

龙门品牌  学子至爱

状元笔记

教材详解

取状元学习之精华
架成功积累之天梯

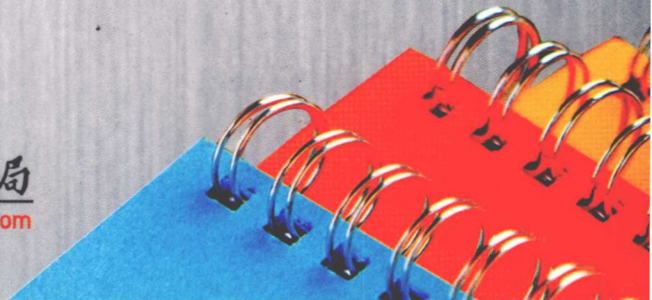
丛书组编：龙门书局教育研究中心
学科主编：王思俭
本册主编：张默

高中数学
必修4(江苏版)



龍門書局

www.longmenbooks.com



龙门品牌  学子至爱

状元笔记

教材详解

高中数学 必修 4(江苏版)

丛书组编：龙门书局教育研究中心

学科主编：王思俭

本册主编：张 默

龍 門 書 局
北 京

版权所有 侵权必究

举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303

邮购电话:010-64034160

图书在版编目(CIP)数据

状元笔记·教材详解:江苏版课标本.高中数学.必修4/龙门书局教育研究中心丛书组编;王思俭学科主编;张默本册主编. —北京:龙门书局,2009

ISBN 978-7-5088-2119-1

I. 状… II. ①龙…②王…③张… III. 数学课—高中—教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 123238 号

策划编辑:田 旭 刘 娜

责任编辑:王 敏 王美容 倪炜玲

封面设计:耕 者

龙 门 书 局 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

www. longmenbooks. com

明辉印刷有限公司印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2009 年 10 月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2009 年 10 月第一次印刷 印张:7 3/4

字数:252 000

定 价:16.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

主编寄语

——数学是什么

●数学是自然的又是有用的

每个数学概念都是在人类社会的发展进程中自然形成的，它不是强加于人的。为了计数，人们引入了1,2,3,⋯这样的数；为了度量边长为1的正方形的对角线，人们又认识了(根号2)；为了描述现实世界中的运动，函数诞生了。

数学就在我们身边，每个人每天都在自觉与不自觉中使用着数学，无论他是否懂数学。例如，一对百岁老夫妇每月养老金合计五千元，当月支出三千元，剩余多少他们是清楚的，这就是“百岁老人使用函数”。数学处处都能派上用场，小至日常琐事的处理，大到神舟宇宙飞船遨游太空，离开数学都将一事无成。

●数学是清楚的又是易学的

每项数学成果都是人类在长期的社会实践中提取的精华，是经过千锤百炼的。所以用数学来鉴别是非，对就是对，错就是错，不存在丝毫的含糊。例如，半径为1的圆的面积是 π 就是对的，得出其他结果就是错的。

数学是清楚的，这就决定了数学是易学的。我们都知道，工人没有工具不能做工，农民没有农具不能种田，军人没有武器不能打仗。所以，学习数学手里也需要有工具，这里的“工具”是指定义、公理、定理和公式等一些硬件式的东西。有了工具以后，你的学习就进入了软件学习阶段，那就是探究思维方法了，包括逻辑方法和具体的解题方法。数学工具一旦与思维方法合成，就成为数学能力。

●数学是成熟的又是发展的

时至今日，数学正式成为研究数量关系和空间形式的一门科学，体系系统、完整、无矛盾，她是一切科学和技术的基础性学科，是人类思考问题、解决问题的有效工具。

青年人好像早晨八九点钟的太阳，你们正处在一生中接受数学训练、打好数学基础的最佳时期，你们的身上寄托着人类的希望。所以，你们除了遵循数学规则，学习别人的东西外，还应该保持永不满足的好奇心，大胆地发现问题、提出问题，直至最后解决问题，用你们的智慧传承经典、不断创新，推进数学的发展。

