

普通高等教育“十一五”规划教材

高等数学

主编◎侯兰茹

高等数学

主 编	侯兰茹	徐秀艳	
副主编	王旭然	张 敏	秦发金
编 委	王旭然	张 敏	侯兰茹
	徐秀艳	段现伟	秦发金

 首都经济贸易大学出版社

· 北 京 ·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/侯兰茹主编. —北京:首都经济贸易大学出版社, 2009. 7

ISBN 978-7-5638-1690-3

I. 高… II. 侯… III. 高等数学—高等学校—教材
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 088815 号

高等数学

侯兰茹 主编

出版发行 首都经济贸易大学出版社

地 址 北京朝阳区红庙(邮编 100026)

电 话 (010)65976483 65065761 65071505(传真)

网 址 <http://www.sjmcb.com>

E - mail publish@cueb.edu.cn

经 销 全国新华书店

照 排 北京华盛文化公司录制部

印 刷 北京通州华龙印刷厂

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16

字 数 307 千字

印 张 21.25

版 次 2009 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5638-1690-3/O · 30

定 价 34.80 元

图书印装若有质量问题,本社负责调换

版权所有 侵权必究

前言

人类的文明进步和社会发展,无时无刻不受到数学的恩惠和影响,数学科学的应用和发展牢固地奠定了它作为整个科学技术乃至许多人文学科的基础的地位。21 世纪,随着科学技术的突飞猛进和知识经济的迅速发展,世界正发生深刻变化,国际竞争日趋激烈,高等教育正面临空前的发展机遇与巨大挑战,肩负着为国家现代化建设培养高素质、高层次创造性人才的重任,是我国增强综合国力、增强国际竞争力的重要支撑。

为了提高学生的整体素质和教学的整体水平,必须加强教材建设,更新教学内容,把创新能力和创新精神的培养放到突出位置上,建立适应新的教学和科研要求的教学用书。考虑到高职高专教学的特点,本书根据教育部制定的《高等教育高等数学课程基本要求》与课程改革精神,以“掌握概念、强化应用、培养能力”为重点,以“应用为目的,以必需、够用为度”的原则编写,可作为高等院校各专业通用的高等数学教材。本书在编写过程中,注重介绍数学的方法和应用,注重培养学生的数学思维能力,注重提高学生的数学素质和应用能力,体现出数学既是一种工具,同时也是一种文化的思想。本书基本概念和原理的讲解通俗易懂,同时又兼顾数学的科学性和严谨性,对数学的基本知识和应用叙述得准确清晰。本书每节后附有练习题、思考提高题,围绕本节知识内容进行学习和训练;每章后附有精心设计的复习题,供学有余力的学生进一步提高数学水平使用。各章节所附习题均有参考答案。

本书共包括:函数与极限、导数与微分、导数应用、不定积分、定积分与定积分应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及其应用、二重积分、无穷级数、微分方程等内容。每一章都有精心设计的复习题。同时,根据每一章的内容还备有配套题解,以便学生参考使用。

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请专家读者批评指正。

2009 年 6 月

目 录

第 1 章 函数与极限	(1)
§ 1-1 函数	(1)
§ 1-2 函数的极限	(14)
§ 1-3 无穷小量与无穷大量	(18)
§ 1-4 极限运算法则与极限计算	(21)
§ 1-5 函数的连续性	(27)
§ 1-6 闭区间上连续函数的性质	(32)
第 2 章 导数与微分	(35)
§ 2-1 导数及其基本概念	(35)
§ 2-2 函数的和、差、积、商求导法则	(42)
§ 2-3 复合函数求导法则和反函数求导法则	(45)
§ 2-4 高阶导数	(49)
§ 2-5 隐函数的导数与参数方程所确定的函数的导数	(52)
§ 2-6 导数应用问题	(55)
§ 2-7 函数的微分	(56)
§ 2-8 微分在近似计算中的应用	(60)
第 3 章 导数应用	(63)
§ 3-1 罗尔定理与微分中值定理	(63)
§ 3-2 洛必达法则	(66)
§ 3-3 函数单调性判别法	(70)
§ 3-4 曲线的凹凸和拐点	(73)
§ 3-5 函数极值及其求法	(76)
§ 3-6 闭区间上连续函数的最大值和最小值	(80)
第 4 章 不定积分	(86)
§ 4-1 不定积分的概念与性质	(86)
§ 4-2 不定积分的直接积分法	(89)
§ 4-3 换元积分法	(92)
§ 4-4 分部积分法	(99)
第 5 章 定积分与定积分应用	(107)
§ 5-1 定积分的概念与性质	(107)

