

# 雷达信号理论

北京工业学院 林茂庸、柯有安 编

国防工业出版社

## 内 容 简 介

本书系高等学校工科电子类雷达专业统编教材之一，是一本比较系统阐述雷达信号理论的书籍。

全书共分九章，从雷达信号的最优处理理论入手，阐明匹配滤波器是最优处理的基础。接着从分辨的要求引出模糊函数，系统分析了雷达信号的模糊函数及其主要参数对系统潜在性能(诸如分辨力、测量精度、模糊度、杂波抑制能力等)的影响。然后分析了几种典型信号的模糊函数。最后介绍波形设计的基本方法。

本书除作大学有关专业教材外，还可供从事雷达、声纳、通信等有关方面的科技工作者和高等学校有关专业师生参考。

## 雷 达 信 号 理 论

北京工业学院 林茂庸、柯有安 编

\*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

\*

787×1092<sup>1</sup>/<sub>16</sub> 印张13<sup>1</sup>/<sub>8</sub> 302千字

1981年1月第一版 1981年1月第一次印刷 印数：0,001—3,500册

统一书号：15034·2108 定价：1.40元

# 前 言

本书系高等学校工科电子类雷达专业统编教材之一，供高年级大学生选修和研究生使用。同时可供从事雷达、声纳、通讯等有关方面科技工作者参考。

全书共分九章，从内容上讲可概括为四个部分：第一章是信号和系统分析方面的基础知识，其中信号频谱分析部分属复习性质，重点讲述实信号的复数表示、波形参数以及信号通过线性带通系统的包络分析法等。第二至五章系统阐述雷达信号检测、参量估计和分辨理论。介绍模糊函数及其主要性质，系统分析雷达信号的模糊函数及其主要参数对系统潜在性能（诸如分辨力、测量精度、模糊度和杂波抑制能力等）的影响。第六至八章为典型雷达信号分析部分。导出信号的频谱、模糊函数、匹配滤波器频率特性等的解析表达式，分析各种信号模糊图的特点及其适用场合。关于信号产生和处理方法因有专书介绍，这里仅做一些原理性叙述。第九章讲述波形选择和波形设计的基本方法，包括：按自相关函数设计波形、抑制杂波波形设计以及从目标分辨要求设计波形的的基本方法。

本书比较侧重基本理论、基本概念和基本方法的叙述，在数学推导上力求准确，但不过分追求数学上的严密性，有些地方从实际应用出发采用了近似计算方法。本书各章都附有一定数量的习题，它有助于读者加深理解所学内容。章末附有参考文献目录，便于读者对有关问题进行深入地钻研。

本课程应在学生学过“信号、电路与系统”、“线性系统与反馈系统”、“统计无线电技术”和“雷达系统”等课程后开设。目的在于提高学生对雷达信号的分析与综合能力，为掌握近代雷达理论、从事雷达系统分析、信号处理和波形设计等方面的工作打下理论基础。讲授时数以 60 学时左右为宜。

本书第二、三章由柯有安同志编写，第一、四、五、六、七、八、九章由林茂庸同志编写。南京航空学院教师对本书进行了认真、细致的审阅工作，提出了许多宝贵的修改意见。

由于编者水平有限，编写的时间较短，书中可能存在不少缺点和错误，欢迎读者批评指正。

编 者

# 目 录

绪论	1
参考文献	2
第一章 信号和线性系统分析基础	4
1.1 信号的频谱分析	4
1.2 实信号的复数表示法	13
1.3 线性系统响应及其复数表示	18
1.4 高频窄带信号与带通系统	20
1.5 相关函数与能谱	22
1.6 取样定理	25
1.7 信号的矢量表示与信号空间	27
1.8 波形参量	29
习题	35
参考文献	36
第二章 雷达信号的最优处理——信号检测	37
2.1 概述	37
2.2 白噪声下的最优线性处理	37
2.3 色噪声下的最优线性处理	42
2.4 非线性最优处理	47
2.5 平稳高斯噪声干扰下信号的最优处理	51
习题	57
参考文献	59
第三章 雷达信号的最优处理——信号参量的估计	60
3.1 概述	60
3.2 时延的估计	61
3.3 频移的估计	68
3.4 时延和频移的联合估计	71
3.5 关于信号参量估计的某些一般性理论	78
3.6 平稳白高斯噪声干扰下信号参量的估计	83
习题	84
参考文献	86
第四章 模糊函数	87
4.1 概述	87
4.2 “点目标”回波的数学模型	87
4.3 模糊函数的定义及其物理意义	88
4.4 单载频脉冲信号的模糊函数	92

