高等学校专科试用教材

高等数学教程

上册

赵新泽 周光明 主编

西南交通大学出版社

高等学校专科试用教材

高等数学教程

上册

廖玉麟　周泰文　杨乐栋　黄新甫
周世琼　周新国　李天然　编

西南交通大学出版社

(川)新登字 018 号

内 容 提 要

全书分上下两册共十五章。上册是一元函数微积分学和微分方程。下册是向量代数与空间解析几何，多元函数微积分，级数，场论和拉氏变换等内容。

本书是参照国家教委制订的高等工程专科学校高等数学的基本要求，并充分考虑了专科的特点而编写的。内容取舍比较适中，叙述分析简明清楚，例题和习题的选配比较恰当。并注意了知识面要广，方法要多，应用性强，理论方面适当减弱。

本书可作为高等学校专科“高等教学”试用教材，也可供具有高中(或中专)文化水平的实际工作者和知识青年学习之用。

高 等 数 学 教 程

GAODENG SHUXUE JIAOCHENG

赵新泽 周光明 主编

※

西南交通大学出版社出版

(四川 成都 九里堤)

新华书店经销

长沙铁道学院印刷厂印刷

※

开本:787×1092 1/32 印张:12.75

字数:279 千字 印数:1—6200

1991 年 8 月第 1 版 1991 年 8 月第 1 次印刷

ISBN7-81022-272-4/O・029

定价: 6.85 元

前　言

本书是参照国家教委制订的高等工程专科学校高等数学的基本要求和专科的特点而编写的。分上下两册，共十五章。上册内容是：一元函数微积分和微分方程等七章；下册内容是：向量代数与空间解析几何，多元函数微积分，级数，场论和拉氏变换等八章。场论和拉氏变换是为有的专业需要而编写的，供选用。

本书原则上注意作到：知识面要广，方法要多，加强应用，适当减弱理论。内容取舍适当，叙述分析简明清楚，尽量作到深入浅出，好教好学。

本书由长沙铁道学院，长沙交通学院，株洲工学院，湖南城建专科学校，彭城大学等联合组织编写。由赵新泽、周光明主编，尹侃副教授主审。参加编写的有长沙铁道学院：廖玉麟（第一章）、周泰文（第二章）、杨乐栋（第三章）、刘启邦（第十二章）、周光明（第十五章）、王朋（全部附录）；长沙交通学院：黄新甫（第四章）、周世琼（第五章）、周新国（第六章）、高纯一（第十一章）；株洲工学院：张亮（第八章）、杨禄源（第九章）、董景光（第十章）；湖南城建专科学校：李天然（第七章）、张新宇（第十三章）；彭城大学：王樵（第十四章）等。

由于水平有限，难免有欠当之处，敬请读者指正。

编　者

1990年10月

目　　录

第一章　函数 极限 连续

简单地说，高等数学是“关于变量的数学”。函数关系是变量之间的一种依赖关系，极限方法是研究变量的变化趋势的一种基本方法，连续性则是函数的一种重要性态，因此，它们是高等数学中的基本概念，也是微积分学的基础。本章将在复习函数概念的基础上，着重介绍函数的极限和连续性。

§1　函　　数

一、函数及其性质

在人们观察某种自然现象或研究某一技术过程中，常会遇到各种各样的量，有的量变化着，即可以取不同的数值；有的量则不变，也就是保持一定的数值。前者叫做变量，后者称为常量。通常用字母a、b、c等表示常量。用字母x、y、t等表示变量。在本教程中所研究的常量或变量都是实数。

在同一个自然现象或技术过程中，常常同时有若干个变量在变化着，它们是相互依赖、相互制约着的，变量之间的这种关系之一，便是所谓的函数关系。

定义　设在某一问题的研究过程中有两个变量x和y，当变量x在其变化范围内任取一个确定的数值时，变量y按照一定的法则总有确定的数值与它对应，则称变量y是变量x的函数。

变量x称为自变量，y叫做因变量。x的变化范围叫做这个函数的定义域。通常用记号$y=f(x)$、$y=\varphi(x)$等表示y为x的函数。其中"f"、"φ"等表示y与x之间的对应法则，即函数关系。例如，$y=f(x)=x^2-2x+3$。这时记号"f"表示将括号内的x平方减去x的2倍再加上3后就得到函数值y，这种用数学式子表示因变量与自变量的对应法则的方法叫做解析表示法，是常用的一种方法，除此之外，函数还可以用表格法和图形法来表示，工程上常用这种表示方法。

