21st CENTURY
实用规划教材
21世纪全国高等院校实用规划教材

实用线性代数与概率统计

主　编　李继玲
主　审　宋　兵

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪全国高等院校实用规划教材

实用线性代数与概率统计

主　编　李继玲
主　审　宋　兵

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

“线性代数”与“概率统计”是高等院校理工科和经管类学生的必修课，该课程在培养学生的计算能力、处理随机数据的能力和抽象思维能力方面起着十分重要的作用. 本书将线性代数与概率统计的基本理论与数学实验、数学模型结合在一起，并联系实际应用，在介绍相关数学内容的基础上，介绍 Excel 的相关应用，并且在各章的数学实验中介绍 MATLAB 在相应基本计算中的实现方法，以及线性代数与概率统计的基本数学应用案例，为每一个学生在必修课中接受数学实验与数学建模的教育提供了可能. 本书搭建了培养学生的“兴趣、表达、演算、信息与处理、与人合作、自我提高与更新、解决问题”核心能力的平台. 本书可以作为高等院校经管类、工程类、信息技术类专业数学基础课的教学用书.

图书在版编目(CIP)数据

实用线性代数与概率统计/李继玲主编. —北京：北京大学出版社，2010.1

(21 世纪全国高等院校实用规划教材)

ISBN 978-7-301-16098-5

Ⅰ. 实… Ⅱ. 李… Ⅲ. ①线性代数—高等学校：技术学校—教材 ②概率论—高等学校：技术学校—教材 ③数理统计—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. O151.2 O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 224514 号

书　　名：实用线性代数与概率统计
著作责任者：李继玲　主编
责 任 编 辑：翟　源
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-16098-5/O • 0807
出 版 者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址：http://www.pup.cn　http://www.pup6.com
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62750667　出版部 62754962
电 子 邮 箱：pup_6@163.com
印 刷 者：河北滦县鑫华书刊印刷厂
发 行 者：北京大学出版社
经 销 者：新华书店
787 毫米×1092 毫米　16 开本　15 印张　345 千字
2010 年 1 月第 1 版　2010 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：25.00 元

前　言

随着高等教育的发展和改革的深入，高等教育发展中的深层次问题逐渐显现，其中最根本的就是人才培养的效果与市场需求之间存在差距. 人们逐渐认识到其最直接的原因就是专业和课程，因此，当前高等教育所面临的核心任务就是课程的改革，而课程模式的改革与创新则是这一核心任务的重点.

高等教育的人才培养目标为“培养能够在生产、建设、经营或技术服务第一线运用高新技术创造性地解决技术问题的高层次技术应用人才”.

根据上述人才培养目标，高等院校的数学课程在人才培养中应体现以下 3 个功能.

(1) 构建文化素质的功能：随着终生学习社会的形成，高校学生必须具备再学习的能力，显然，数学知识是形成再提高“平台”的重要构件之一.

(2) 基础能力支撑的功能：通过数学知识的学习，可以培养学生的各种基础能力，如观察想象能力、逻辑思维与创造思维能力、分析问题和解决问题的综合能力以及科学精神和科学态度等，这些基础能力的形成潜移默化地支撑着学生各种职业能力的形成.

(3) 提供专业工具的功能：数学作为学习其他专业理论和技术的工具，其应用极其广泛，这一点在职业教育中早已形成共识.

根据高等院校数学课程的功能，本书的编写力求体现以下 3 种关系.

(1) 职业方向的针对性与终生发展需求性的关系. 高等教育的一个显著特色就是教学目标的针对性强，要求各门课程必须体现某一职业岗位(群)对知识、能力的需求特点. 但是，高等教育对于每个学生都只能作为终身学习的一个环节，教学目标还必须考虑到学生今后的可持续发展. 为此，本书注意加强基础、突出应用、内容宽泛，增加了选择的弹性，以保证数学课程在人才培养中功能的整体实现.

(2) 教学内容的实用性与学科知识系统性的关系. 高等院校数学课必须为专业课程与实践能力提供必备的工具. 但是，在适当降低理论要求的同时，也应尽量兼顾数学知识间的系统性，否则专业应用、思维创新等诸多培养目标就难以达到.

(3) 基本理论与数学应用教学的不可相互替代的关系. 数学应用教学就是服务于专业需求的数学实验与数学建模教学，而任何数学应用必须在某一基本的数学理论基础上展开. 数学理论是培养学生的逻辑推理能力和科学精神的知识载体. 各种不同的教学流派会对基本理论和数学应用教学的先后顺序有不同的处理，但是数学应用和基本理论两方面的教学是永远不能相互替代的，这是在课程改革和教材建设中必须要清醒认识到的.