4.5	模糊函数的性质 .....	96
4.6	模糊函数的推广 .....	104
	习题 .....	105
	参考文献 .....	106
<b>第五章</b>	<b>雷达分辨理论 .....</b>	<b>107</b>
5.1	概述 .....	107
5.2	距离分辨力与时延分辨常数 .....	108
5.3	速度分辨力与多卜勒分辨常数 .....	112
5.4	距离-速度联合分辨 .....	113
5.5	脉冲压缩概念和大时宽带宽信号 .....	114
	习题 .....	117
	参考文献 .....	118
<b>第六章</b>	<b>调频脉冲压缩信号 .....</b>	<b>119</b>
6.1	概述 .....	119
6.2	线性调频脉冲信号的频谱 .....	119
6.3	线性调频脉冲信号的模糊函数 .....	121
6.4	匹配滤波器特性及脉冲压缩性能估计 .....	123
6.5	线性调频脉冲压缩信号的距离旁瓣抑制方法 .....	128
6.6	系统失真分析——“成对回波理论”的应用 .....	133
6.7	线性调频脉冲压缩信号的处理 .....	136
6.8	V-调频脉冲压缩信号 .....	137
	习题 .....	140
	参考文献 .....	140
<b>第七章</b>	<b>相位编码脉冲压缩信号 .....</b>	<b>141</b>
7.1	概述 .....	141
7.2	二相编码信号 .....	141
7.3	二元伪随机序列 .....	147
7.4	相位编码脉冲压缩雷达的旁瓣抑制方法 .....	155
7.5	相位编码脉冲压缩信号的处理 .....	156
7.6	多相编码信号 .....	157
	习题 .....	160
	参考文献 .....	160
<b>第八章</b>	<b>相参脉冲串信号 .....</b>	<b>162</b>
8.1	概述 .....	162
8.2	均匀脉冲串信号 .....	162
8.3	加权脉冲串信号 .....	169
8.4	频率编码脉冲串信号 .....	172
8.5	重复周期参差脉冲串信号 .....	174
	习题 .....	176
	参考文献 .....	176
<b>第九章</b>	<b>波形设计 .....</b>	<b>177</b>

9.1 概述	177
9.2 按照给定的 $x(\tau, 0)$ 设计波形	178
9.3 抑制杂波波形设计	183
9.3.1 杂波的数学模型及统计特性	183
9.3.2 杂波中信号的最优检测	184
9.3.3 波形优化问题	190
9.3.4 给定发射信号的最优失配滤波器设计	193
9.3.5 最优“信号-滤波器对”波形设计	194
9.3.6 附加约束条件下的最优“信号-滤波器对”波形设计	196
9.4 简便的波形选择途径	200
9.4.1 波形设计一般考虑	200
9.4.2 雷达信号按模糊函数分类	200
9.4.3 波形设计举例	202
习题	203
参考文献	203

## 绪 论

众所周知,雷达是一个信息传输和处理的系统,它区别于通讯系统之处,在于信息的调制过程发生在目标散射之时。显然,雷达信息传输过程也会受到各种外界(自然和人为的)干扰和内部噪声干扰。所以雷达信号理论的发展也是建立在信息论,特别是信号检测理论的基础之上的。

早在1943年诺思(North)<sup>[1]</sup>提出匹配滤波器理论,大大推动了雷达检测能力的提高。1950年劳森(Lawson)把匹配滤波器理论系统地载入著名的专著<sup>[2]</sup>。

1950年伍德沃德(Woodward)<sup>[3]</sup>把香农(Shannon)所建立的基础信息论<sup>●</sup>中关于信息量的概念推广应用于雷达信号检测中来,认为从提取最多有用信息的观点出发,理想的雷达接收机同样应该是一个后验概率的计算装置。

从统计学的观点看,雷达观测是一个典型的统计判断过程。汉索(Hance)<sup>[4]</sup>和马库姆(Marcum)<sup>[5]</sup>最早把密笃尔顿(Middleton)<sup>[6]</sup>和聂曼(Neyman)<sup>[7]</sup>建立的统计检测理论应用于雷达。斯威尔林(Swerling)<sup>[8]</sup>结合雷达目标起伏特性建立了四种目标起伏模型,得到许多有用的目标检测数据。

在信号检测理论的历史上,曾出现过许多最佳准则,已经证明,从各种最佳检测准则出发,导出的最佳信号检测系统都是由一个似然比计算装置和一个门限检测器组成的。根据不同的最佳准则,门限取值不同。在高斯噪声下对确知信号的似然比计算装置实质上就是一个匹配滤波器。至此,按最大信噪比准则导出的匹配滤波器与按统计判决理论导出的似然比计算装置之间的内在联系便显而易见了。

