А. Ф. Бермант 著

數學解析教程

(下册 I)

張理京 等譯

重工業出版社出版

1953

А. Ф. Бермант 著

數學解析教程

（下册 I）

張理京 等譯

重工業出版社出版

1953

目　次（下册 I）

第十二章　重積分及累次積分法

第十章

多變量函數及其微分法

本章講雙變量及多變量函數的基本定義及最簡單的分類法，它們的幾何意義以及初等研究法。然後講偏導數、偏微分，方向導數等概念及多變量函數的微分法。最後一節講多變量函數的高階微分。

把多變量函數一律看作是多維（多度）空間內動點的函數，這種觀點我們在本章內特別予以注意。

本章內的討論幾乎全部是就雙變量函數來說的，因為關於多變量函數的相當討論照例是完全類似於雙變量函數的。

§ 1. 多變量函數

151. 定義．兩個變量的每一對所考慮的數值對應着另一個變量的一個或幾個數值，則第三個變量叫做前兩個變量的函數．

可以任意變動的那兩個變量（它們的值可由我們隨意指定）叫做自變量（或宗標）．

例如矩形的面積 s 乃是兩個互不依從的變量——矩形的兩邊 a 及 b——的函數．這函數的表達式如下：

$$s=ab.$$

理想氣體的容積 v 是其壓力 p 及溫度 T 的函數．v 的表達式可自含有 v, p 及 T 三者的克拉配倫 (Clapeiron) 方程求出：

$$v=\frac{RT}{p}\quad(R=\text{const.}).$$

給出兩個變量的函數的意思，是指出自變量所取得的各對數值的全體，並指出用來從已給宗標值求得其所對應的函數值的方法。跟單變量函數的情形一樣，表示雙變量函數的最重要方法有**表格法**，**解析法（用公式）及圖形法**。

用表格表示時函數是這樣簡單地規定的：給某幾對自變量值指

出其對應的函數值。例如這事可按下法來做。設 x 及 y 代表自變量，而 z 代表函數。我們在方格表的頂上寫出一列自變量之一（如 x）的數值，在方格表左邊的第一行寫出另一自變量（如 y）的數值。然後每一格裡寫出其同行的 x 值及同列的 y 值所對應的函數 z 的數值（一個、或幾個）。

例如，在螺旋傳動中，效率 η $(z=\eta)$ 取決於摩擦係數 μ $(y=\mu)$ 及螺旋角 α $(x=\alpha)$. 這依從關係可用下表給出（見 Берлов 著機械零件）：

μ \ α	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{36}$
0.01	0.897	0.945	0.961	0.970	0.974
0.02	0.812	0.895	0.925	0.941	0.950
0.03	0.743	0.850	0.892	0.914	0.927
0.04	0.683	0.809	0.861	0.888	0.904
0.05	0.633	0.772	0.821	0.863	0.882

給出雙變量函數的表格叫做複式表格。

雙變量函數的表格表示法也跟單變量函數的一樣，是不完備的，因爲可能所要的宗標值是表內所沒有的。

跟單變量函數的情形一樣，雙變量函數的最重要表示法是解析表示法或公式表示法（雙變量函數的圖形表示法到 $n°153$ 中再講）。

函數的解析表示法中，指出了自變量值與其對應函數值之間的數學運算關係及各種數學運算的先後次序，換言之，它給出含三個變量的一個公式（見第一章 $n°15$）。

例如，下列每個公式

$$z=ax+by+c,\ z=\frac{xy}{x^2+y^2},\ z=\frac{\sin\ (2x+3y)}{\sqrt{1+(x-y)^2}}$$

把 z 表示成 x 及 y 的完全確定的函數。

數學解析的一切處理方法，正就是實際適用於函數的解析表示式

的。

任意個自變量的函數的定義完全跟雙變量函數類似。

n 個自變量的每一批所考慮的 n 個值對應着另一變量的一個或幾個值，則最後那個變量稱爲前面 n 個自變量的函數。

例如，長方體的體積 v 是三個獨立變量——長方體的棱長 a, b, c——的函數：

$$v=abc.$$

電流所產生的熱量 Q 取決於電壓 E，電流强度 I 及時間 t，而這些量之間的函數關係由下面的公式給出：

$$Q=0{,}24IEt.$$

n 個自變量的函數也可以用表格給出，但在 $n=3$ 時用表格法給出已經非常麻煩。n 個變量的函數的解析表示法是在給出的公式中，指明連結函數值本身與其對應的 n 個自變量值之間所用的數學運算及其先後次序。