数学素质是当今社会公民的基本素质，没有数学素质就等于没有素质。“沧海横流，方显出英雄本色”，等你们长大了，只要数学知识学好了，你们就是有本事的人，就是对亲人、家乡、国家乃至人类有用的人。人类的将来等待你们创造，我们笑着看你们的未来！

状元心得

——谈如何学好文理科综合

学弟学妹们,你们是否依然在茫茫题海中痛苦挣扎?是否依然在为复习时间不够而担忧,是否依然在为摸不到高考的脉搏而苦恼不堪?其实不必惊慌,要想在最短的时间内提高你的学习成绩,是有“捷径”可走的。

●1. 考多少,学多少

看到这个标题,有人可能会问,你怎么知道考多少呢?是的,我不知道具体考多少,但高考考题中有80%的题目都是考查基础知识,因此,只要掌握了这些基础知识,考大学是完全没有问题的。此谓之“考多少,学多少”。

●2. 将“题海”变成小册子

题目是做不完的,“题海”战术是行不通的。如何将茫茫“题海”变成简单实用的小册子呢?首先,要会做题,做好题。老师讲课时的例题、平时的各种考试题,都是经过老师筛选的经典题,要将这些题目做会、做懂、做透。其次,积累错题,及时查缺补漏。在平时学习与考试中难免会做错题,这说明我们的知识掌握得不够完善,因此要学会将平时做错的题归纳到一个小册子上,按题目考查的知识点分门别类。在错题旁边写明它所考查的知识点、方法技巧,再在其后写明自己是因为对哪个知识点掌握不够或学习上的缺漏而造成的错误。平时复习的时候,只需要重点突破这些薄弱环节和遗漏的知识点,就可以快速完善你的知识体系,从而使得你在考试中能得心应手。

●3. 从高考真题中找感觉

十次模拟≠一次高考。虽然模拟考试都会尽力向高考靠拢,但毕竟不是真正的高考。所以要想把握高考的脉搏,最好的方法就是研究近几年的高考真题。研究真题不仅是要体验高考的考试氛围,更重要的是要结合所学的基础知识揣摩高考的出题思路、出题方式。在做高考题时,要严格按照高考的时间模式来进行,把每一次做题都当作高考实战。做完后,仔细核对答案,找出自身问题所在。久而久之,在参加高考的时候,你就会胸有成竹了。

思路决定未来

“考考考，老师的法宝！

分分分，学生的命根！”

这是一句流传了很久的“校园名谣”，很真实，很形象，让你莞尔，又让你几多无奈。

有没有办法让大家轻轻松松就能考出理想的成绩？有没有可能让大家在这种环境和氛围中也能培养出素质、能力和思维？

为了解决这一课题，我们一直在探索、研究。

□ 状元的成功规律 □

高考状元是考场中的高手，能不能从这些高手的经验中总结出一些规律呢？为此，几年来我们接触了几十位高考状元，追踪到一些共性。

1. 天道酬勤

很多人都会把高考状元的成功归结为聪明，事实果真如此吗？在与他们接触了很久之后，我渐渐发现：他们中有一部分人的确是绝顶聪明，但更多状元的智商并不比普通人高太多，勤奋是他们共同的特质。江苏的一位状元说自己大年三十的晚上还学习到12点；河南的一位状元说自己在病床上还坚持在看书；广东的一位状元对自己读了三年高中的县城竟然极其陌生……

这些事例再一次验证了：天道酬勤。

2. 方法决定效率

他们每个人都有一套完整科学的学习方法，而且十分有效。我曾经反复揣摩他们的这些方法，禁不住欣欣然向往之；假若我们能懂得这些方法并在实际学习中灵活运用，北大、清华等一流名校的大门就会向我们敞开着。

有思路才有方法，好方法往往事半功倍！

3. 好心态比好成绩更重要

据我观察：他们心态都很好，也很自信。心理学家们认为：心理暗示往往能让人超越自己，激发潜力，增强自信心！

□ 反思我们的学习 □

与这些考试高手们相比较,反思一下我们成绩普通的学生,尤其是成绩中等学生的学习。近几年来,我们也总结出成绩中等学生的一些特质:

- 他们最有希望成为优等生,但往往功亏一篑!
 - 他们智商都不错,但却总认为自己不够聪明。
 - 他们往往也能够勤奋,但他们的勤奋很盲目,不知道自己什么地方该多下功夫去学。
 - 他们试图形成自己的学习方法,但并不系统,更要命的是他们的学习方法并没有成为一种学习的习惯,很随意,很无序。
 - 他们渴求全面掌握知识,但往往理解得似是而非。
 - 他们的心态往往是“随大流”,缺乏必胜的信心。
-

亲爱的同学,你有这样的问题吗?如果有,你明白自己的差距在哪里了吗?

以上这些说明你最大的问题就是:学习没有思路!

□ 好书可以改变一个人的命运! □

在做了大量的研究之后,我们发现,学习很难轻轻松松,但是可以有高效的方法提高学习的效率。我们希望将这些研究成果融汇到本书中,帮助每一个学生高效地学习,快速地提高。

1. 没有什么比基础更重要! 第一秘诀:以教材为中心,夯实基础

曾经有位高考状元跟我说,考试中真正的难题很少,题目不会做或者做错了,多数是因为基础掌握得不够扎实。很多学生自认为自己的基础很不错,其实对知识点的掌握还是似是而非,往往“知其然不知其所以然”,并没有完全吃透知识点。

这位状元还跟我说:平时看的最多的书就是教材,每次看都会有新体会,看教材不是简单的记忆,而是深刻的理解,要把每个知识点的来龙去脉搞得清清楚楚。在考试的时候,每一道考题都可以还原成教材里的例题或者习题。

我跟很多老师探讨过这位状元所说的话,大家都深以为然,教材知识是一切知识的起点和基础。在本书的“基础知识全解”这个栏目中,我们将知识点按照重要程度采用“级”区分,每个知识点是应该“记忆”还是“理解”,存在什么样的“误区”,如何进行“延伸拓展”、“思维发散”等等都进行细致入微的讲解。目的就是帮大家尽力吃透教材,真正夯实基础。

2. 素质、能力比成绩更重要,方法、技巧是素质与能力的体现

任何知识的学习,最终要归结在素质的养成和能力的提升上。不断地机械地做题、考试是不能提升素质和能力的,最重要的是如何将知识转化成为个人的素质与能力。拥有素质与能力,就能生发解决问题的方法与技巧,也就拥有了打开一切的“金钥匙”。拥有素质与能力,也定将能考出相当理想的成绩!

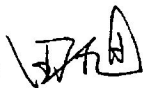
在本书的“方法·技巧·能力”栏目中,我们用案例的方式,帮助你发散拓展、突破思维障碍,学会综合运用、举一反三,破解误区和陷阱,最终实现从知识向能力的转化、迁移,培养你的创造性思维和创新能力。

3. 新颖、原创、应试

兴趣是最好的老师,人类认识自然、探索自然就是从好奇、兴趣开始的。在本书的编写中,我们力求使用最新颖的素材,让大家学会运用知识理解、分析、判断社会热点问题;我们力求最大程度用新方法、新思路去做一些原创的讲解和题目,当然也要保留多年沉淀下来的经典题目;我们也力求能够将考试融汇到日常的学习中,“随风潜入夜,润物细无声”,在不知不觉中培养考取高分的素质和能力。

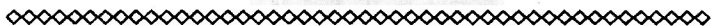
□ 独立之精神,自由之思想 □

1929年,学术大师陈寅恪先生在书写纪念王国维的碑铭中提出了“独立之精神,自由之思想”,从此,独立精神和自由思想便成了中国人追求的价值取向。孟子有言曰:“尽信书则不如无书。”任何书籍都不是十全十美的,里面可能会存在一些不足之处。每一个有独立思考能力的学生在面对任何权威时都可以提出自己的见解和看法,我们欢迎大家来信讨论和赐教。

总策划: 