§ 5-2	积分上限函数与微积分基本定理	(113)
§ 5-3	定积分换元积分法	(117)
§ 5-4	定积分分部积分法	(119)
§ 5-5	广义积分	(121)
§ 5-6	平面图形面积计算	(123)
§ 5-7	旋转体体积计算	(130)
第 6 章	空间解析几何与向量代数	(137)
§ 6-1	空间直角坐标系	(137)
§ 6-2	向量的加减法与向量的数乘	(141)
§ 6-3	向量的坐标	(145)
§ 6-4	向量的数量积和向量积	(150)
§ 6-5	曲面及其方程	(153)
§ 6-6	空间曲线及其方程	(158)
§ 6-7	平面及其方程	(162)
§ 6-8	空间直线及其方程	(166)
§ 6-9	二次曲面	(172)
第 7 章	多元函数微分学及其应用	(176)
§ 7-1	多元函数及其极限	(176)
§ 7-2	偏导数	(179)
§ 7-3	全微分	(182)
§ 7-4	多元复合函数求导法则	(185)
§ 7-5	隐函数求导公式	(188)
§ 7-6	多元函数极值及其求法	(189)
第 8 章	二重积分	(195)
§ 8-1	二重积分的概念与性质	(195)
§ 8-2	二重积分计算(一)	(198)
§ 8-3	二重积分计算(二)	(202)
第 9 章	无穷级数	(207)
§ 9-1	泰勒级数	(207)
§ 9-2	傅里叶级数	(209)
第 10 章	微分方程	(214)
§ 10-1	微分方程的基本概念与可分离变量的微分方程解法	(214)
§ 10-2	一阶线性微分方程	(217)
§ 10-3	二阶常系数齐次线性微分方程	(221)
配套习题解答		(225)



函数与极限

高等数学研究的对象是函数,主要是初等函数,研究的工具是极限.本章我们将在对函数概念进行复习和补充的基础上介绍函数极限的概念,求极限的方法以及函数的连续性.

§ 1-1 函 数

一、函数概念

1. 变量、区间与邻域

在研究某些自然现象或技术问题,会遇到各种不同的量,其中有的量在过程中保持不变,即取一定数值,我们把它称作常量,例如圆周率 π ,某件物体的长度等,它们都是常量;而另一些量则有变化,即可取不同数值,我们把它称作变量,例如一天中的气温,生产过程中的产量都是在不断变化的,它们都是变量.

需要指出的是,一个量是常量还是变量不是绝对的,要根据具体情况作出分析.例如,就小范围来讲,重力加速度可以看作常量,但就广大地区来说,重力加速度就是变量.另外,常量可看作变量的特殊情形.

常量习惯用字母 a, b, c, d 等表示;变量习惯用 x, y, z, u, v, w 等表示.

一个变量所能取的数值的集合叫作这个变量的变域,在高等数学中常用区间表示变域.

设 a 和 b 都是实数,且 $a < b$. 数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间,记作 (a, b) ; 数集 $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间,记作 $[a, b]$; 数集 $\{x \mid a \leq x < b\}, \{x \mid a < x \leq b\}$ 称为半开区间,分别记作 $[a, b), (a, b]$, 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}, [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

上述三类区间都称为有限区间,点 a 称为左端点,点 b 称为右端点,统称为端点,它们之间的距离 $b - a$ 称为区间的长度.

除上述有限区间外,还有无限区间. 引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可用类似的记号表示无限区间. 例如:

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}, (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}, [a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}.$$



上述区间可分别在数轴上表示,如图 1-1-1 所示.

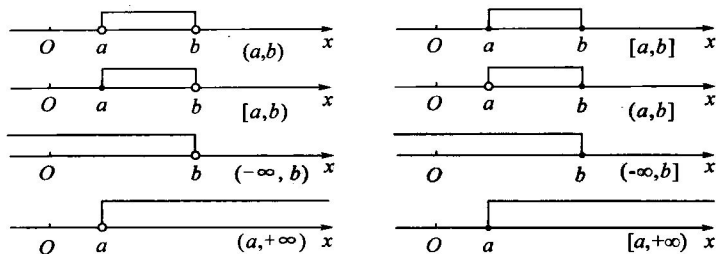


图 1-1-1

实数集 R 也可用区间记号表示,即

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in R\},$$

它也是无限区间.

