现代数学基础丛书 133

非线性波动方程的现代方法

（第二版）

苗长兴 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书 133

非线性波动方程的现代方法

(第二版)

苗长兴 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书的主旨是利用调和分析的现代理论(特别是 Fourier 限制型估计、可微函数空间的 Littlewood-Paley 刻画、Fourier 局部化技术等)研究非线性波动方程的适定性与散射理论. 除了第一版中涉及的在共形变换或其他变换群下的不变量、经典 Morawetz 估计、Strichartz 估计、非线性波动方程弱解的正则性与唯一性、光滑解与能量解的适定性、临界波方程的散射性理论之外, 在第二版中增加了如下两个方面的内容: 其一是采用时空乘子方法结合加权的 Sobolev-Hardy 型不等式, 建立不依赖于非线性项及空间维数的 Morawetz 型估计, 通过能量的局部化及线性波的分离、Bourgain 的能量归纳技术, 证明了临界及次临界 Klein-Gordon 方程的散射性理论; 其二是对于具双 Schrödinger 结构的高阶 Klein-Gordon 方程(即 Beam 方程, 它的特点是既没有有限传播速度, 也没有独立的质量守恒), 通过引入不同形式的容许关系, 建立局部与整体的 Strichartz 估计. 利用 Tao 的频率局部化方法建立广义的几乎有限传播速度, 进而建立高阶 Klein-Gordon 方程能量散射理论. 本书的特点是将调和分析方法与现代数学物理方法有机结合, 反映这一核心数学领域的最新研究成果与研究进展, 特别是利用 Bourgain 的能量归纳技术与 Tao 的频率局部化方法, 给出了非线性波动方程、Klein-Klein 型方程(含高阶情形)的经典研究的统一处理.

本书可供理工科院校数学、应用数学专业的高年级大学生、研究生、教师以及相关的科技工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性波动方程的现代方法/苗长兴著. —2 版. —北京: 科学出版社, 2010

(现代数学基础丛书; 133)

ISBN 978-7-03-027037-5

I. 非… II. 苗… III. 非线性方程: 波动方程-研究生-教材 IV. O175.27

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 045777 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005 年 12 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)
2010 年 4 月第 二 版 印张: 25 1/4
2010 年 4 月第二次印刷 字数: 484 000
印数: 3 001—5 500

定价: 76.00 元

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于“文化大革命”的浩劫已经被破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

第二版序言

本书的主旨是利用调和分析的现代理论 (特别是 Fourier 限制型估计、可微函数空间的 Littlewood-Paley 刻画、Fourier 局部化技术等) 研究非线性波动方程的适定性与散射理论. 内容主要涉及下面几个部分:

(1) 第 1~4 章、第 7 章保持了第一版第 1 ~ 5 章的写作风格与基本内容, 但对其进行了认真的修改, 并增加了一些注记, 以反映这些内容的最新进展及方便读者的阅读 (这已经得到了专家与读者的好评). 主要内容是研究在共形变换或其他变换群下的不变量、经典 Morawetz 估计, 借助于 Strichartz 估计研究非线性波动方程弱解的正则性与唯一性、光滑解与能量解的适定性、临界波方程的散射性理论、非线性 Klein-Gordon 型方程解的局部衰减性与低正则性, 其中用乘子方法详细讨论有关波动方程在共形变换或其他变换群下的不变量是同类专著中所没有的, 它在研究散射理论中的重要性也充分体现了本书的特色.

(2) 近年来, 非线性 Klein-Gordon 方程的散射性理论取得了重要进展, 特别是 Fields 奖得主 Bourgain 与 Tao 的工作. 因此, 用全书三分之一强的篇幅 (第 5, 6 章) 着重讲解 Bourgain 的新方法并用此统一处理临界及次临界 Klein-Gordon 方程的散射性理论. 采用时空乘子方法与加权的 Sobolev-Hardy 型不等式, 建立不依赖于非线性项及空间维数的 Morawetz 估计, 再结合能量的局部化及线性波的分离、Bourgain 的能量归纳技术, 证明了临界及次临界 Klein-Gordon 方程的散射性理论与低维空间中 Klein-Gordon 方程 ($n \leqslant 2$) 的散射性理论.