例如，下列每個方程

$$u=ax+by+cz+d,\quad u=\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

把 u 給成 x, y, z 的某些完全確定的函數。

我們以後只研究用解析法表示的函數。

最後應該注意的是：在必要時，**常量可以看作是任意個自變量的函數**。這種函數對於每一批自變量的值來說都保持同一數值。

152. 函數的記號及函數的分類。 要表示 z 是變量 x 及 y 的函數時，寫成

$$z=f(x, y);$$

讀做：《z 是 x 及 y 的函數》或者《z 是"哎夫" x, y》. 除了字母 f 以外也可用其他任何字母（φ, F, Φ, ϕ 等等）來作爲函數記號。

同樣，要表示 u 是 $x, y, z, t, \cdots\cdots$ 的函數時，可寫成

$$u=f(x, y, z, t, \cdots\cdots).$$

在函數記號的括弧裡面指出了所有的自變量，所給函數是取決於它們的。

如果所論函數 z 用解析法表示，那末 $f(x,y)$ 代表 x, y 及常量由

數學運算記號及已知函數記號所組成的式子。

就函數 $z=f(x,y)$ 來說，對應於自變量的某一對確定數值的函數值叫做該函數的特定值。設 $x=a$ 及 $y=b$ 時函數 z 等於 c；這事可寫成下面的等式：

$$c=f(a,\ b).$$

如果讓自變量之一，例如 x，保持常數值 $x=a$，而另一自變量 y 仍算作是可變的，那末函數 $z=f(x,\ y)$ 就變成一個變量 y 的函數：$z=f(a,y)$。同樣若使 y 保持常數值 $y=b$，則得一個變量 x 的函數：$z=f(x,\ b)$.

若雙變量函數的每一對所考慮的宗標值對應於一個函數值時，那種雙變量函數叫做單值的；若某一對宗標值所對應的函數值多於一個時，函數叫做多值的。

例如，下列兩個函數

$$z=ax+by+c,\ z=e^{xy}\sin\ (x+y)$$

是單值的，而函數

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=\text{Arcsin}\ (x-y)$$

是多值的，並且其中第一個是雙值函數，第二個是《無限多值》函數。

以後我們只討論單值函數，不再另外聲明。在定義函數的解析式子有多值性的情形下，運用數學解析法時，都必須特別選擇該函數的單值分枝。

跟單變量函數一樣，多變量函數也常可看作自變量的複合函數。設 u 是宗標 $t,\ v,\ w,\cdots$ 的函數：

$$u=\varphi\ (t,\ v,\ w,\cdots),$$

而 $t,\ v,\ w,\cdots$ 本身又是自變量 $x,\ y,\ z,\cdots$ 的函數：$t=\psi(x,\ y,\ z,\cdots)$, $v=\xi(x,\ y,\ z,\cdots)$, $w=\eta(x,\ y,\ z,\cdots)$, ⋯於是 u 是自變量 $x,\ y,\ z,\ \cdots$ 的函數。它是由一連串函數所構成的（串聯給出法）。函數

$$u=\varphi[\psi(x,\ y,\ z,\cdots),\ \xi(x,\ y,\ z,\cdots),\ \eta(x,\ y,\ z,\cdots),]=F(x,\ y,z,\cdots)$$

叫做自變量 $x, y, z, \cdots$ 的複合函數（函數的函數）。例如，$z=e^t\sin v$，其中 $t=xy, v=x+y$，z 就是兩個自變量 x 及 y 的複合函數。