《状元笔记·教材详解》

编委会



丛书组编：龙门书局教育研究中心

总策划：田旭

执行编委：刘娜 王涛 王美容

各学科主编：

语文：郭能全 何涛 数学：傅荣强
英语：张成标 赵炳河 物理：张忠新 胡志坚
朱如忠 陈俊 化学：朱智铭 张希顺
生物：姚登江 历史：张华中 魏明
地理：何纪延 政治：张清

编委：曹爱国 曹景国 陈建忠 陈俊 陈俊亮 崔军 代曙光
董玉叶 樊妍 方立波 封秀英 傅荣强 高波 高鹤
高玉兰 谷玉艳 郭存斌 郭杰 郭能全 郝守均 郝玉静
何纪延 何涛 侯翠兰 胡希 胡志坚 黄芳 姬玉玲
纪永华 李桂红 李建全 李新星 李义军 李永刚 李子良
凌春来 刘传宾 刘和水 刘红英 刘江 刘娟 刘凌昊
刘岩 鲁晓梅 陆炯 马合山 牛鑫哲 潘露 裴文
单娟 石铁明 石兴涛 史景辉 双金麟 汤小梅 佟志军
涂木年 王静 王可线 王平 王秀敬 王学春 王亚军
王壮 魏明 夏桂芳 项非 邢海燕 胥晓华 徐冬琴
徐勤红 杨梅 姚登江 尤齐辉 于长军 于春芳 于小芹
翟玉明 张成标 张华中 张美丽 张琪 张清 张升军
张书祥 张硕 张希顺 张晓红 张忠新 章端 赵炳河
赵方 赵建云 赵现标 周国强 周萍 周映平 朱如忠
朱岩 朱智铭

目 录

第一章 三角函数

章前概述	1
1.1 任意角弧度	1
芝麻开门	1
基础知识全解	1
★★任意角的概念	1
★★象限角、轴线角	2
★★终边相同的角	3
★★各象限角与轴线角的集合的表示	3
★弧度制的定义	5
★角度与弧度的关系	6
★弧长与扇形面积公式	7
弧度制的作用	8
模糊点·易错点·障碍点	8
★★易错点:角的度量单位的统一使用,容易出现矛盾不等式	8
方法·技巧·能力	9
习题演练	10
教材课后习题解答	10
教材习题变式练习	14
变式题答案	15
1.2 任意角的三角函数	15
芝麻开门	15
基础知识全解	16
★★任意角的三角函数的定义	16
★★三角函数在各象限内的符号	17
★★三角函数线	19
★★利用三角函数线	21
★★同角三角函数的基本关系式	22
★同角三角函数公式的变形	23
★★同角三角函数公式的应用	25
★★★诱导公式的推导过程	28

★★诱导公式的特征	31
模糊点·易错点·障碍点	35
1. ★易错点:正切函数的定义域问题	35
2. ★★模糊点:关于求三角函数值时符号的确定	35
方法·技巧·能力	35
1. 综合能力点:利用三角函数线解三角不等式	35
2. 探究能力点:同角三角函数基本关系式的进一步探究	36
习题演练	37
教材课后习题解答	37
教材习题变式练习	49
变式题答案	49
1.3 三角函数的图象和性质	50
芝麻开门	50
基础知识全解	50
周期现象	50
★周期性	50
★最小正周期	52
★ $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 与 $(y = A\cos(\omega x + \varphi))$ 的周期	53
★★正弦函数的图象	54
★★余弦函数的图象	55
★★★正余弦函数的性质	57
★★正切函数的图象与性质	60
★★三种图象变换	63
★★函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	63
★由图象或部分图象确定解析式	64
三角函数模型	69
模糊点·易错点·障碍点	71
★★易错点:函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 中 φ 的范围问题	71
方法·技巧·能力	72