(3) 具双 Schrödinger 结构的高阶 Klein-Gordon 方程 (第 8 章, 占全书近五分之一), 即具有鲜明物理意义的梁方程 (beam equation), 其特点是既没有有限传播速度, 也没有独立的质量守恒, 在数学研究上具有很大的挑战性. 通过引入不同形式的容许关系, 建立局部与整体的 Strichartz 估计, 在此基础上首先建立整体适定性理论. 对于散射性理论, 除了利用 Bourgain 的能量归纳技术之外, 还必须采用 Tao 的频率局部化方法建立广义的几乎有限传播速度, 进而达到高阶 Klein-Gordon 方程能量散射的目标. 这部分内容综合利用了物理空间与频率空间的局部化技术, 充分体现了现代调和分析特别是 Littlewood-Paley 理论在现代数学物理研究的重要作用.

与第一版相比, 第二版的篇幅是其两倍, 其基本特点就是将调和分析方法与现代数学物理方法有机的结合, 反映了这一核心数学领域的最新研究成果与研究进展, 特别是利用 Bourgain 的能量归纳技术与 Tao 的频率局部化方法, 给出了非线

性波动方程、非线性 Klein-Gordon 方程的经典研究的统一处理. 本书的内容是作者近年来在香港中文大学数学科学研究所、中国科学院晨兴数学中心、北京大学、南京大学和中国科技大学主办的教育部数学研究生暑期学校、北京应用物理与计算数学研究所等授课讲稿的基础上, 经认真修改与增删而成. 作者不仅致力于数学内容的深刻性与数学主题的主流性, 而且强调其数学思想性, 无论文字讲解还是数学推导都非常详尽, 可以帮助读者很快进入这一领域研究的前沿. 鉴于国内这方面研究尚属起步阶段, 而在国际上则属于蓬勃发展的核心研究领域之一, 相信本书的出版, 将帮助国内年轻的学者很快进入这一领域的研究前沿, 经过刻苦努力, 做出一些国际上有影响的工作, 为中国成为世界数学强国做出贡献.

作　者

2009 年 3 月于北京

第一版序言

本书是以作者 2003 年在北京大学所作的数学特别讲座为基础, 经过增删整理而成. 作者试图用不太长的篇幅, 给出研究非线性波动方程的一些基本工具与方法, 特别是与调和分析、变分原理及现代物理密切相关的方法与技术. 鉴于上述理由, 去掉了作者原来在特别数学讲座中有关 Schrödinger 方程、三代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子与 Lip 边界上的椭圆边值问题等内容, 增加了作者在香港中文大学数学研究所所作的共形变换、乘子方法、Lagrange 方法及其在波动方程中的应用等内容. 本书选材的思路是以研究工具、研究方法为主线, 在内容安排上着力反映非线性波动方程特别是临界情形的最新研究进展, 在不同的层面阐述各种研究方法以及它们之间的相互联系. 为了使本书具有自封闭性、可读性, 避免与现有同类专著的重复, 用通俗的语言, 增加了附录: 函数空间嵌入定理的记忆方法, 以方便读者阅读与使用.

守恒律在数学物理的研究中起着重要的作用. 对于每一个自然现象的正确描述, 质量、动量、角动量是最基本的守恒量. 除此之外, 物理系统还常常具有其他守恒量, 例如, 电荷、同位旋等守恒积分. 众所周知, 对于任意一个保持物理状态 (作用量) 不变的连续整体变换 T, 一定存在一个守恒量或守恒积分. 以共形变换 (conformal transformations) 群为例, 在时空平移变换群及 Lorentz 变换群作用下的不变性就可分别得到能量、动量与角动量等基本的守恒量, 在相位变换下保持不变性就蕴涵着电荷守恒. 类似地, 在更一般的变换 (例如, 其母元是一般的一阶微分算子) 下的不变性可以获得更多的内蕴守恒积分与不变性. 基于上述理由, 我们在第 1 章中, 首先用乘子方法详细讨论了 Laplace 方程、非线性波动方程在共形变换群及一般变换群作用下的不变性及守恒积分. 特别, 取经典的 Morawetz 型乘子, 即径向导数的反称部分, 就可以获得经典的 Morawetz 型守恒积分及 Morawetz 估计 ($n \geqslant 3$). 另一方面, 还重点介绍了 Lagrange 变分方法, 通过对 Lagrange 密度泛函进行变分, 可以统一地给出 Laplace 方程、非线性波方程及非线性 Schrödinger 方程在各种变换群作用下的守恒积分. 特别需要指出的是, 通过构造时空径向导数的反称部分 (作为新的 Morawetz 型乘子), 可以建立新型的 Morawetz 估计, 这在临界非线性 Klein-Gordon 型方程、临界 Schrödinger 方程的散射性理论, 特别是低维情形 ($n = 1, 2$, 此时经典的 Morawetz 估计不成立) 的散射性理论研究中起着极其重要的作用.