自變量 $x, y, \cdots$ 的複合函數，可以通過不止一個而有兩個或更多個中間環節表示出來。例如若 u 取決於變量 $t, v, \cdots$，而 $t, v, \cdots$ 用變量 $\tau, \nu, \cdots$ 的函數給出，其中 $\tau, \nu, \cdots$ 本身又是自變量 $x, y, \cdots$ 的函數，那末 u 是通過兩個中間環節（兩組宗標 $t, v, \cdots$ 及 $\tau, \nu, \cdots$）而給出的自變量 $x, y, \cdots$ 的複合（鏈式）函數。

用 n 個中間宗標直接表達出來的複合函數，事實上可能是 m 個 $(m\neq n)$ **自變量**的函數。例如，雙變量函數

$$z=f(u, v)$$

的宗標 u 及 v 爲自變量 x 的函數時：$u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$，則 z 就是**單個**自變量 x 的複合函數：

$$z=f(\varphi(x), \psi(x))=F(x).$$

在數學解析及其應用上所遇到的複合函數中，作爲中間環節的函數常常是自變量的基本初等函數。

若多變量函數的數值可以從自變量及任意常數用有限次代數運算求出時，這種多變量函數叫做代數函數。(例如：$z=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x^2-y^2+1}$.)。多變量的代數函數也可以仿照單變量的代數函數那樣來作一般定義（見第一章 $n^\circ 18$）。

當代數函數的值可用自變量及任意常數間的加、減、乘、除、及整數次乘冪求得時，那種代數函數叫做有理函數。（例如：$z=\dfrac{3x^2-5xy+1}{x^2y-y^2-1}$）。除此以外的代數函數叫做無理函數。當有理函數中施行於自變量的各種運算不包括除法時，那種有理函數叫做整函數或多項式。（例如：$z=3x^3y-5x^2y^2-y^3+xy-1$）. 一次多項式或線性函數由於其簡單的緣故，所以特別來得重要；這就是能寫成下列形式的函數：

$$z=ax+by+c,\ u=ax+by+cz+d \text{ 等等。}$$

($a, b, c,\cdots$是常量，$x, y,\cdots$是自變量)。

若我們只對多變量函數的某一個或某一組變量來說，則該函數的類別僅看所論那個變量或那組變量的運算性質而定。例如函數 $z=3x^2e^y-2x\sin y+y^2$ 是 x 的多項式，但對 y 來說它是個非代數函數。把它當作 x 及 y 兩者的函數來看時它也是個非代數函數。

153. 多變量函數的幾何意義。 表示單變量函數的幾何意義時，我們用備有直角坐標系的**平面**。要相仿地表示雙變量函數的幾何意義時，我們顯然必需利用**空間**。因爲定義雙變量函數的方程中含有三個變量，而要表示三個變量就得用空間坐標系中的三個坐標軸。我們以後要用一般解析幾何學中的直角空間坐標系（圖 1）。

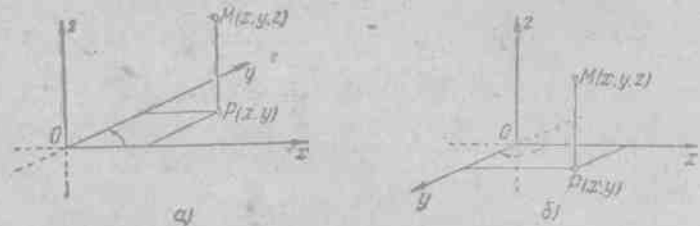

圖 1

但這裡必須說明一件重要的事。這是由於空間（如同在平面內一樣）有兩種根本不同的直角坐標系。這兩種坐標系中坐標軸具有彼此不同的指向（相對方向）。在圖 1 中標有 a）的是所謂右手坐標系，標 б）的是左手坐標系。在右手坐標系中，如果我們照 Oz 軸的正方向站着，那末當正半段 Ox 軸循最短途徑轉到正半段 Oy 軸的位置上時，其所循轉動方向跟時針的轉動方向相反。在左手坐標系中，這轉動方向就跟時針的轉動方向相同。如果拿手上的大拇指食指中指依次作爲 Ox, Oy, Oz 軸，那末右手的這三個指頭就形成右手坐標系，左手的三個指頭就形成左手坐標系。我們還可以拿一個實例來說明：如