为了解决杂波中的信号检测问题,乌尔柯维兹(Urkowitz)<sup>[9]</sup>把匹配滤波器理论推广到色噪声的场合,提出“白化滤波器”和“逆滤波器”的概念。之后,曼那斯(Manasse)<sup>[10]</sup>研究了同时存在白噪声和杂波干扰下的最佳滤波器,为抑制杂波波形优化问题打下了理论基础。

克拉美(Cramer)<sup>[11]</sup>继承菲切尔(Fisher)的工作,建立了经典的参量估计理论。斯莱皮恩(Slepian)把经典的极大似然估计理论应用于雷达<sup>[12]</sup>,稍后斯科尔尼克(Skolnik)<sup>[13]</sup>对雷达测量的理论精度作了系统的分析和总结。

值得指出的是伍德沃德不仅在发展雷达信号检测理论上作出了很大贡献,而且在著名的著作<sup>[14]</sup>中提出有名的雷达模糊原理,定义了模糊函数及分辨常数等新概念,奠定了雷达分辨理论的基础。并首次触及波形设计问题,指出距离分辨力和测量精度取决于信号的带宽而非时宽,从而大大推动了雷达信号理论的发展。稍后的赫尔斯翘姆(Helstrom)的著作<sup>[15]</sup>应该说也是雷达信号统计检测理论方面很好的一本参考书。

二次世界大战期间及战后初期,在实现了雷达信号最优处理的前提下,典型的脉冲雷达在同时提高发现能力、距离和速度测量精度以及分辨力方面遇到了不可克服的矛盾,为

● 卡切尔尼柯夫(Котельников)也是基础信息论的创始人之一。

了解决这个问题,也为了反雷达侦察的需要,各国先后开展了应用“复杂波形”代替传统的脉冲信号的研究。最早获得实际应用的是线性调频脉冲压缩信号<sup>[16~22]</sup>。以后相继出现非线性调频、相位编码<sup>[23]</sup>和相参脉冲串等大时宽-带宽信号。

由于雷达发射波形不仅决定了信号处理方法,而且直接影响系统的分辨力、测量精度以及抑制杂波能力等潜在性能。于是,波形设计就成了雷达系统最佳综合的重要内容,逐渐形成现代雷达理论的重要分支。

开始,人们希望找到一种“理想”的波形,以适应各种不同的目标环境和工作要求,很快就发现这种努力是徒劳的。

雷达波形设计一直沿着两种不同的途径进行研究,一种是萨斯曼(Sussman)等人<sup>[24~26]</sup>所走的波形综合的道路,通过模糊函数最优综合的方法,得到所需要的最优波形。遗憾的是这方面不仅遇到了数学上的困难,而且综合得到的复杂调制波形,也往往是技术上难以实现的信号。不过一维模糊函数的综合借助于相位逗留原理获得了较好的解决<sup>[27]</sup>。里海涅克(Rihaczek)<sup>[28]</sup>提出另外一种“简便的波形选择途径”,即根据目标环境图和信号模糊图匹配的原则,选择合适的信号类型。进而兼顾技术实现的难易程度,选择合适的信号形式和波形参数。近代先进的数字化多功能雷达大多采用多种发射信号,以适应不同的战术用途。随着电子战的发展,现代雷达面临的目标环境不仅复杂多端,而且是瞬息万变的,所以波形自适应是个值得重视的发展方向。

综上所述,可以看到,雷达信号理论的形成与发展,目的在于提高雷达信号传输的可靠性和有效性。显然,这里不是针对系统的某个环节或某个电路的具体措施,而是对整个系统进行最优综合。概括地说,雷达信号理论研究的课题包括从理论上探讨信号最优处理方法和最优波形的选择等两方面。这里涉及如何建立系统的数学模型;确定最优准则以及寻求最优系统结构(数学运算结构)等方面的问题。所以雷达信号理论是发展各种雷达新体制的理论基础。此外,雷达信号理论也是对实际雷达系统进行性能分析的理论指导,用以阐明实际雷达系统的合理性及改进的可能性。相信随着雷达信号理论的发展,雷达系统的威力、精度、分辨力以及反侦察、抗干扰能力必将得到进一步提高,雷达回波信号中所包含的有用信息必将得到更充分的利用。