以后在不需要指明所讨论区间的开闭,以及是有限区间还是无限区间的场合,为了方便起见,我们就称其为“区间”,且常用 I 表示.

区间是表示整体情形的点集,而局部情形的点集则用邻域来表示.

设 δ 是任一正数, a 为一已知点,则称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = (a-\delta, a+\delta).$$

点 a 称为这邻域的中心, δ 称为这邻域的半径.

显然 $U(a, \delta)$ 表示:与点 a 距离小于 δ 的点 x 的全体.如图 1-1-2 所示.

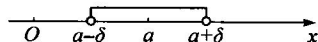


图 1-1-2

如果把点 a 的 δ 邻域的中心 a 去掉,所得到的集合称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, 即

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta).$$

点 a 的去心 δ 邻域如图 1-1-3 所示.

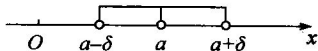


图 1-1-3

2. 函数的定义及表示法

在自然现象或生产过程中,同时出现的某些变量,往往存在着相互依赖、相互制约的关系,这种关系在数学上称为函数关系.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量,若当变量 x 在非空数集 D 内任取一数值时,变量 y 依照某一规则 f 总有一个确定的数值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记作 $y = f(x)$.

这里 x 称为自变量, y 称为因变量或函数,集合 D 称为函数的定义域,相应的 y 值的集合称为函数的值域, f 是函数符号,表示 y 与 x 的对应规则,有时函数符号也可用其他字母来表

示,如 $y = g(x)$ 或 $y = \varphi(x)$ 等.

函数的表示法通常有三种:公式法、表格法和图形法.

(1) 以数学式子表示函数的方法叫公式法,如 $y = x^2$, $y = \cos x$, 公式法的优点是便于理论推导和计算.

(2) 以表格形式表示函数的方法叫表格法,它是将自变量的值与对应的函数值列为表格,如三角函数表、对数表等,表格法的优点是所求的函数值容易查得.

(3) 以图形表示函数的方法叫图形法或图像法,这种方法在工程技术上应用很普遍,其优点是直观形象,可看到函数的变化趋势.

3. 分段函数

在实际应用中经常会遇到一类函数,在定义域的不同区间用不同的式子来表达,这类函数称为分段函数.例如,

$$(1) \text{ 绝对值函数 } y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 符号函数 } y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(3) 取整函数 $y = [x] = n$ (当 $n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$). 根据取整函数的定义可以看出,记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,例如 $[4.8] = 4$, $[0.6] = 0$, $[-7.3] = -8$, $[-5] = -5$ 等.

上述三个函数的图像如图 1-1-4 所示.

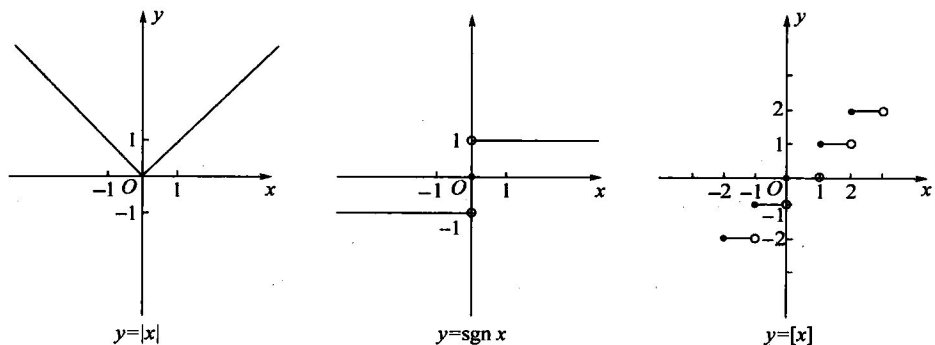


图 1-1-4

对于分段函数我们要能够正确求其定义域及自变量为 x_0 时对应的函数值,下面举例说明.

例 1 填空:分段函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & -2 \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 3-x, & 0 < x < 3, \end{cases}$ 的定义域为 $[-2, 3)$.

这也即是说分段函数的定义域为各段定义域的并集.



例2 设有分段函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 1, \\ x, & 1 \leq x < 2, \\ x^2 - 6x + \frac{19}{2}, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$ 求解:

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$;

(2) $f(1)$;

(3) $f(3)$;

(4) $f(4)$.