果把坐標系從 Ox 軸（循最短途徑）轉到 Oy 軸的過程中，同時再把它朝Oz軸正方向推進，那末右手坐標系就會形成右螺旋動作（《右旋螺絲》），而左手坐標系就會形成左螺旋動作（《左旋螺絲》）。右螺旋動作可以拿右旋開瓶塞鑽的動作當做例子，我們知道要右旋開瓶塞鑽鑽到塞子裡面去時必須把它朝右旋轉；同樣要把左旋開瓶塞鑽鑽到塞子裡去時必須把它朝左旋轉，這種動作可以作為左螺旋動作的例子。Ox, Oy, Oz 三軸為任意方向時所成的坐標系，只要繞原點 O 旋轉（並加以平移）後，就能跟兩個坐標系（右手的或左手的）之一相重合。不過我們却不能靠這種變換動作使右手坐標系與左手坐標系兩者彼此重合。

在數學解析及解析幾何的許多問題中，不管用哪一種（右手的或左手的）坐標系都沒有關係。但在有些問題中，由所選坐標系定出的空間《指向》，是很重要的。由於一般用的平面坐標系是右手系（從平面上看去），所以空間坐標也取右手系。並且為了使作出的圖更加清楚起見，我們常把圖 1a 中的右手坐標系繞Oz軸旋轉90°（見圖2），使圖紙的平面與平面 yOz 相合。

設已給兩個自變量 x 及 y 的函數 z，**則凡橫坐標及縱坐標各等於自變量值 x 及 y，而竪坐標等於對應函數值 z 的各點，其幾何軌跡叫做**雙變量函數的幾何形狀或即所謂**雙變量函數的圖形**。自變量x及y的每一對數值在平面 xOy 上定出一點 $P(x, y)$；在點P處所作垂直於平面 xOy 且表示函數值的直線的端點，乃是表示一對自變量值及函數值三者的點 $M(x, y, z)$（見圖2）。對應於一切可能的(x,y)值（換言之，對應於平面 xOy 上點 P 的一切可能位置）的空間中所有這種點M的全體，形成了函數的幾何圖形。在通常情況下這幾何圖形是某個曲面。

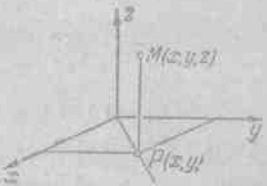

圖 2

反過來說，在備有坐標系的空間中給出曲面之後，就建立了兩個自變量 x及 y 的某一函數 z。因為，這曲面上點的竪坐標可由

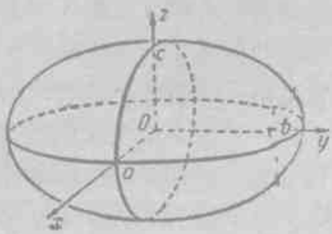

圖 3

其橫坐標及縱坐標來決定，也就是說，曲面上點的豎坐標是橫坐標及縱坐標的函數。所以，**雙變量函數的圖形表示法是由在備有坐標系的空間中給出曲面來實現的。**

如果函數用解析式 $z=f(x, y)$ 來表示，那末代表該函數的曲面上的點顯然能滿足這等式，於是可知，這式子便是曲面的方程。反過來說，每個曲面的方程可以把豎坐標 z 給成為橫坐標 x 及縱坐標 y 的某個函數。

例如，函數

$$z=\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}$$

的圖形是橢球面（圖3），其中心在原點，半軸長為 a, b, c，且各位於 Ox, Oy, Oz 軸上。因為關係式

$$z=\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}\quad\left(\text{或}\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right)$$