雷达信号理论既然是设计近代雷达的理论基础,在培养高等科技人材的院校设置这门课程就显得十分必要了。当然,雷达信号理论涉及面很广,内容十分丰富,本书只是个导论性的书籍,着重介绍雷达信号最优检测、最优估计、分辨理论以及波形设计等基本问题,为读者进一步掌握近代雷达理论提供必要的基础。

## 参 考 文 献

- [1] D. O. North, Analysis of Factors which Determine Signal-to-noise Discrimination in Pulsed Carrier Systems, RCA Rept, PTR-6C, June 1943. (PIEEE Vol 51, pp 1015, 1963重印).
- [2] J. L. Lawson and G. E. Uhlenbeck, Threshold Signals, Radiation Lab. Series No. 24, McGraw-Hill, 1950.
- [3] P. M. Woodward and I. L. Davies, A Theory of Radar Information, Phil. Mag. Vol 41, pp1001~1017, 1950.
- [4] H. V. Hance, The Optimization and Analysis of Systems for the Detection of Pulsed Signals in Random Noise, D. Sc Dissertation, MIT Cambridge Mass, 1951.



- [5] J. I. Marcum, A statistical Theory of Target Detection by Pulsed Radar, RAND Corp Mem. RM-754, Dec. 1947; RM-753, July 1948. (IRE Trans, Vol IT-6 No.2, 1960重印).
- [6] D. Middleton and J. H. Van Vleck, Theoretical Comparison of the Visual, Aural and Meter Reception of Pulsed Signals in the Presence of Noise, J. of Appl. Phys. Vol 17, pp940~971 Nov. 1946.
- [7] J. Neyman and E. J. Pearson, On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses, Philos. Trans. Royal Soc. London Series A, 23 pp289~337, 1931.
- [8] P. Swerling, Probability of Detection for Fluctuating Targets RAND Corp Res Mem. RM-1217 March 1954. (IRE Trans. Vol IT-6 pp269~308 April 1960重印).
- [9] H. Urkowitz, Filter for Detection of Small Signals in Clutter, J. Appl. Phy. Vol 24 pp 1024, July 1953.
- [10] R. Manasse, The Use of Pulse Coding to Discriminate Against Clutter, AD260.230, 1961.
- [11] H. Cramer, Methods of Mathematical Statistics, Princeton Univ. press, 1946.
- [12] D. Slepian, Estimation of Signal Parameters in the Presence of Noise, IRE Trans. Vol IT-4, pp68~89, March 1954.
- [13] M. I. Skolnik, Theoretical Accuracy of Radar Measurements PGANE Trans. ANE-7 No.4 pp123~129, 1960.
- [14] P. M. Woodward, Probability and Information Theory with Application to Radar, McGraw-Hill, 1953.
- [15] C. W. Helstrom, Statistical Theory of Signal Detection, Pergamon Press, 1960.
- [16] E. Huffman, German Patent No. 768,068, 1940.
- [17] D. O. Sproule and A. J. Hughes, British Patent No. 604,429, 1948.
- [18] W. Causer, German Patent No. 892,772, 1950.
- [19] R. H. Dicke, U. S. Patent, No.2,624,876, 1953.
- [20] S. Darlington, U. S. Patent, No.2,678,997, 1954.
- [21] Я. Д. Цирман, Способ повышения разрешающей способности радиолокационных станций и устройство для его осуществления, Авт. свид. No. 146803 по Заявке No. 461974/40 от 25 Июля 1956.
- [22] J. E. Chin and C. E. Cook, The Mathematics of Pulse Compression, Sperry Eng. Review Vol 12, pp11~16 Oct. 1959.
- [23] W. M. Sibert, A Radar Detection Philosophy, IRE Trans Vol IT-2, pp 204~221, Sept. 1956.
- [24] C. H. Wilcox, The Synthesis Problem for Radar Ambiguity Function, AD 239427, 1960.
- [25] S. M. Sussman, Least-square Synthesis of Radar Ambiguity Functions, IRE Trans. Vol IT-8 No.3 1962.
- [26] J. D. Walf, G. M. Lee and C. E. Suvo, Radar Waveform Synthesis by Mean-square Optimization Techniques, IEEE Trans. Vol AES-5, July 1969.
- [27] E. L. Key, E. N. Fowle and R. D. Haggarty, A Method of Designing Signals of Large Time-bandwidth Production, IRE Int. Conv. Record pt 4 pp 146~155, 1961.
- [28] A. W. Rihaczek, Radar Waveform Selection—A Simplified Approach, IEEE Trans. Vol AES-7, Nov. 1971.