解 (1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

(2) $f(1) = 1$;

(3) $f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + \frac{19}{2} = \frac{1}{2}$;

(4) $f(4) = 4^2 - 6 \times 4 + \frac{19}{2} = \frac{3}{2}$.

4. 反函数

定义 1.2 设 $y = f(x)$ 是 x 的函数, 其值域为 R , 如果对于 R 中的每一个 y 值, 都有一个确定的且满足 $y = f(x)$ 的 x 值与之对应, 则得到一个定义在 R 上的以 y 为自变量, x 为因变量的新函数, 我们称之为 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$, 并称 $y = f(x)$ 为直接函数.

显然, 由定义可知, 单值函数一定有反函数. 习惯上, 我们总是用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 所以通常把 $x = f^{-1}(y)$ 改写为 $y = f^{-1}(x)$.

从上面的定义容易得出, 求反函数的过程可分为两步: 第一步, 从 $y = f(x)$ 中解出 $x = f^{-1}(y)$; 第二步交换字母 x 和 y .

例 3 求 $y = 2^{x-1}$ 的反函数.

解 由 $y = 2^{x-1}$ 解得 $x = 1 + \log_2 y$, 然后交换 x 和 y , 得 $y = 1 + \log_2 x$, 即 $y = 1 + \log_2 x$ 是 $y = 2^{x-1}$ 的反函数.

可以证明, 函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

二、函数的几种特性

1. 单调性

定义 1.3 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的, 区间 I 称为函数 $y = f(x)$ 的一个单调增加区间. 如果对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的, 区间 I 称为函数 $y = f(x)$ 的一个单调减少区间. 单调增加和单调减少函数统称为单调函数.

单调增加函数的图形沿 x 轴正向逐渐上升, 单调减少函数的图形沿 x 轴正向逐渐下降, 如图 1-1-5 所示.

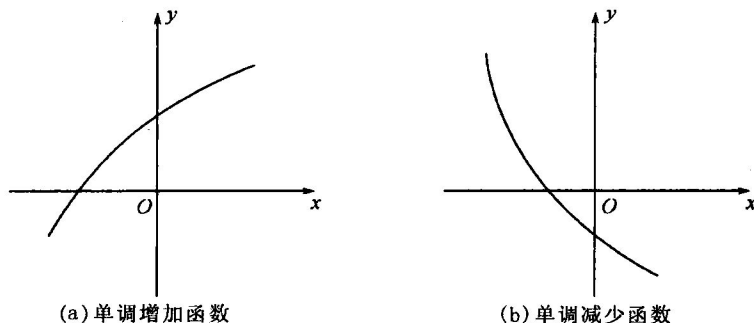


图 1-1-5

例如, 函数 $f(x) = x^2 + 1$ 在区间 $[0, +\infty)$ 是单调增加的; 在区间 $(-\infty, 0]$ 是单调减少的. 又如, 函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

2. 奇偶性

定义 1.4 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则必有一 $x \in D$), 如果对任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 为奇函数; 如果对任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 为偶函数.

奇函数的图形关于原点对称, 偶函数的图形关于 y 轴对称, 如图 1-1-6 所示.

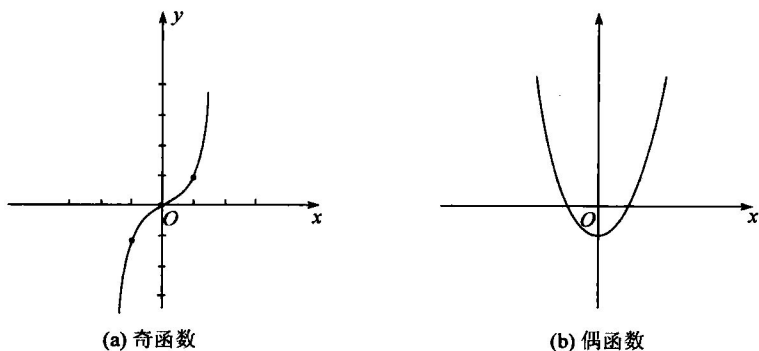


图 1-1-6

例如, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = x \cos x$ 等都为奇函数; $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = \sqrt{1-x^2}$ 等都为偶函数.