就是這橢球面的方程。函數

$$z=x^2+y^2$$

表示旋轉拋物面（圖 4），因這拋物面的方程是 $z=x^2+y^2$. 線性函數

$$z=ax+by+c$$

表示平面；特別是對應於方程 $z=c$（c 為常數）的乃是平行於坐標面 xOy 的平面。

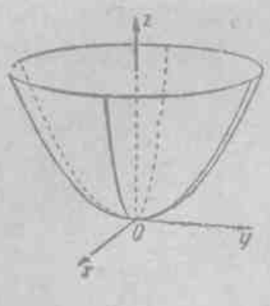

圖 4

所以，正如單變量函數與平面曲線之間的關係一樣，雙變量函數與空間曲面之間也有互相對應關係：**每個函數可用某個曲面表示，每個曲面定出某個函數。**

顯然，函數的單值性在幾何上表示為：垂直於平面 xOy 的任一

直線與表示函數的曲面相交不多於一點。

根據上面所講關於雙變量函數的幾何表示法，可以給出多變量函數的同樣的幾何意義。拿單變量函數 $y=f(x)$ 來說，它的自變量可用在直線（自變量軸）上變動的點 $P(x)$ 來表示，而函數 y 可用在點 P 處垂直於自變量軸的一段直線來表示。

在雙變量函數 $z=f(x, y)$ 的情形下，兩個宗標 x 及 y 的全體也可以用點 $P(x, y)$ 來表示，不過這時的點 $P(x, y)$ 已在平面（自變量平面）上變動，而函數 z 則可用在點 P 處垂直於該平面的一段直線來表示。

由此可見，在以上兩種情形下我們都可以把函數看作是點 P 的函數：

$$y=f(P),\ z=f(P),$$

不過在第一種情形下的點 P（函數的宗標）祇在直線上變動，而在第二種情形下的點 P 在平面上變動。

一般說來，**如果點 P 的每個所考慮的位置對應着一個量的確定值，該量就叫做動點 P 的函數。**

三個自變量的函數也可以看作是動點 $P(x, y, z)$ 的函數，不過這時的點在三維空間（通常空間）內變動：

$$u=f(P)=f(x, y, z).$$

講到這種函數的幾何表示法時，那末仿照單變量函數與雙變量函數的說法，就必須要有四維空間才行。講到四維空間我們在這裡應該理解爲 x, y, z 及 u 四者一切可能值的總體。而這四維空間內的點無非就是包括 x_0, y_0, z_0, u_0 四者的某一批數：$M(x_0, y_0, z_0, u_0)$。於是三維空間內點 $P(x, y, z)$（函數的宗標）的每一所論位置就對應着四維空間內的一點 $M(x, y, z, u)$，而該點 M 則表示三個宗標值及其對應函數值四者的總體。

對於四個自變量五個自變量的函數及一般任意個自變量的函數來說，情形也相類似。

n 個自變量 $x, y, z, \cdots t$ 的函數 u 是 n 維空間內的動點 P 的函數：

$$u=f(P)=f(x, y, z, \cdots t).$$

不過即使就雙變量函數來說，已經由於我們對於空間直觀能力的限制與不可能描出空間的緣故，而不易直接應用雙變量函數的幾何意義。所以我們研究雙變量或多變量函數時，通常總想法把它化成單變量函數的研究（見 $n^{\circ}158$）。

設已給函數 $z=f(x, y)$. 假定自變量之一（如 x）保持不變：$x=a$. 這樣就限制了點 $P(x, y)$ 的自由變動——點 $P(x,y)$ 祗可能在平面 xOy 上的直線 $x=a$ 上移動。於是得單變量函數：

$$z=f(P)=f(a, y);$$

條件 $x=a$ 在幾何上的意義是：表示函數 $z=f(x, y)$ 的曲面 S 爲平面 $x=a$ 所截；假定這時在截面上得一平面曲線 AB（圖 5）。等式 $z=f(a, y)$ 是曲線 AB 在平面 yOz 上正投影的方程，也就是，這正投影是函數 $z=f(a, y)$ 的圖形。

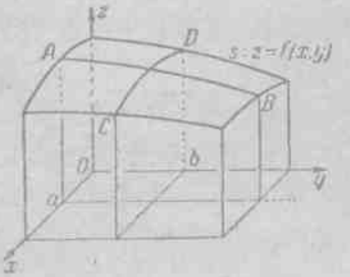

圖 5

同樣，函數

$$z=f(P)=f(x, b)$$

的宗標 P 祗能在平面 xOy 上的直線 $y=b$ 上移動。如果曲面 S 與平面 $y=b$ 截成的平面曲線是 CD（見圖 5），那末單變量函數 $z=f(x, b)$ 的圖形就是曲線 CD 在平面 xOz 上的正投影。