# 第一章 信号和线性系统分析基础

## 1.1 信号的频谱分析

**实信号** 雷达发射信号与通信系统的发射信号不同，它不包含任何信息而只是信息的运载工具，有关目标的信息是在发射信号碰到目标并产生反射的过程中调制上去的，即目标的全部信息是蕴藏在雷达回波信号内的。雷达发射信号一般是除初始相位外，其余参量均确知的确定信号（相参雷达的发射信号则与某一基准信号保持严格的相位关系）。雷达接收信号则是回波信号与噪声干扰叠加而成的随机信号。信号可以用时间的实函数  $x(t)$  表示，称为实信号，其特点是具有有限的能量或有限的功率。如果把信号  $x(t)$  理解为单位电阻上的电压或通过其中的电流，则

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

即为单位电阻上所消耗的能量。信号能量有限即

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$$

也就是说函数  $x(t)$  是平方可积的。我们称能量有限信号为能量型信号。随机信号及周期信号的特点是具有有限的功率而能量无限，故称为功率型信号。

**频谱** 一般来说，信号用时间函数表示，其形式是比较复杂的，直接对它本身进行分析和处理都是比较困难的。为了克服这种困难，常将一般的复杂信号展开成各种类型的基本信号之和或积分，基本信号除了必须满足一定的数学条件外，其主要的特点在于其简单性——或者实现起来简单，或者分析起来简单，或者二者兼而有之。在无线电技术领域，最常采用作为基本信号的是正弦信号，其复数型式称为复正弦信号。此外，还有  $\delta$  函数，sinc 函数，walsh 函数和  $z$  变换函数等。这里着重介绍用正弦型基本信号对信号进行分析，即信号的频谱分析。

用具有  $\omega$  参量的复正弦信号作为基本信号，则任何复杂调制信号都可写成

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

其中

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

对于平方可积，也就是能量有限信号，则函数  $X(\omega)$  总是存在的，而且  $X(\omega)$  也总是平方可积的。若以  $f$  为参量，以上式子还可写成具有对称的形式

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (1.1)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.2)$$

通常把  $X(f)$  叫做信号的谱密度，或简称为频谱。一般  $X(f)$  为  $f$  的复函数

$$X(f) = |X(f)|e^{j\Theta(f)} \quad (1.3)$$

式中 $|X(f)|$ 为信号的振幅频谱,  $\Theta(f)$ 为相位频谱。

信号 $x(t)$ 与其频谱 $X(f)$ 之间的关系是一一对应的关系。换句话说, 信号 $x(t)$ 给定后, 信号 $X(f)$ 便是确定的, 反之亦然。因此, 信号既可以用时间函数 $x(t)$ 来描述, 也可以用它的频谱 $X(f)$ 来描述。

式(1.2)称为信号 $x(t)$ 的傅立叶变换, 而式(1.1)称为 $X(f)$ 的傅立叶反变换。信号 $x(t)$ 及其频谱 $X(f)$ 组成一组傅立叶变换对, 记作

$$x(t) \rightleftharpoons X(f)$$

对实信号来说,  $x(t)$ 为实函数, 即 $x(t) = x^*(t)$ , 于是信号频谱的复共轭为

$$X^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi(-f)t} dt = X(-f)$$

这就是实信号频谱的对称性质:

$$X^*(f) = X(-f) \quad (1.4)$$

$$\left. \begin{aligned} |X(f)| &= |X(-f)| \\ \Theta(f) &= -\Theta(-f) \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

也就是说, 实信号的振幅频谱为偶函数, 相位频谱为奇函数。

一般实信号的频谱是分布在整个频率轴 $(-\infty < f < \infty)$ 上的, 尤其是持续时间有限的信号更是如此, 也就是说, 实信号具有双边频谱。式(1.4)说明, 实信号频谱的正负频率两半边之间有着完全确定的关系, 由一个半边频谱可推导出另一个半边频谱。

**窄带信号** 雷达信号常是这样一类信号, 其频谱主要成分集中于载频附近某一频带 $\Delta f$ 内, 且一般总能满足 $\Delta f \ll f_0$ , 两个边带频谱互不重叠, 此时用一个边带频谱就可决定信号波形。这类信号称为窄带信号, 其数学表达式常可写成

$$x(t) = a(t) \cos[2\pi f_0 t + \theta(t)] \quad (1.6)$$

其中 $a(t)$ 和 $\theta(t)$ 与 $\cos 2\pi f_0 t$ 相比, 是时间的慢变化函数, 称 $a(t)$ 为载波 $\cos 2\pi f_0 t$ 的包络函数,  $\theta(t)$ 为相位调制函数。