1. 思维发散点:单调区间的求法	教材习题变式练习	108
..... 72	变式题答案	108
2. 方法技巧点:对称轴与对称中心的确定	2.2 向量的线性运算	109
..... 73	芝麻开门	109
习题演练	基础知识全解	109
教材课后习题解答	★向量加法的定义	109
教材习题变式练习	★向量加法的几何表示	109
变式题答案	★向量加法的运算法则	111
..... 90	★向量加法需注意的问题	111
本章知识能力整合	★向量减法的定义	113
..... 92	★向量数乘的定义	116
知识结构图	★★向量共线定理	117
..... 92	模糊点·易错点·障碍点	119
难点·综合·易错点	1. 误区:向量平行的条件	119
..... 92	2. 易错点:平面向量基本定理中对基底的要求	120
1. ★三角函数的基本概念	方法·技巧·能力	120
..... 92	1. 思维发散点:关于向量模的一个不等式	120
2. ★★同角三角函数关系与诱导公式	2. 探究能力点:向量 a 方向上的单位向量	121
..... 93	习题演练	121
3. ★★★三角函数的图象与性质	教材课后习题解答	121
..... 94	教材习题变式练习	125
方法·技巧·能力	变式题答案	126
..... 95	2.3 向量的坐标表示	126
1. 思维发散点:三角函数最值的解题技巧	芝麻开门	126
..... 95	基础知识全解	126
2. 方法技巧点:函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 中角 φ 的求法	★平面向量基本定理	126
..... 95	★平面向量的坐标表示	129
三年高考两年模拟题赏析	★★平面向量的坐标运算	130
..... 95	★★向量平行的坐标表示	132
教材单元习题讲解	模糊点·易错点·障碍点	134
..... 98	障碍点:关于向量共线的坐标表示	134
 134	
	方法·技巧·能力	135
	思维发散点:线段的定比分点	135
	习题演练	136
	教材课后习题解答	136
	教材习题变式练习	140

第二章 平面向量

章前概述	103
2.1 向量的概念及表示	103
芝麻开门	103
基础知识全解	103
★向量的概念	103
★向量的表示	104
★向量的模	104
模糊点·易错点·障碍点	106
★易错点:平行向量与共线向量的关系	106
方法·技巧·能力	106
方法技巧点:判断一个量是不是向量	106
习题演练	106
教材课后习题解答	106

变式题答案	140
2.4 向量的数量积	141
芝麻开门	141
基础知识全解	141
★平面向量的数量积	141
★★向量数量积的性质	142
★★数量积的运算律	142
★★平面向量数量积的坐标表示	145
★长度、距离、夹角公式	145
★★★向量垂直的坐标表示	147
模糊点·易错点·障碍点	148
1. 误区:平面向量的数量积有它自身的特点,不能把通常的代数性质都强加于它	148
2. 易错点:两个非零向量 a, b 夹角 θ 为锐角或钝角的充要条件	148
方法·技巧·能力	148
1. 思维发散点:向量的混合运算	148
2. 方法技巧点:利用数形结合求向量问题	149
习题演练	150
教材课后习题解答	150
教材习题变式练习	156
变式题答案	156
2.5 向量的应用	157
芝麻开门	157
基础知识全解	157
★向量在物理学中的运用	157
★向量在几何中的运用	158
★★平行(共线)与垂直的证明	159
模糊点·易错点·障碍点	160
易错点:向量的移动	160
方法·技巧·能力	160
探究能力点:用向量方法证明正弦定理和余弦定理	160
习题演练	160
教材课后习题解答	160
教材习题变式练习	163

变式题答案	163
本章知识能力整合	164
知识结构图	164
难点·综合·易错点	164
1. ★★ 向量的概念及运算	164
2. ★★ 向量的坐标形式	164
方法·技巧·能力	166
三年高考两年模拟名题赏析	167
教材单元习题讲解	169

第三章 三角恒等变换

章前概述	173
3.1 两角和与差的三角函数	173
芝麻开门	173
基础知识全解	174
★★两角和与差的余弦公式	174
★★三角函数的叠加	176
★★两角和与差的正弦	177
★★辅助角公式	179
★★两角和与差的正切公式	180
★★两角和与差的正切公式的变形	181
模糊点·易错点·障碍点	183
1. ★★障碍点:盲目使用三角公式	183
2. ★★易错点:角的范围的判断	183
方法·技巧·能力	184
1. 思维发散点:两角和的正切公式的妙用	184
2. 方法技巧点:辅助角公式的妙用	185
3. 综合能力点:综合函数的图象来理解三角函数方程	187
习题演练	188
教材课后习题解答	188
教材习题变式练习	205
变式题答案	205
3.2 二倍角的三角函数	206
芝麻开门	206
基础知识全解	206
★★二倍角的正弦、余弦、正切公式	206
★★降幂公式	207
模糊点·易错点·障碍点	208
1. ★★易错点:角的范围的确定	208