§ 2. 函數的最簡研究

154. 函數的定義域. 如果平面 xOy 上的點 $P(x, y)$（也就是說，一對的數值 x, y）按某種法則對應着函數 z 的值，那末我們說函數 $z=f(x,y)$ 在點 $P(x, y)$ 處有定義。平面 xOy 上凡是使函數有定義的一切點的整體稱爲該函數的定義域。雙變量函數的定義域當然可能是平面上的任何一批點，但是我們所考慮的函數大都定義在一條或數條曲線所圍成的平面的某部份上（在該部分平面內的個別點或個別線上函數可能沒有定義）。

凡是爲一條或數條曲線所圍成的一部份平面，不管它是閉合的或是延展到無窮遠處的都叫做域 *)**，域的界線叫做它的邊界。**

*) 在近世點集論（及函數論）中，域的概念具有更精確的意義。

如果域跟邊界一起考慮，那種域叫閉域；如果邊界不包括在域內，那種域叫開域（在無需區別這兩種情形的問題裡，我們祇說《域》）。

如同在自變量軸上的區間可用不等式表示的情形一樣，平面上的域可用一個或幾個不等式來定出。

例如：

1）拿各邊在直線 $x=a$，$x=b$，$y=c$，$y=d$ 上的矩形（圖 6）來說。這矩形所圍成的域 D 可用下列不等式定出：

$a\leqq x\leqq b$，$c\leqq y\leqq d$（閉域）

或　$a<x<b$，$c<y<d$（開域）

因為位於域 D 上的任一點的坐標滿足這些不等式，反過來說，滿足這些不等式的任何二數 x 及 y 乃是域 D 上某點的坐標。

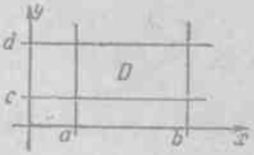

圖　6

2）設域 D 以中心在原點且半徑等於 r 的圓周為界。則域 D 可用下列不等式定出：

$x^2+y^2\leqq r^2$（閉）

$x^2+y^2<r^2$（開）

位於第一象限內的那部份圓，可用如下的一組不等式給出：

$x^2+y^2\leqq r^2$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$

或 $x^2+y^2<r^2, x>0$，$y>0$。

3）以 Ox 軸，第一象限坐標角平分線及直線 $x=a$ 為界的域 D（直角三角形，見圖 7），可用下列不等式定出：

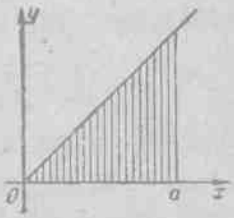

圖　7

$$0\leqq y\leqq x,\ 0\leqq x\leqq a,\ 或\ 0<y<x,\ 0<x<a.$$

4）取 Oy 軸右邊的全部半平面作為域 D（圖 8）。這域顯然可用不等式 $x\geqq 0$（或 $x>0$）給出。而不等式 $x\geqq 0, y\geqq 0$（或 $x>0, y>0$）則定出 xOy 平面的第一象限。（全部平面 xOy 用不等式 $-\infty<x<\infty$，$-\infty<y<\infty$ 作為條件而給出）。

凡是為一個或幾個曲面所圍成的一部份空間叫做空間域。空間域也跟平面域一樣用不等式給出。但我們不預備深入考慮這問題。也不再討論高於三

維空間的空間域。

三變量函數的定義域通常是個空間域，其中使函數無定義的個別點個別線或個別面可能是例外。

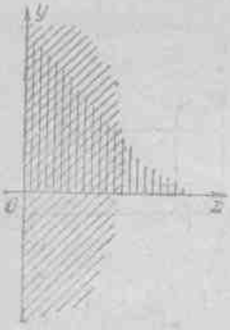

圖 8

如果我們只用一個解析式子給出函數 $z=f(x, y)$ 而沒有任何附加條件，那末解析式子的《定義域》就算做是這種函數的定義域。而所謂解析式子的定義域，乃是指使該式子具有確定（實）數值的所有點的全體。