第 2 章以非线性波方程为例, 详细介绍了基于正则化或 Galerkin 逼近的紧致

性方法. 在对非线性增长没有限制 (非聚焦情形) 的情形下, 得到了弱解的存在性及适当的正则性. 鉴于极限是在较弱的框架下进行, 这一过程本质上忽略了高频与高频的相互作用. 因此, 所得的解很难捕获应有的奇性 (远离无穷的高频部分的能量将在极限过程中消失). 一般来讲, 此弱解仅仅满足能量不等式. 弱解是否唯一是不清楚的. 欲使弱解唯一 (由此可推出能量等式与能量强解及其正则性), 需要限定 p 的增长条件. 此条件本质上又回到用 Strichartz 估计与压缩映射方法处理能量解所要求的条件. 为更好地阐述这一事实, 我们还对齐次 Besov 空间及线性方程的解在齐次 Besov 空间的 Strichartz 估计进行了详细的讨论, 刻意强调 Fourier 限制型方法 (Strichartz 估计) 在紧致性方法的作用及它们之间的联系.

第 3 章着重讨论了临界与次临界半线性波动方程 Cauchy 问题的光滑解的整体适定性 (非聚焦情形). 众所周知, 此问题源于 1961 年 Jörgen 的研究. 利用基本解的正性及压缩映射方法, Jörgen 证明了 $\mathbb{R}^3$ 中次临界半线性波动方程的整体存在性. 对于基本解失去正性的高维情形 ($3 < n \leqslant 9$), Brenner, Wahl, Pecher 等采用 Boot-strapping 方法建立了光滑解的整体适定性. 然而, 直到 1989 年, Grillakis 才解决了临界半线性波动方程 Cauchy 问题的光滑解的适定性. 与次临界不同, 处理临界波动方程的困难是势能部分无法被动能部分所控制, 这就要求助于 Morawetz 估计来排除能量的聚集现象. 本章主要采用了 Sogge, Shatah 与 Struwe 的方法, 用 Strichartz 估计与压缩映射方法证明了光滑解的整体适定性, 优点在于可用时空模替代 L^∞ 模来刻画局部解是否可以继续延拓, 这就极大地简化了证明. 另一方面, 详细地介绍了用变分方法在特征锥上推导 Morawetz 估计、Strichartz 估计在特征锥上的局部化及非线性函数在局部 Besov 空间中的估计, 从而充分体现了调和分析方法及 Lagrange 变分方法的重要作用.

第 4 章采用正则化方法、局部的 Strichartz 估计及能量方法等建立能量空间中临界波方程的整体适定性. 另一方面, 证明能量解同样满足 Dilation 恒等式及相应的 Morawetz 估计, 借此就获得了能量解的衰减估计及能量解的整体时空估计. 作为能量解的整体时空估计的直接结果, 给出了临界波方程能量解的散射性结果. 最后, 指出能量解理论中尚未解决的公开问题.

第 5 章主要介绍 Morawetz 估计的应用及低正则性问题. 利用 Morawetz 估计, 首先证明非线性 Klein-Gordon 型方程光滑解的局部 L^2 范数与 Ω 上能量 ($|\Omega| < \infty$) 关于时间变量的衰减现象. 我们希望这一方法可以处理更一般的具有物理意义的 PDEs 的相应问题. 例如, 如何证明 4 阶非线性波动型方程解的局部能量衰减等结果. 另一方面, 这也是建立整体散射性理论的基础. 基于此, 采用乘子技术、Lagrange 变分原理等方法, 建立了 4 阶非线性波动型方程所满足的 Morawetz 守恒积分形式或 Morawetz 估计. 在此过程中, 可以熟悉或了解导数的分解与合成技术, 为非线性估计打下良好的基础. 需要指出的是, 对于高阶非线性 Klein-Gordon 方程而言, 许

多问题都是公开的. 最后, 利用 Bourgain 的 Fourier 截断方法, 证明了高维非线性波动方程 Cauchy 问题的低正则性问题的整体适定性.