**傅立叶变换的特性** 信号的傅立叶变换具有一些重要特性, 灵活运用这些特性可以较快地求出许多复杂信号的频谱。现将其中较重要和常用的几个特性归纳如下<sup>(1)</sup> (注意这里信号 $x(t)$ 及其频谱 $X(f)$ 一般为复函数, 关于实信号用复函数表示, 我们将在下一节介绍):

(1) 线性特性

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightleftharpoons aX_1(f) + bX_2(f) \quad (1.7)$$

其中 $a$ 、 $b$ 为复常数。

(2) 时间比例特性

$$x(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (1.8)$$

其中 $a$ 为实常数。

(3) 时延特性

$$x(t - t_0) \rightleftharpoons X(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad (1.9)$$

(4) 频移特性

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \iff X(f - f_0) \quad (1.10)$$

(5)  $x(t)$  函数曲线与  $t$  轴围成的面积

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0) \quad (1.11)$$

(6)  $X(f)$  函数曲线与  $f$  轴围成的面积

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) df = x(0) \quad (1.12)$$

(7) 微分特性

时域:

$$\frac{d}{dt} x(t) \iff (j2\pi f) X(f) \quad (1.13)$$

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) \iff (j2\pi f)^n X(f) \quad (1.14)$$

频域:

$$\frac{d^n}{df^n} X(f) \iff (-j2\pi t)^n x(t) \quad (1.15)$$

(8) 积分特性

时域:

$$\int_{-\infty}^t x(t) dt \iff \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f) \quad (1.16)$$

如果  $x(t)$  在整个区间  $(-\infty, \infty)$  积分为零, 即信号  $x(t)$  无直流分量, 则上式简化为

$$\int_{-\infty}^t x(t) dt \iff \frac{1}{j2\pi f} X(f) \quad (1.17)$$

频域:

$$\int_{-\infty}^f X(\xi) d\xi \iff \frac{1}{-j2\pi t} x(t) + \frac{1}{2} x(0) \delta(t) \quad (1.18)$$

和

$$\int_{-\infty}^f X(\xi) d\xi \iff \frac{1}{-j2\pi t} x(t), \text{ 当 } x(0) = 0 \quad (1.19)$$

(9) 时间倒置特性

$$x(-t) \iff X(-f) \quad (1.20)$$

(10) 复共轭特性

$$x^*(t) \iff X^*(-f) \quad (1.21)$$

$$x^*(-t) \iff X^*(f) \quad (1.22)$$

(11) 对偶特性

$$X(t) \iff x(-f) \quad (1.23)$$

(12) 时间相乘特性

$$x_1(t)x_2(t) \iff \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\xi)X_2(f - \xi) d\xi = X_1(f) \otimes X_2(f) \quad (1.24)$$

## (13) 时域卷积特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \iff X_1(f)X_2(f)$$

或

$$x_1(t) \otimes x_2(t) \iff X_1(f)X_2(f) \quad (1.25)$$

其中 $\otimes$ 为卷积运算符号。

**典型函数的傅立叶变换** 下面应用上述频谱分析原理以及傅立叶变换特性计算几种典型信号的频谱, 这几种典型信号在信号分析中经常遇到, 而且很重要。值得指出的是, 存在一类函数不满足平方可积条件, 因此不能直接用傅立叶变换公式求出它的频谱, 然而可以采用求极限的方法来给出它的频谱, 这类函数包括脉冲函数 $\delta(t)$ 、单位阶跃函数 $1(t)$ 及周期函数等<sup>[1]</sup>。 $\delta(t)$ 和 $1(t)$ 在信号和线性系统分析中是极为重要的信号<sup>[2]</sup>。

## 〔例1〕 矩形脉冲

振幅为 $A$ , 宽度为 $T$ 的位于原点的矩形脉冲可用符号 $A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$ 表示<sup>[3]</sup>, 其数学表达式为

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A, & |t| \leq T/2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

信号的频谱为

$$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j2\pi ft} dt = AT \frac{\sin \pi fT}{\pi fT} = AT \operatorname{sinc}(fT)$$

用傅立叶变换对符号表示则有

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \iff AT \operatorname{sinc}(fT) \quad (1.26)$$

当 $A=1$ 时, 上式变为

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \iff T \operatorname{sinc}(fT) \quad (1.27)$$