经常会遇到一些常见函数及其奇偶性的判定, 现将常见奇 (偶) 函数及其运算性质归纳如下:

奇函数: $\sin x, \arcsin x, \tan x, \arctan x, \frac{1}{x}, x^{2n+1} (n \in \mathbb{N}), \dots$

偶函数: $\cos x, |x|, x^{2n} (n \in \mathbb{N}), e^{|x|}, e^{x^2}, \dots$

奇 (偶) 函数的运算性质:

- (1) 奇函数的代数和仍是奇函数, 偶函数的代数和仍是偶函数.
- (2) 奇数个奇函数的乘积是奇函数, 偶数个奇函数的乘积是偶函数.
- (3) 偶函数的乘积仍是偶函数.
- (4) 奇函数与偶函数的乘积是奇函数.



(5) 奇函数与奇函数的复合是奇函数, 奇函数与偶函数的复合是偶函数, 偶函数与偶函数的复合是偶函数.

例 4 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y = x^3 + \tan x$;

(2) $y = x \sin x$;

(3) $y = x^3 \tan x \cdot e^{x^2}$;

(4) $y = \sin(\sin x)$;

(5) $y = \cos(\sin x)$;

(6) $y = \cos^2 x$.

解 根据常见奇(偶)函数及其运算性质可知, (1), (4) 为奇函数, (2), (3), (5), (6) 为偶函数.

3. 周期性

定义 1.5 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的实数 T , 使得对于任意的 $x \in D$, 都有 $(x \pm T) \in D$, 且 $f(x + T) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为周期函数, T 称为它的周期. 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如, 函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数, $y = \tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

常见周期函数包括三角函数及以三角函数为中间变量的复合函数.

(1) 三角函数:

① $y = \sin x, y = \cos x, T = 2\pi$.

② $y = \tan x, y = \cot x, y = |\sin x|, y = |\cos x|, T = \pi$.

③ $y = A \sin(\omega x + \varphi), y = A \cos(\omega x + \varphi), T = \frac{2\pi}{|\omega|} (A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}, \text{且 } A \cdot \omega \neq 0)$.

④ $y = \tan(\omega x + \varphi), y = \cot(\omega x + \varphi), T = \frac{\pi}{|\omega|} (\omega, \varphi \in \mathbb{R}, \text{且 } \omega \neq 0)$.

(2) 以三角函数为中间变量的复合函数, 例如, $y = e^{\sin x}, y = \cos^3 x$ 等. 复合函数概念见本节三、2.

周期函数的运算性质主要有以下几个:

① 若函数 $f(x)$ 的周期为 T , 则函数 $f(ax + b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|} (a, b \in \mathbb{R}, \text{且 } a \neq 0)$.

② 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的周期都为 T , 则函数 $f(x) \pm g(x)$ 的周期也为 T .

③ 若函数 $f(x), g(x)$ 的周期分别为 T_1, T_2 , 且 $T_1 \neq T_2$, 则函数 $f(x) \pm g(x)$ 的周期是 T_1 与 T_2 的最小公倍数(整倍数).

例 5 判断下列函数的周期:

(1) $y = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$;

(2) $y = \sin x - \cos x$;



$$(3) y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right).$$

解 由常见周期函数的周期及周期函数的运算性质可知:

$$(1) y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ 的周期 } T = \frac{2\pi}{3};$$

$$(2) y = \sin x - \cos x \text{ 的周期 } T = 2\pi;$$

$$(3) y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ 的周期 } T = 3\pi.$$

4. 有界性

定义 1.6 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正常数 M , 使得对于任意的 $x \in D$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上有界. 如果不存在这样的正常数 M , 即对任意的正常数 M , 都存在某个点 $x_0 \in D$, 使得 $|f(x_0)| > M$, 则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上无界.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 因为对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $|\sin x| \leq 1$.

又如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 因为对任意的正常数 M , 总存在点 $x_0 = \frac{1}{M+1} \in$

$$(0, 1), \text{ 使得 } |f(x_0)| = \left| \frac{1}{\frac{1}{M+1}} \right| = M+1 > M.$$

三、初等函数

1. 基本初等函数

在大量的函数关系中, 有几种函数是最常见的, 最基本的. 它们是常值函数, 幂函数, 指数函数, 对数函数, 三角函数, 反三角函数. 这几类函数称为基本初等函数. 下面我们分别介绍它们的定义、图像、性质.

(1) 常值函数.

① 定义: $y = c$ (c 为任意常数).