若自变量x取某一数值x_0时，函数有确定的值与之对应，则称函数在x_0处有定义。因此，函数的定义域就是使函数有定义的实数的全体。函数的定义域常用区间来表示。

例1 已知函数$f(x)=x^2-2x+5$，求$f(1)$及$f(t+1)$。

解 当$x=1$时，得 $f(1)=1^2-2\times1+5=4$；

当$x=t+1$时，得 $f(t+1)=(t+1)^2-2(t+1)+5=t^2+4$。

例2 求函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域。

解 要使该函数有定义，必须$1-x^2\geqslant0$，即$1\geqslant x^2$，得定义域为 $-1\leqslant x\leqslant1$，或写成闭区间$[-1,1]$。

例3 求函数$y=\dfrac{1}{x-1}+\lg(x-2)$的定义域。

解 函数y为两个函数 $\dfrac{1}{x-1}$ 与$\lg(x-2)$的和，而$\dfrac{1}{x-1}$的定义域是$x-1\neq0$，即$x\neq1$，或写为区间$(-\infty,1)$与$(1,+\infty)$；$\lg(x-2)$的定义域是$x-2>0$，即$x>2$，或写成$(2,+\infty)$。只有这两个函数都有定义的区间，函数y才有定义，所以，y的定义域是它们定义域中的相同部分，从而

[illegible]的定义域为：(2，+∞)。

函数有四个主要性质：

1．单调性 若对于区间(a,b)内的任意两点x_1、x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内是单调增加的（如图1—1）；若对于(a,b)内的任意两点x_1、x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间(a,b)内是单调减少的（如图1—2）。

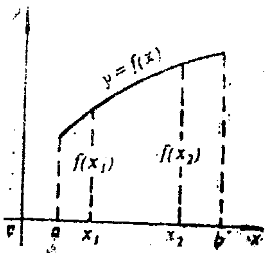


图 1—1

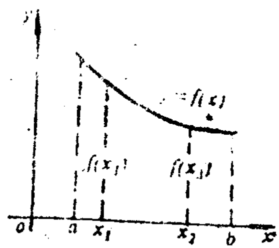


图 1—2

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

例4 函数$f(x)=x^2$在区间$[0,+\infty)$上单调增加，而在区间$(-\infty,0]$上单调减少，但在区间$(-\infty,+\infty)$内却不是单调函数（如图1—3）。

例5 函数$y=x^3$在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的（图1—4）。

2．奇偶性 若函数$f(x)$对于定义域内的任意x都满足$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；若满足$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数。

偶函数的图形是对称于y轴的（如图1—5），奇函数的图形是对称于坐标原点的（如图1—6）。

例如，例4中$f(x)=x^2$为偶函数，例5中$y=x^3$是奇函数。

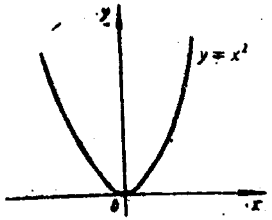


图 1—3

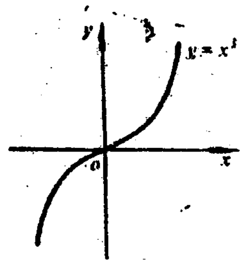


图 1—4

又如$f(x) = \cos x$是偶函数，$f(x) = \sin x$为奇函数，而$f(x) = \cos x + \sin x$是非奇非偶函数。

例6 证明$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}\sin x$是奇函数。

证 因为

$$f(-x) = \sqrt{a^2 - (-x)^2}\sin(-x)$$
$$= -\sqrt{a^2 - x^2}\sin x = -f(x)$$

由奇函数的定义知，$f(x)$是奇函数。

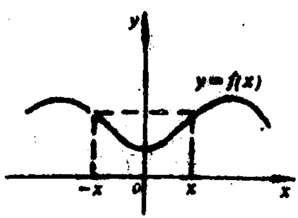


图 1—5

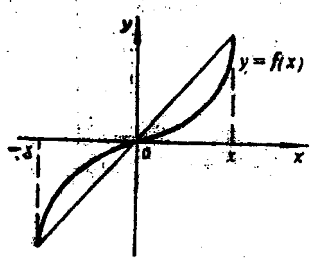


图 1—6

3．周期性　对于函数$f(x)$定义域内的任一值x，如果存在一个不为零的常数l，使得$f(x + l) = f(x)$成立，则称$f(x)$为周期函数，满足这个恒等式的最小正数l称为函数的周期。

例7 判定函数$f(x) = \sin^2 x$是否为周期函数？若是，并

求其周期。

解　因为

$$f(x+k\pi)=[\sin(x+k\pi)]^2=(\pm\sin x)^2$$
$$=\sin^2x=f(x),\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots。$$