线性代数、概率论与数理统计是高等院校经管类和工科类各专业的重要基础课. 编者

根据教学改革的要义，编写了本书. 本书通过整合“线性代数”与“概率统计”的基础理论与数学实验、数学模型的内容，为传统数学理论教学搭建了应用的平台. 有了高性能的计算机，数学理论的逻辑关系可以在数学实验课中利用计算机的计算和图形功能得到直观的说明，使高等院校数学教学有了实现“重过程、重逻辑、重应用，以解决实际问题为出发点和归宿”这一教学目标的可能性. 这样的教学模式也使师生之间彻底改变了传统的告知与后知关系、控制与被控制关系，使学习者从被动地“接受”知识到主动地“做事”，从教学的边缘走到教学的中心，最终使数学知识成为学生做专业的工具.

本书由李继玲主编，宋兵主审. 第 1 章、第 5 章由查进道编写；第 2 章(除矩阵应用案例外)由孙永红编写；第 3 章、第 8 章以及第 4～8 章的数学实验，第 2 章的矩阵应用案例由李继玲编写；第 4 章的 § 4.1、§ 4.2 由熊建华编写；第 4 章的 § 4.3、§ 4.4 由马怀远编写；第 6 章以及第 1～3 章的数学实验由韩彦林编写；第 7 章由宋兵、韩彦林编写；全书的应用案例(除第 2 章应用案例外)由王娟编写. 本书在编写过程中得到了江苏经贸职业技术学院各级领导的大力支持，在此深表感谢.

本书可以作为高等院校“线性代数与概率统计”的教学用书，也可作为相应内容的数学实验用书.

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，诚恳欢迎广大师生和同行批评和指正.

编　者

2009 年 11 月

目　　录

第 1 章　行　列　式

行列式是线性代数中的基本数学工具. 本章主要介绍行列式及其基本性质和计算方法，最后作为行列式的应用介绍运用克莱姆(Cramer)法则求解线性方程组.

§ 1.1　行列式的定义

1.1.1　二阶行列式

考虑二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

其中 x_1、x_2 为未知量，a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22} 为未知量的系数，b_1、b_2 为常数项.

由加减消元法，得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1-1)有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-2}$$

可以发现 x_1、x_2 表达式中的分母都是 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，为了简便，用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为**二阶行列式**；a_{ij} $(i=1,2; j=1,2)$ 为行列式的**元素**；横排称为行列式的**行**；竖排称为行列式的**列**. 二阶行列式共有两行两列. 元素 a_{ij} 有两个下标 i、j，其中 i 表示该元素位于第 i 行，称为行标；j 表示该元素位于第 j 列，称为列标. 如 a_{21} 表示位于行列式第 2 行、第 1 列相交位置上的元素. 从左上角到右下角的对角线称为主对角线，从右上角到左下角的对角线称为次对角线. 由(1-3)式可以看出二阶行列式等于主对角线上两元素的乘积减去次对角线上两元素的乘积，这称为**对角线法则**，如图 1.1 所示. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的**展开式**.

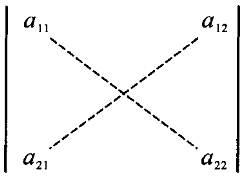

图 1.1

例 1　计算下列二阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

解　(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 3\times(-2) = 10$

(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

例 2　若 $\begin{vmatrix} k & 0 \\ -2 & k-1 \end{vmatrix} = 0$，求 k.

解　$\begin{vmatrix} k & 0 \\ -2 & k-1 \end{vmatrix} = k(k-1)$，由已知条件得 $k(k-1)=0$，解得 $k=0$ 或 $k=1$.

显然，方程组(1-2)中 x_1、x_2 的分子分别记成 $a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ 及 $a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$. 若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则当 $D \neq 0$ 时，方程组(1-1)有唯一解，并且这个解可表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} \end{cases} \tag{1-4}$$

称 D 为方程组(1-1)的系数行列式.

例 3　用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = -1 \end{cases}$$

解　由 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ 及 $D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -14$，$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7$

得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2，\quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 1$$

1.1.2　三阶行列式

与二阶行列式类似，三阶行列式也是从求解三元一次线性方程组的问题中引出的. 用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-5}$$

称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$为三阶行列式. 三阶行列式有 9 个元素，它们排成 3 行 3 列. 从左上角到右下角的对角线称为主对角线，从右上角到左下角的对角线称为次对角线. (1-5)式等号的右边称为三阶行列式的展开式，可根据图 1.2 来记忆. 图 1.2 中实线连接的 3 个元素的乘积前符号为正，虚线连接的 3 个元素的乘积前符号为负，这种三阶行列式的展开方法称为对角线法.