## 〔例2〕 sinc 脉冲

sinc 脉冲的数学表达式可写成

$$x(t) = A \operatorname{sinc}(2Bt)$$

由傅立叶变换对 (1.26), 再应用傅立叶变换的对偶特性, 考虑到 sinc 函数为偶函数, 可得

$$A \operatorname{sinc}(2Bt) \iff \frac{A}{2B} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \quad (1.28)$$

当 $A=1$ 时, 上式变为

$$\operatorname{sinc}(2Bt) \iff \frac{1}{2B} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \quad (1.29)$$

sinc 脉冲及其频谱示于图 1.1。

## 〔例3〕 单边指数函数

单边指数函数的数学表达式为

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

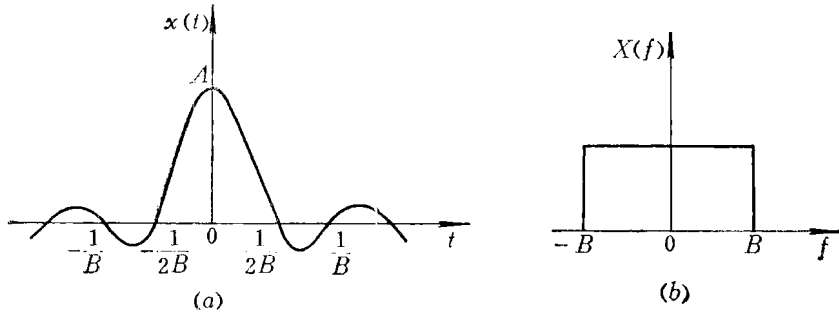


图 1.1 sinc 脉冲及其频谱  
(a) sinc 脉冲; (b) 其频谱。

频谱为

$$X(f) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)t} dt = \frac{1}{a+j2\pi f} \quad a > 0 \quad (1.30)$$

〔例 4〕 高斯脉冲

高斯脉冲的数学表达式为

$$x(t) = e^{-\pi t^2}$$

因高斯函数为偶函数, 故其频谱为

$$X(f) = 2 \int_0^{\infty} e^{-\pi t^2} \cos(2\pi ft) dt$$

查积分表得

$$X(f) = e^{-\pi f^2}$$

用傅立叶变换对符号表示为

$$e^{-\pi t^2} \rightleftharpoons e^{-\pi f^2} \quad (1.31)$$

〔例 5〕 单位脉冲函数 (Dirac Delta Function)

单位脉冲函数  $\delta(t)$  或冲击函数定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad (1.32 a)$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.32 b)$$

$\delta$  函数具有许多重要特性, 例如, 当它和另一信号  $x(t)$  相乘时, 乘积函数只在  $\delta$  函数出现时刻  $t_0$  上有值, 而其它地方均为零, 即

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0) \quad (1.33)$$

其中

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

将式 (1.33) 两边进行积分, 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = x(t_0) \quad (1.34)$$

当  $t_0 = 0$  时上式化为

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0) \quad (1.35)$$

考虑到  $\delta$  函数是偶函数, 式 (1.34) 可改写成

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$$

或

$$x(t) \otimes \delta(t) = x(t) \quad (1.36)$$

利用  $\delta$  函数的上述特性, 不难求得其频谱为

$$\Delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft} |_{t=0} = 1$$

用傅立叶变换对符号表示为

$$\delta(t) \iff 1 \quad (1.37)$$

应用傅立叶变换对的延时特性, 可得

$$\delta(t-t_0) \iff e^{-j2\pi ft_0} \quad (1.38)$$

同理, 可以定义频率域上的  $\delta$  函数为

$$\delta(f) = \left\{ \begin{array}{l} \infty, \quad f = 0 \\ 0, \quad f \neq 0 \end{array} \right\} \quad (1.39)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) df = 1$$

应用傅立叶变换对的对偶特性, 并考虑到  $\delta$  函数为偶函数,  $\delta(f) = \delta(-f)$ , 可得

$$1 \iff \delta(f) \quad (1.40)$$

而应用傅立叶变换对的频移特性, 可得

$$e^{j2\pi f_0 t} \iff \delta(f-f_0) \quad (1.41)$$

〔例 6〕 正余弦函数

由于余弦函数  $\cos(2\pi f_0 t)$  可以表示为

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$$

则根据式 (1.41), 可得

$$\cos(2\pi f_0 t) \iff \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] \quad (1.42)$$

同理可得

$$\sin(2\pi f_0 t) \iff \frac{1}{2j} [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)] \quad (1.43)$$