故$f(x)=\sin^2x$是周期函数，其周期为π。

4．有界性　设函数$f(x)$在区间Ⅰ内有定义（Ⅰ可以是$f(x)$的整个定义域，也可以是定义域的一部分），若存在正数M，使得在区间Ⅰ上的一切函数值$f(x)$，满足$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在区间Ⅰ上有界。$f(x)$叫做区间Ⅰ上的有界函数。若在区间Ⅰ上不存在这样的M，则称$f(x)$在Ⅰ上无界。

例如，函数$y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内的一切函数值均有$|\sin x|\leqslant1$，所以，$y=\sin x$在该区间内是有界的。函数$y=1/x$在区间$(0,1)$内是无界的，因为在该区间内找不到满足$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$的$M$，但是在区间$(1,2)$内又是有界的，因为在$(1,2)$内$y=\dfrac{1}{x}$满足$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$。

二、基本初等函数

在我们所常见的函数中，最简单的函数是所谓的基本初等函数。有如下几种基本初等函数。

1．常数函数　$y=C$

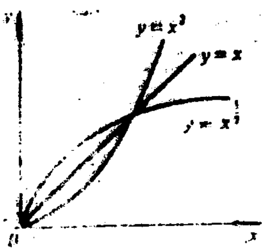
常数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$。不论自变量x取何值，函数y取确定的常数值C，其图形是一条垂直于y轴的直线（见图1—7）。

2．幂函数　$y=x^\mu$（μ为实数）

图 1—7

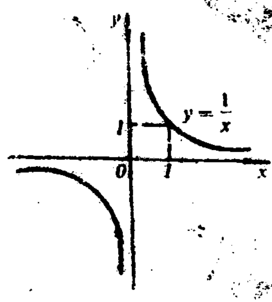
在科技领域中，很多规律都可用幂函数来表示。幂函数$y=x^{\mu}$的定义域随μ不同而异。但在区间$(0,+\infty)$内无论μ为何值，函数总是有意义的。该函数的性质，在$\mu>0$时与$\mu<0$时差异很大。从图形上看可以分为两类：

当μ取正值而$\mu>1$时，μ愈大曲线上升得愈快（如图1—8）；当μ取负值而x增加时，y减小（如图1—9）。即$\mu>0$时，$y=x^{\mu}$为增函数；当$\mu<0$时，$y=x^{\mu}$为减函数。另外从图中可看出，所有的曲线都经过点$(1,1)$。



$\mu>0$

图1—8



$\mu<0$

图1—9

2. 指数函数　$y=a^x$（a为常数且$a>0$，$a\neq1$）

指数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$。因$a>0$，故无论x取任何实数，总有$a^x>0$，即函数值永远为正。又$a^0=1$，所以指数函数的图形总在x轴的上方且通过点$(0,1)$（如图1—10）。

当$a>1$时，指数函数是单调增加的；

当$0<a<1$时，指数函数是单调减少的。

4．对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$

对数函数的定义域是$(0, +\infty)$，其图形如图1—11所示

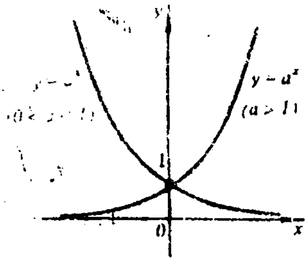


图1—10

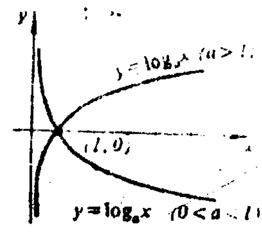


图1—11

当$a>1$时，在区间$(0, +\infty)$内函数单调增加，在开区间$(0,1)$内函数值为负，在$(1, +\infty)$内函数值为正；当$0<a<1$时，函数在区间$(0, +\infty)$内单调减少，在开区间$(0,1)$内函数值为正，而在区间$(1, +\infty)$内函数值为负。

