符号系统,数学的表述、计算、推理和证明的方法都日趋完善。这样,数学就从解决实际问题发展成为独立的科学,并形成了算术、几何、代数、三角等分支。

这个时期人们对数学方法的总结和研究开始深入,出现了许多新的数学思想和数学方法。例如,古希腊的杰出思想家亚里