② 图像: 如图 1-1-7 所示, 由于常值函数 $y = c$ 在定义域内每一点处所对应的函数值都相等, 所以其图像是一条平行于 x 轴且截距为 c 的直线.

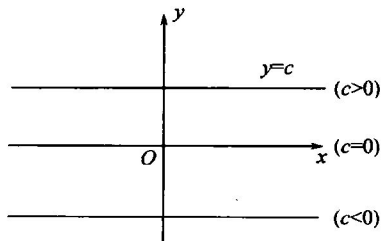


图 1-1-7

(2) 幂函数.

① 定义: $y = x^\mu$ (μ 为任意实数).

② 图像: 过点 $(1, 1)$. 例如, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$ 都是幂函数, 它们的定义域分别是



$(-\infty, +\infty), (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), [0, +\infty)$, 这即是说幂函数的定义域与 μ 有关, 但不论 μ 取何值, $y = x^\mu$ 在 $(0, +\infty)$ 内总有定义, 所以幂函数 $y = x^\mu$ 的公共定义域为 $(0, +\infty)$.

幂函数的定义域及图像形状都与 μ 有关, 所以对于幂函数的性质在这里我们不做共性分析, 遇到具体的问题具体分析.

(3) 指数函数.

① 定义: $y = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$.

② 图像: 如图 1-1-8 所示.

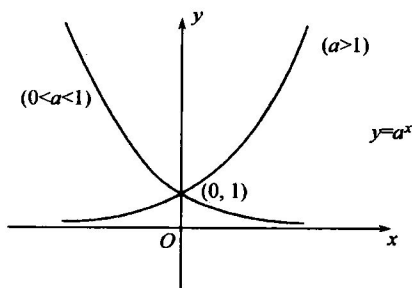


图 1-1-8

③ 性质.

定义域: $(-\infty, +\infty)$.

值域: $(0, +\infty)$.

单调性: 当 $0 < a < 1$ 时, $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调减少; 当 $a > 1$ 时, $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加.

奇偶性: 非奇非偶函数.

周期性: 非周期函数.

有界性: 无界函数.

(4) 对数函数.

① 定义: $y = \log_a x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$.

② 图像: 如图 1-1-9 所示.

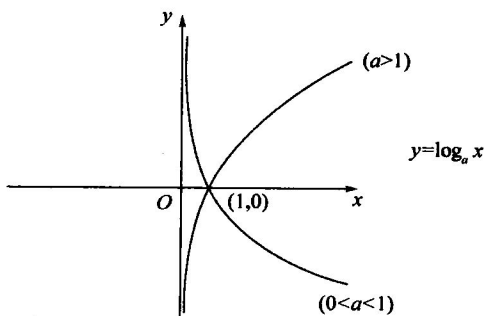


图 1-1-9

③ 性质.

定义域: $(0, +\infty)$.

值域: $(-\infty, +\infty)$.

单调性: 当 $0 < a < 1$ 时, $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调减少; 当 $a > 1$ 时, $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 单调增加.

奇偶性: 非奇非偶函数.

周期性: 非周期函数.

有界性: 无界函数.

(5) 三角函数.

① 正弦函数.

(i) 定义: $y = \sin x$.

(ii) 图像: 如图 1-1-10 所示.

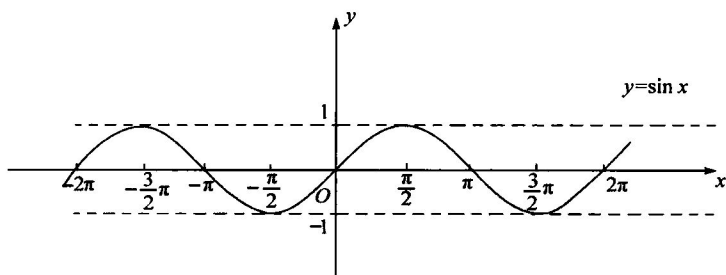


图 1-1-10

(iii) 性质.

定义域: $(-\infty, +\infty)$.

值域: $[-1, 1]$.

单调性: $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ 上单调增加; 在 $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ 上单

调减少, $k \in \mathbb{Z}$.

奇偶性: 奇函数.

周期性: 周期函数, $T = 2\pi$.

有界性: 有界函数.

② 余弦函数.

(i) 定义: $y = \cos x$.

(ii) 图像: 如图 1-1-11 所示.