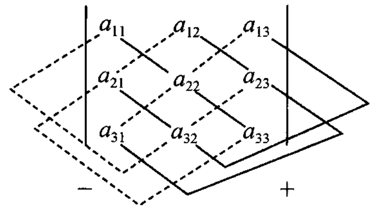

图 1.2

例 4　计算三阶行列式$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

解　$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 2\times4\times5+(-1)\times1\times2+2\times3\times(-6)-2\times4\times2-2\times1\times(-6)$$
$$-(-1)\times3\times5=13$$

设三元一次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-6}$$

其中 x_1、x_2、x_3 为未知量，a_{ij} $(i=1,2,3; j=1,2,3)$ 为未知量的系数，b_1、b_2、b_3 为常数项.

记方程组的系数行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$为 D，并记 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则

$$D_1=b_1a_{22}a_{33}+b_2a_{32}a_{13}+b_3a_{12}a_{23}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}-b_3a_{22}a_{13},$$
$$D_2=b_1a_{31}a_{23}+b_2a_{11}a_{33}+b_3a_{21}a_{13}-b_1a_{21}a_{33}-b_2a_{13}a_{31}-b_3a_{23}a_{11},$$
$$D_3=b_1a_{21}a_{32}+b_2a_{12}a_{31}+b_3a_{11}a_{22}-b_1a_{22}a_{31}-b_2a_{32}a_{11}-b_3a_{12}a_{21}.$$

容易验证当 $D\neq0$ 时，方程组(1-6)的唯一解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \\ x_3=\dfrac{D_3}{D} \end{cases} \tag{1-7}$$

例 5 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$，$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 18$，$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 9$，

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

从而得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{18}{9} = 2 \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{9}{9} = 1 \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{0}{9} = 0 \end{cases}$$

1.1.3 *n* 阶行列式

为了讨论 n 阶行列式，先给出 n 级排列和逆序的概念. 由 $i_1, i_2, i_3, \cdots, i_n$ 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 **n 级排列**. 如 312 是一个 3 级排列，561342 是一个 6 级排列. 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，按原来的次序取出一对数 $i_s i_t$，如果前面的数大于后面的数，即 $i_s > i_t$，称 i_s 与 i_t 构成一个**逆序**. 一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序总数，称为该排列的**逆序数**，记作 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例 6 计算下列排列的逆序数.

(1) 2431 　　　　(2) $n(n-1)(n-2)\cdots 321$

解 (1) 2431 的逆序有 21、43、41、31，所以 $N(2431) = 4$.

(2) $n(n-1)(n-2)\cdots 321$ 的逆序有 $n(n-1)$、$n(n-2)$、…、$n1$、$(n-1)(n-2)$、…、$(n-1)1$、…、32、31、21，所以 $N[n(n-1)(n-2)\cdots 321] = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**. 下面在分析二阶、三阶行列式展开式特点的基础上给出 n 阶行列式的定义.

由(1-3)式可以看出，二阶行列式展开式是取自不同行不同列的 2 个元素乘积的代数和. 当行标按从小到大的顺序排列时，该乘积都可以写成 $a_{1j_1} a_{2j_2}$ 的形式，其中 $j_1 j_2$ 为 2 级排列，共有 $A_2^2 = 2! = 2$ 个. 每个 2 级排列正好与展开式中的一项对应，并且，2 级 $j_1 j_2$ 排列的逆序数与乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2}$ 前面的符号有关. 若 $j_1 j_2$ 为偶排列，则乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2}$ 前面的符号为正，反之为负，从而(1-3)式可写成 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum\limits_{j_1 j_2} (-1)^{N(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$ 的形式，其中 $\sum\limits_{j_1 j_2}$ 表示对所有的 2 级排列求和.

类似地，由(1-5)式可以看出，三阶行列式展开式也是取自不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和. 当行标按从小到大的顺序排列时，各乘积都可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的形式，其中 $j_1j_2j_3$ 为 3 级排列，共有 $A_3^3=3!=6$ 个. 每个 3 级排列正好与展开式中的一项相对应，并且，3 级 $j_1j_2j_3$ 排列的逆序数与乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号有关. 若 $j_1j_2j_3$ 为偶排列，则乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为正，反之为负. 从而(1-5)式可写成 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $=\sum\limits_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的形式，其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有的 3 级排列求和.

定义 1.1　由 n 行 n 列共 n^2 个数 $a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 n 阶行列式，它等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，各项符号由 n 级排列 $j_1j_2j_3\cdots j_n$ 确定，偶排列带正号，奇排列带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-8}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和. (1-8)式等号的右边称为 **n 阶行列式的展开式**，共有 $A_n^n=n!$ 项.

n 阶行列式简记成 $D=\det(a_{ij})$ 或 $D=|a_{ij}|$，规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$. 当 $n>3$ 时，行列式称为高阶行列式，高阶行列式不能使用对角线法则进行计算.

例 7　乘积 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$ 是否为 4 阶行列式 D 的项？若是，确定前面的符号.