5．三角函数

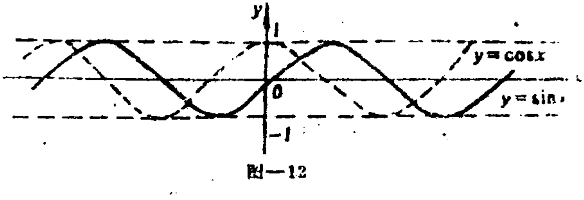
常用的三角函数有

$y=\sin x$ （如图1—12）；

$y=\cos x$ （如图1—12）；

$y=\mathrm{tg}\,x$ （如图1—13）；

$y=\mathrm{ctg}\,x$ （如图1—14）。



图—12

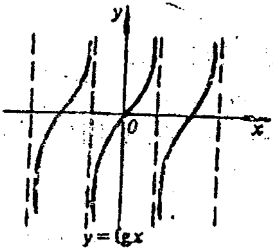


图1—13

图1—14

正弦函数和余弦函数的定义域均为$(-\infty, +\infty)$，它们都是以2π为周期的周期函数，而且函数值的绝对值都小于等于1，即

$$|\sin x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数。

正切函数的定义域为$x \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$的全体实数，余切函数的定义域是$x \neq k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$的全体实数，它们都是以$\pi$为周期的周期函数，且均为奇函数。在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内$y=\operatorname{tg}x$是增函数，在$(0, \pi)$内，$y=\operatorname{ctg}x$是减函数。

6．反三角函数

常用的反三角函数是

反正弦函数　$y=\operatorname{Arcsin}x$（图1—15）；

反余弦函数　$y=\operatorname{Arccos}x$（图1—16）；

反正切函数　$y=\operatorname{Arctg}x$（图1—17）；

反余切函数　$y=\operatorname{Arcctg}x$（图1—18）。

这些反三角函数都是多值函数，即对于自变量x的一个

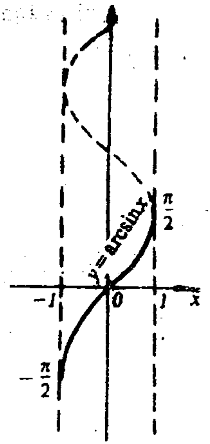


图1—15

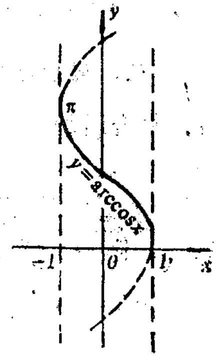


图1—16

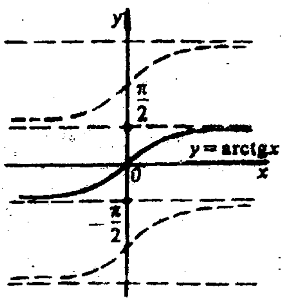


图1—17

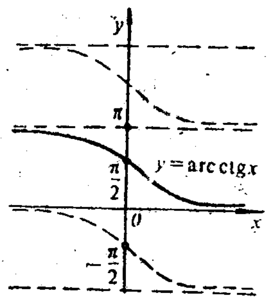


图1—18

值，因变量y有多个值与它对应。为了研究方便，我们选取这些函数的单值支，称为主值支，分别记为$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\mathrm{arctg}x$，$y=\mathrm{arcctg}x$，如图形中实线部分。

$\mathrm{Arcsin}x$和$\mathrm{Arccos}x$的定义域为$[-1,1]$，$\mathrm{Arctg}x$与$\mathrm{Arcctg}x$的定义域为$(-\infty,+\infty)$。各函数的主值支都是单

值单调的，在它们各自的定义域上，$\arcsin x$和$\mathrm{arctg}\, x$是单调增加的，$\arccos x$与$\mathrm{arcctg}\, x$是单调减少的。

三、复合函数与初等函数

1. 复合函数

在同一现象中，两个变量的关系有时不是直接的，而是通过另一个变量联系起来。例如，以初速v_0向上抛一质量为m的物体，则动能E_k是速度v的函数：

$$E_k = f(v) = \frac{1}{2}mv^2,$$

而速度v又是时间 t 的函数（略去空气阻力）：

$$v = \varphi(t) = v_0 - gt$$

这样，通过中间变量v，动能E_k就成了时间t的函数：

$$E_k = F(t) = f[\varphi(t)] = \frac{1}{2}m(v_0 - gt)^2$$

一般地，设$y = f(u)$，而$u = \varphi(x)$且$\varphi(x)$的值域的一部分或全体包含在$f(u)$的定义域内，则通过变量u，y就成为x的函数，记为 $y = f[\varphi(x)]$。这时我们称 $y = f[\varphi(x)]$ 是由$y = f(u)$和$u = \varphi(x)$复合而成的复合函数，u称为中间变量。一般的复合函数往往要经过若干次复合步骤而成，如果对于一个复合函数，能够看出是由哪几个简单函数复合而成时，则对这个复合函数的研究可变成对那几个简单函数及其关系的研究。因此熟练掌握把一个复合函数分解为几个简单函数的技巧是很重要的。

例8 函数$y = \mathrm{arctg}\,\frac{x^3}{2}$是由下列简单函数

$$y = \mathrm{arctg}\, u, \qquad u = \frac{1}{2}x^3$$