〔例 7〕 单位阶跃函数

单位阶跃函数的表达式为

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

由于  $1(t)$  不满足平方可积条件, 不能直接用傅立叶变换公式求出其频谱, 一般书籍把  $1(t)$  定义为指数函数的极限

$$1(t) = \begin{cases} \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

通过指数函数的频谱, 采用求极限的方法间接求出它的频谱, 这个问题作为练习留给读者自己去求解。  $1(t)$  也可以表示为  $\delta(t)$  的积分函数

$$1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$

于是根据式 (1.16) 和式 (1.37) 可得

$$1(t) \iff \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f) \quad (1.45)$$

根据傅立叶变换的对偶特性, 可得频域的单位阶跃函数  $1(f)$  的傅立叶变换对为

$$1(f) \iff \frac{1}{2} \delta(t) - \frac{1}{j2\pi t} \quad (1.46)$$

〔例 8〕  $\text{sgn}$  函数

$\text{sgn}(t)$  的数学表达式可以写成

$$\begin{aligned} \text{sgn}(t) &= \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \\ &= 2 \cdot 1(t) - 1 \end{aligned}$$

其中  $1(t)$  为单位阶跃函数。由式 (1.40)、(1.45) 可得

$$\text{sgn}(t) \iff \frac{1}{j\pi f} \quad (1.47)$$

根据傅立叶变换的对偶特性, 可得频域的  $\text{sgn}$  函数的傅立叶变换对为

$$-\frac{1}{\pi t} \iff -j \text{sgn}(f) \quad (1.48)$$

其中

$$\text{sgn}(f) = \begin{cases} 1, & f > 0 \\ -1, & f < 0 \end{cases}$$

〔例 9〕 Dirac-Comb 函数

Dirac-Comb 函数  $\text{comb}_{T_r}(t)$  表示等间隔重复的  $\delta$  脉冲列

$$\text{comb}_{T_r}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_r)$$

其中  $T_r$  为重复周期。严格地说, 这种周期信号是不能展开成傅立叶级数的, 但是采用极限定义的方法,  $\delta$  函数可通过对高斯函数取极限而得到

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \exp\left(-\pi \frac{t^2}{\tau^2}\right)$$

于是  $\text{comb}_{T_r}(t)$  可以展开成复数傅立叶级数

$$\text{comb}_{T_r}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(j2\pi \frac{nt}{T_r}\right)$$



其中

$$C_n = \frac{1}{T_r} \int_{-T_r/2}^{T_r/2} \delta(t) \exp\left(-j2\pi \frac{nt}{T_r}\right) dt = \frac{1}{T_r}$$

所以

$$\text{comb}_{T_r}(t) = \frac{1}{T_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(j2\pi \frac{nt}{T_r}\right)$$

于是, 应用式 (1.7) 和式 (1.41) 可以得到下列傅立叶变换对

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_r) \iff \frac{1}{T_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_r}\right)$$

或

$$\text{comb}_{T_r}(t) \iff \frac{1}{T_r} \text{comb}_{1/T_r}(f) \quad (1.49)$$

Dirac-Comb 信号及其频谱示于图 1.2。

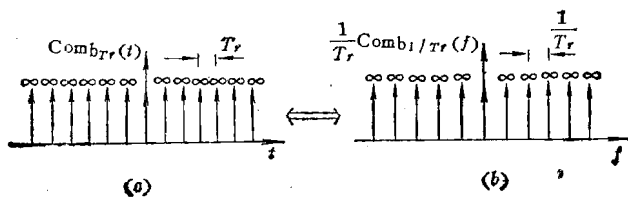


图1.2 Dirac-Comb 信号及其频谱  
(a) Dirac-Comb 信号; (b) 其频谱。

文献〔3〕应用重复运算符  $\text{repr}_r$ , 定义时域周期信号

$$\text{repr}_r x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_r) = x(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_r) \quad (1.50)$$

应用式 (1.25) 和式 (1.49) 可得傅立叶变换对

$$\text{repr}_r x(t) \iff X(f) \cdot \frac{1}{T_r} \text{comb}_{1/T_r}(f)$$

采用梳状运算符  $\text{comb}_F$ , 定义频域梳状函数

$$\text{comb}_F X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nF_r) \delta(f - nF_r)$$

则上述傅立叶变换对可改写成

$$\text{repr}_r x(t) \iff \frac{1}{T_r} \text{comb}_{1/T_r} X(f) \quad (1.51)$$

其中

$$x(t) \iff X(f)$$

同理不难求得另一傅立叶变换对<sup>〔3〕</sup>

$$\text{comb}_{T_r} x(t) \iff \frac{1}{T_r} \text{rep}_{1/T_r} X(f) \quad (1.52)$$

其中

$$x(t) \iff X(f)$$