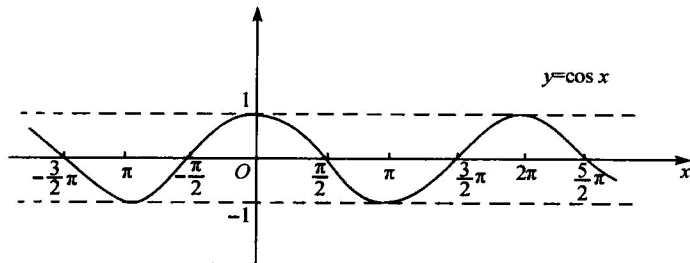


图 1-1-11



(iii) 性质.

定义域: $(-\infty, +\infty)$.

值域: $[-1, 1]$.

单调性: $y = \cos x$ 在 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 上单调增加; 在 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 上单调减少, $k \in \mathbb{Z}$.

奇偶性: 偶函数.

周期性: 周期函数, $T = 2\pi$.

有界性: 有界函数.

③ 正切函数.

(i) 定义: $y = \tan x$.

(ii) 图像: 如图 1-1-12 所示.

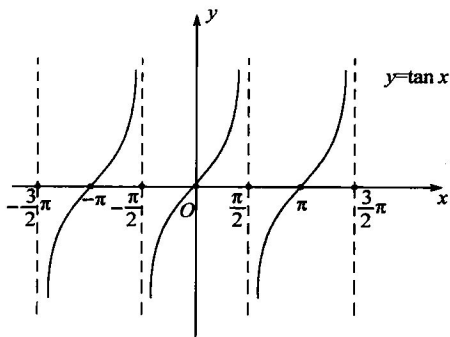


图 1-1-12

(iii) 性质.

定义域: $\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

值域: $(-\infty, +\infty)$.

单调性: $y = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ 内单调增加, $k \in \mathbb{Z}$.

奇偶性: 奇函数.

周期性: 周期函数, $T = \pi$.

有界性: 无界函数.

④ 余切函数.

(i) 定义: $y = \cot x$.

(ii) 图像: 如图 1-1-13 所示.

(iii) 性质.

定义域: $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

值域: $(-\infty, +\infty)$.

单调性: $y = \cot x$ 在 $[k\pi, (k+1)\pi]$ 内单调减少, $k \in \mathbb{Z}$.

奇偶性: 奇函数.

周期性: 周期函数, $T = \pi$.

有界性: 无界函数.

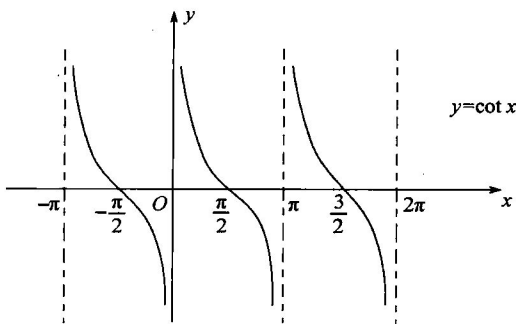


图 1-1-13

另外,还有两个三角函数要注意一下.它们是正割函数 $y = \sec x$,余割函数 $y = \csc x$,这两个函数分别是余弦函数 $y = \cos x$,正弦函数 $y = \sin x$ 的倒数,我们可以借助于 $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 去讨论这两个函数的图像及性质,所以在这里就不一一介绍了.

(6) 反三角函数.

① 反正弦函数.

(i) 定义: $y = \arcsin x$.

(ii) 图像:如图 1-1-14 所示.

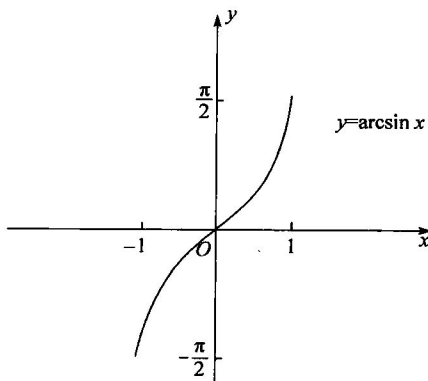


图 1-1-14

(iii) 性质.

定义域: $[-1, 1]$.

值域: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

单调性: $y = \arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增.

奇偶性: 奇函数.

周期性: 非周期函数.

有界性: 有界函数.

② 反余弦函数.

(i) 定义: $y = \arccos x$.

(ii) 图像:如图 1-1-15 所示.

(iii) 性质.