例如式子

$$\sqrt{r^2-x^2-y^2}$$

的定義域是圓 $x^2+y^2\leqq r^2$；

任一多項式的定義域是全部 xOy 平面；式子

$$\sqrt{x-y}\ \ln(xy^2)$$

的定義域（圖9中用線條標出）用以下一組不等式給出：

$x\geqq y,\ x>0,\ y\neq 0.$

據上所說，用式子

$$z=\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}}$$

給出的函數定義於圓 $x^2+y^2\leqq 1$ 內，其中 (0, 0) 點除外；函數

$$z=\frac{\sin(xy)}{x-y}$$

定義於全部 xOy 平面上，其中直線 $y=x$ 除外。

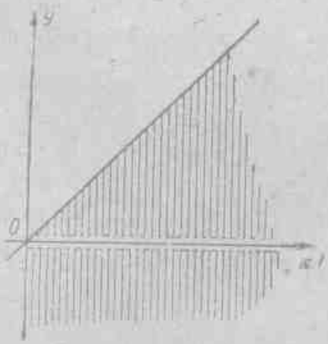

圖 9

現在假設 $f(x, y)$ 用解析式子及預先給定或由所論問題本質決定的某**附加條件**而給出。這時 $f(x, y)$ 的定義域通常跟所講解析式子的定義域不同。例如設給定 $z=f(x, y)$ 如下：對不相等的一切 x 及 y 來說 z 等於 $(x-y)\sin\dfrac{1}{x-y}$，當 x 及 y 值相等時 z 等於零：

$$z=f(x,\ y)=\begin{cases}(x-y)\sin\dfrac{1}{x-y} & (x\neq y),\\ 0 & (x=y).\end{cases}$$

這裡式子 $(x-y)\sin\dfrac{1}{x-y}$ 的定義域是把直線 $y=x$ 除外的全部 xOy 平面（在直線 $y=x$ 上的點處，正弦函數的宗標 $\dfrac{1}{x-y}$ 無意義），而函數 $f(x,\ y)$ 的定義域是全部平面 xOy.

從另一方面講，具體問題中的函數用解析式子表出時，解析式子的定義域常大於問題的實際條件所許可的定義域。例如取函數 $f(x,y)$ 表示 $x,\ y$ 爲邊的矩形面積:

$$f(x,\ y)=xy.$$

這裡式子 xy 定義於全部平面 xOy 上，但當 x 或 y 爲負值時考慮這函數便無意義。因此所論函數的定義域祇是第一象限：　$x\geqq 0,\ y\geqq 0$.

函數定義域中每一點對應着表示該函數的曲面上一點；在函數沒有定義的點處就並不對應着曲面上的任何點。

155. 極限概念。 現在講雙變量函數 $z=f(x,\ y)$ 當其宗標即點 $P(x,\ y)$ 趨近於（無限接近於）點 $P_0(x_0,\ y_0)$ 時、的極限概念。所謂點 $P(x,\ y)$ 無限趨近於點 $P_0(x_0,\ y_0)$ 的意思是指把點 $P(x,y)$ 移到以 P_0 爲中心而半徑爲任意小的圓內。通常以平面上某一點爲中心以 r 爲半徑的圓叫做該點的 r-隣域。因此我們要把點 P 移到 P_0 的 r-隣域內，其中 r 爲任意小，並考察這時的對應值 $f(x,y)$（函數 $f(x,y)$ 當然應在點 P_0 的某一隣域內有定義）。點 P_0 的 r-隣域爲無窮小（動點 P 與定點 P_0 間距離 $\rho=PP_0$ 無窮小）的這個條件相當於如下兩個條件：點 P 的可變坐標趨近於點 P_0 的對應坐標：　$x\to x_0,\ y\to y_0$，也就是 $\Delta x=x-x_0$ 及 $\Delta y=y-y_0$ 爲無窮小。

如果把雙變量函數看作平面上點 P 的函數，那末雙變量函數的極限概念定義跟單變量函數的極限定義基本上並無不同之處。所以

如果當兩點間的距離 $\rho=PP_0$ 爲無窮小時得差數 $A-f(P)$ 爲無