2. ★★障碍点:求值问题中角的转化	208	影响	221
方法·技巧·能力	209	方法·技巧·能力	221
1. 方法技巧点:利用角的倍数关系来进行三角变换	209	综合能力点:三角恒等式的综合运用	221
2. 探究能力点:二倍角公式在实际问题中的应用	210	习题演练	223
习题演练	211	教材课后习题解答	223
教材课后习题解答	211	教材习题变式练习	224
教材习题变式练习	217	变式题答案	224
变式题答案	217	本章知识能力整合	225
3.3 几个三角恒等式	218	知识结构图	225
芝麻开门	218	难点·综合·易错点	225
基础知识全解	218	1. ★★三角函数式的化简、证明	225
半角公式	218	2. ★★三角函数式的求值	226
和差化积、积化和差公式	219	方法·技巧·能力	228
万能公式	220	思维发散点:三角函数式的求值	228
模糊点·易错点·障碍点	221	三年高考两年模拟名题赏析	230
★模糊点:自变量的范围对值域的影响		教材单元习题讲解	233

第一章 三角函数

◆◆◆章前概述◆◆◆

三角函数是初等数学中的一个重要内容,是学习高等数学和应用技术学科的基础,又是解决生产实际问题的工具.

本章主要内容包括:任意角与弧度制的概念;三角函数的图象和性质,其中图象包括作图和图象变化规律,性质包括三角函数的定义域、值域、有界限性、周期性、奇偶性、单调性、对称性和最值问题;函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的实际意义及解决一些简单的实际问题.

近几年高考加强了对三角函数的图象与性质的考查,因为函数的性质是研究函数的一个重要内容,是学习高等数学和应用技术学科的基础,又是解决生产实际问题的工具,因此三角函数的性质是高考的重点,另外同角三角函数的基本关系式和诱导公式也是高考考查的重要内容.关于周期函数的问题是本章的难点,近几年《考试说明》只要求“会求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期或者经简单的恒等变形可化为上述函数的三角函数的周期”.

总的来说,本章是高考的重要内容,但题目难度多为中等难度,是学生的易得分之处.

◆◆◆ 1.1 任意角弧度 ◆◆◆

在初中阶段,我们学习的角都在 $0^\circ\sim 360^\circ$ 之内,而在实际生活中,角的范围更广,如在奥运会上,体操、跳水比赛中常出现这样的术语:“转体 720° ”、“翻腾两周半”等.又比如,一场考试时间是 90 分钟,则从考试开始到结束,分针转过多少度? 时针转过多少度?

知识点一 ★★任意角的概念

[记忆] 任意角的概念:一个角可以看作平面内一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形.射线的端点即角的顶点,射线旋转的开始位置和终止位置即为角的始边和终边.

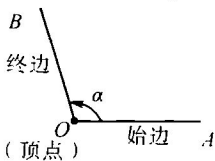
(点拨) 如图,射线 OA 绕端点 O 逆时针转动到 OB 位置,形成角 α ,其中 O 点一顶点, OA —始边, OB —终边.

[记忆] 正角:按逆时针方向旋转所成的角叫正角.

负角:按顺时针方向旋转所成的角叫负角.

零角:射线没有做任何旋转,叫做零角.

(比较) 正角、负角、零角可以与正数、负数、零的概念作比较,有助于我们对弧度制的理解.



【例 1】若 $90^\circ < \beta < \alpha < 135^\circ$, 则 $\alpha - \beta$ 的范围是 _____, $\alpha + \beta$ 的范围是 _____.

思路分析: 利用不等式的性质, 在给定角的范围内求出两角和、差的范围.