解　显然乘积 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$ 中的元素取自于 4 阶行列式中的不同行不同列，从而为 4 阶行列式 D 的项. 当行标按从小到大的顺序排列时，乘积 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}=a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$，列标排列的逆序数 $N(2413)=3$，所以乘积 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$ 前面的符号是负号.

主对角线下方的元素都是零的 n 阶行列式称为上三角(形)行列式，如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

主对角线上方的元素都是零的 n 阶行列式称为下三角(形)行列式，如 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. 除

主(次)对角线以外的元素都是零的 n 阶行列式称为对角行列式，如 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

例 8 求上三角行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 的值.

解 由(1-8)式可知，D 的展开式中共有 $4!=24$ 项，其中一些项为零，只有第 1 行取 $a_{11}=4$，第 2 行取 $a_{22}=-1$，第 3 行取 $a_{33}=3$，第 4 行取 $a_{44}=5$ 作乘积时才不为零，从而

$$D=(-1)^{N(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=4\times(-1)\times3\times5=-60.$$

一般来说，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1} \tag{1-9}$$

习 题 1.1

1．计算下列二阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin^2 x \\ -1 & \cos x \end{vmatrix}$

2．计算下列三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} a & x & z \\ 0 & b & y \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$

3. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 的值.

4. 解以下线性方程组.

(1) $\begin{cases} 3x+5y=21 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5x_1-4x_2=17 \\ 3x_1-7x_2=1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-3 \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-x_2+3x_3=8 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+x_3=1 \\ x_1-5x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2+x_3=-1 \end{cases}$

5. 若 $a_{31}a_{22}a_{5l}a_{1m}a_{43}$ 为5阶行列式中前面符号为正号的项，求 l、m.

6. 填空题.

(1) 若 $\begin{vmatrix} x^2 & 4 \\ 2 & x \end{vmatrix}=0$，则 $x=$__________.

(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}=$__________.

(3) 5阶行列式中，乘积 $a_{55}a_{33}a_{11}a_{44}a_{22}$ 前面的符号为__________.

(4) $n-1$ 阶行列式的展开式中共有__________项.

7. 选择题.

(1) 6阶行列式的展开式中前面符号为正号的有(   )项.

A. 60 B. 120 C. 360 D. 720

(2) 下列乘积中(   )前面添加负号是4阶行列式的项.

A. $a_{13}a_{24}a_{32}a_{11}$ B. $a_{12}a_{23}a_{34}a_{43}$

C. $a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ D. $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

(3) 若 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中等于零的元素个数大于 n^2-n，则 $|a_{ij}|=$(   ).

A. -1 B. 0 C. 1 D. 1或 -1

(4) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=$(   ).

A. 1 B. -1 C. $(-1)^{n-1}$ D. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

§1.2 行列式的性质

尽管在行列式的定义中给出了计算行列式的方法，但计算量大，因此需要通过研究行列式的性质来寻找更为有效的计算方法.

性质1 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=D$，其中 D^{T} 称为 D 的转置行列式.

如 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-5-16-6=-27$，$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}=-5-16-6=-27$.

性质2 (1) 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D_1=-D$，其中 $1\leqslant s<t\leqslant n$.

(2) 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D_1=-D$，其中 $1\leqslant s<t\leqslant n$.

如 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-4$.

由性质2可知，若对换行列式中的任意两行(列)，则行列式的符号改变.

推论 若行列式中某两行(列)的对应元素相同，则该行列式的值为零.

证明 因为对调此两行(列)后，D 的形式不变，所以 $D=D$ 且 $D=-D$，从而 $D=0$.

性质3 (1) 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D_1=kD$，其中

$1 \leqslant s \leqslant n$，$k$ 为常数.

(2) 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $D_1=kD$，其中 $1 \leqslant s \leqslant n$，$k$ 为常数.

性质 3 表明，如果行列式某行(列)的所有元素有公因子，则此公因子可以提到行列式的外面.

推论　如果行列式 D 的某两行(列)的对应元素成比例，则 $D=0$.

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-3\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=(-3)\times 0=0$.

性质 4　(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，其中 $1 \leqslant s \leqslant n$.

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s}+b_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s}+b_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns}+b_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，其中 $1 \leqslant s \leqslant n$.

性质 4 表明，如果行列式某行(列)的每个元素都可以写成两个数的和，则此行列式可写成两个行列式之和的形式.

性质 5　(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+ka_{t1} & a_{s2}+ka_{t2} & \cdots & a_{sn}+ka_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，其中 $1 \leqslant s,t \leqslant n$，$s \neq t$，$k$ 为常数.

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s}+ka_{1t} & \cdots & a_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s}+ka_{2t} & \cdots & a_{2t} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns}+ka_{nt} & \cdots & a_{nt} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，其中 $1 \leqslant s,t \leqslant n$，