规范解答: $\because 90^\circ < \beta < \alpha < 135^\circ$, 则有

$$\begin{cases} 90^\circ < \alpha < 135^\circ \\ 90^\circ < \beta < 135^\circ \\ \beta < \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 90^\circ < \alpha < 135^\circ \\ -135^\circ < -\beta < -90^\circ, \\ \alpha - \beta > 0^\circ \end{cases}$$

$\therefore 180^\circ < \alpha + \beta < 270^\circ, -45^\circ < \alpha - \beta < 45^\circ$.

规律总结

在正角、零角、负角范围内求角的和与差时, 要注意不等式不能相减, 只能进行同向不等式相加.

【例 2】(1) 时针走过了 2 小时 40 分, 则分针转过的角度是 _____.

(2) 若将时钟拨慢 5 分钟, 则分针转了 _____ 度, 时针转了 _____ 度.

思路分析: 钟表的指针在正常状态下是顺时针旋转的, 转过的角度是负角, 若将时钟拨慢, 则为逆时针旋转, 则转过的角度为正角.

规范解答: (1) 时针走过 1 小时, 分针恰好转一圈, 即转过 -360° , 又 2 小时 40 分 = $2\frac{2}{3}$ 小时.

$\therefore -360^\circ \times 2\frac{2}{3} = -960^\circ, \therefore$ 应填 -960° .

(2) 分针转过的角度是 $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$,

时针转过的角度是 $\frac{30^\circ}{12} = 2.5^\circ$,

\therefore 应填 $30, 2.5$.

规律总结

考查钟表上的指针转过的角度时需注意两点:

(1) 明确旋转方向, 确定角的正负. 一般地, 若经过一段时间, 每种指针均顺时针转动, 形成的角为负角; 若拨慢一段时间, 指针要逆时针转动, 形成的角为正角.

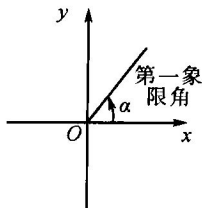
(2) 因为分针转动一周时, 时针旋转 $\frac{1}{12}$ 周, 所以时针转过的度数是分针转过的度数的 $\frac{1}{12}$ 倍, 一般通过分针所转角度去求时针所转角度较为方便.

知识点二 ★★象限角、轴线角

[记忆] 为了便于研究, 我们把角放到直角坐标系中, 规定: 角的顶点为坐标原点, 角的始边为 x 轴正半轴.

(1) 象限角: 角的终边在第几象限, 就称是第几象限角.

(2) 轴线角: 角的终边落在坐标轴上, 就称是轴线角.



知识点三 ★★终边相同的角

[理解] 与角 α 终边相同的角的集合为 $\{\beta|\beta=k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$.

提醒: (1) α 为任意角.

(2) 终边相同的角有无数个, 相差 360° 的整数倍.

(3) 相等的角终边一定相同, 终边相同的角不一定相等.

【例 3】求在 -360° 和 720° 之间与 -702° 角终边相同的角, 并判断是第几象限角.

思路分析: 只需将这些角表示成 $k \cdot 360^\circ + \alpha$ ($-360^\circ \leq \alpha \leq 720^\circ$) 的形式, 然后根据 α 来确定它们所在的象限.

规范解答: $\because -702^\circ = -2 \times 360^\circ + 18^\circ,$

\therefore 与 -702° 终边相同的角为 $\beta = k \cdot 360^\circ + 18^\circ (k \in \mathbf{Z}).$

$\therefore -360^\circ < k \cdot 360^\circ + 18^\circ < 720^\circ,$

$\therefore -1 - \frac{1}{20} < k < 2 - \frac{1}{20} (k \in \mathbf{Z}),$

$\therefore k = -1, 0, 1$ 分别代入得 $\beta = -342^\circ, 18^\circ, 378^\circ,$ 且 β 是第一象限角.

规律总结

终边相同的角之间相差 360° 的整数倍.

知识点四 ★★各象限角与轴线角的集合的表示

[理解] (1) 象限角的集合

第一象限角: $\{x|k \cdot 360^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

第二象限角: $\{x|k \cdot 360^\circ + 90^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

第三象限角: $\{x|k \cdot 360^\circ + 180^\circ < x < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

第四象限角: $\{x|k \cdot 360^\circ + 270^\circ < x < (k+1) \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

(2) 轴线角的集合

终边在 x 轴的正半轴: $\{x|x = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

终边在 x 轴的负半轴: $\{x|x = k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

终边在 y 轴的正半轴: $\{x|x = k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

终边在 y 轴的负半轴: $\{x|x = k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

终边在 x 轴上: $\{x|x = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

终边在 y 轴上: $\{x|x = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

终边在坐标轴上: $\{x|x = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

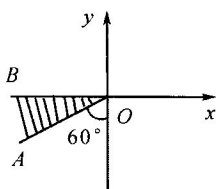
终边在 $y=x$ 这条直线上: $\{x|x = k \cdot 180^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

提醒: 象限角与轴线角的表示并不唯一, 还有其他表示.

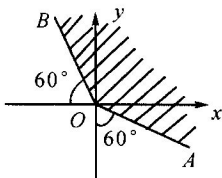
【例 4】如图, 分别写出顶点在原点, 始边重合于 x 轴正半轴, 终边落在阴影部分(包括边界)的角 α 的集合.

思路分析: 首先要明确构成阴影部分的两条终边的表示, 然后必须明确在 360° 内由哪条边逆时针旋转至哪条边形成阴影.

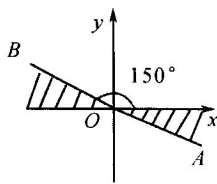
规范解答: (1) 图中以 OB 为终边的角可表示为 $k \cdot 360^\circ + 180^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 因让 OB 经过阴影区域并按逆时针方向旋转 30° 后便与 OA 重合, 故以 OA 为终边的角为 $k \cdot 360^\circ + 210^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 故终边落在阴影部分角的集合为 $\{\alpha|k \cdot 360^\circ + 180^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 210^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.



(1)



(2)



(3)

(2)图中以 OA 为终边的角可表示为 $k \cdot 360^\circ - 30^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 让 OA 经过阴影区域并按逆时针方向旋转 150° 得 OB , 故以 OB 为终边的角为 $k \cdot 360^\circ + 120^\circ (k \in \mathbf{Z})$, 则终边落在阴影部分的角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ - 30^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

(3)将图中 x 轴下方的阴影部分看成是由 x 轴上方的阴影部分旋转 180° 而得到的, 故终边落在阴影部分的角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 180^\circ + 150^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 180^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$.

方法规律

“扇形”区域的周期为 360° , 即每旋转一周恰好一次覆盖该区域; 而“对角形”区域的周期为 180° , 即每旋转一周恰好两次覆盖该区域.



提醒

第(2)题有同学会写成 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 330^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 120^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ 或写成 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 120^\circ \leq \alpha \leq k \cdot 360^\circ + 330^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$. 第一种写法中虽然两条终边都没有写错, 但是没有考虑到大小关系, 即未考虑到两个角须要落在同一个“数量级”内, 只须把 330° 改成 -30° 或把 120° 改成 480° . 第二种错误考虑到了角的大小关系, 但是忽略了旋转的方向, 要得到图中的阴影, 必须从 OA 逆时针旋转到 OB . 因此要把 OA 表示的角写在左边, 把 OB 表示的角写在右边.

【例 5】 若 α 是第二象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角?

思路分析: 只须将 $\frac{\alpha}{2}$ 所满足的范围用不等式表示出来, 再画出不等式表示的图形, 即可判断象限.

规范解答: $\because \alpha$ 是第二象限角,

$$\therefore k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore k \cdot 180^\circ + 45^\circ < \frac{\alpha}{2} < k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z},$$

\therefore 由图象知, $\frac{\alpha}{2}$ 为第一或第三象限角.

变式 1: 若 α 是第二象限角, 则 $180^\circ - \alpha$ 是第几象限角?

规范解答: $\because k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbf{Z},$

$$\therefore k \cdot 360^\circ - 180^\circ < -\alpha < k \cdot 360^\circ - 90^\circ, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore k \cdot 360^\circ < 180^\circ - \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbf{Z},$$