本书的初稿始于在北京大学所作的数学特别讲座, 在本书形成过程中, 得到了田刚院士的关心与帮助, 作者深表感谢. 受辛周平教授的邀请, 在香港中文大学数学研究所的讨论班上报告书中的部分内容, 辛教授对本书内容、选材等提出了许多建设性的意见, 作者深表感谢. 书中部分内容与洪家兴院士进行了交流, 得到了他的诸多指导与鼓励, 在此表示由衷的感谢. 作者还要感谢周毓麟院士、张恭庆院士、李大潜院士、郭柏灵院士、林芳华教授、韩永生教授、肖玲教授、陈恕行教授、陆善镇教授、陈国旺教授、周忆教授、江松教授、张波教授等, 他们给作者提出了许多好的建议与意见.

最后, 对参加我主持的 “偏微分方程的现代方法学术讨论班” 的年轻同事: 谌稳固研究员、杨晗教授、王衡庚副教授、张晓轶博士、章志飞博士、邹雄博士、陈琼蕾博士及博士生原保全、叶耀军、朱佑彬、徐桂香、王月山、苑佳等表示感谢, 他们为本书的校对做了许多有益的工作.

本书得到国家自然科学基金、国家重点基础研究发展规划项目(核心数学 “973”)及中国工程物理研究院科学技术基金的资助.

作　者

2005 年 3 月于北京

目　录

第 1 章　乘子方法、不变量及守恒积分

1.1　Laplace 方程与共形变换群

众所周知, Laplace 算子在共形变换群下保持不变 (所谓共形变换群 $\mathcal{G}$ 是指 $\mathbb{R}^N$ 上保持角度的变换群). 当 $N \geqslant 3$ 时, 共形变换群 $\mathcal{G}$ 包含了如下四类变换:

(1) 平移变换群 (group of translation transformations);

(2) 旋转变换群 (group of rotation transformations);

(3) 伸缩变换群 (group of dilation transformations);

(4) 反射变换群 (group of inversion transformations).

我们将会证明共形变换群 $\mathcal{G}$ 的维数是

$$\dim(\mathcal{G}) = N + \frac{N(N-1)}{2} + 1 + N = \frac{(N+1)(N+2)}{2}.$$

然而, 对于 Laplace 方程

$$\Delta u = f(u), \quad f(0) = 0 \tag{1.1}$$

而言, 它仅仅在 Galilo 变换群下保持不变, 而并非在所有的共形变换群 $\mathcal{G}$ 下保持不变.

注记 1.1　以四维时空空间 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ 为例, 考察各种变换群之间的关系:

(i) Galilo 变换群是指平移变换群与旋转变换群. 平移变换是指

$$x' = x + a, \quad x = (x_0, x_1, x_2, x_3), \quad a \in \mathbb{R}^4.$$

旋转变换是指

$$\begin{cases} x_0' = x_0, \\ x_i' = x_i \cos\theta + x_j \sin\theta, \\ x_j' = -x_i \sin\theta + x_j \cos\theta, \\ x_k' = x_k, \end{cases} \qquad i, j, k \in [1, 2, 3].$$

(ii) 一般地说, 狭义相对论中 Galilo 变换是指

$$x_j' = x_j - v_j t, \quad 1 \leqslant j \leqslant 3.$$

(iii) Poincaré 变换群包含了四个时空平移变换群与 Lorentz 变换群, Lorentz 变换群是由整体 Lorentz 变换

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu\nu} x_{\nu}, \quad \varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

诱导的变换群. 具体地说, Lorentz 变换群是由旋转变换群 (见 (i)) 及下面的 Lorentz 变换

$$\begin{cases} t' = t\cosh\tau + x_i \sinh\tau, \\ x_i' = t\sinh\tau + x_i\cosh\tau, \\ x_j' = x_j, \\ x_k' = x_k, \end{cases} \qquad i, j, k \in [1, 2, 3]$$

所诱导的变换群.

本章的目的是: 寻求 $f(u)$ 满足什么条件, 以确保椭圆方程 (1.1) 在共形变换群 (group of conformal transformations) 下的不变性. 通过这些共形变换群的母元 (就是我们要找的乘子) 来建立 (1.1) 所满足的对称, 特别, 将它应用到相对论中的方程如波动方程、Schrödinger 方程 (或其他色散方程) 时, 就可以获得一系列的守恒积分. 这对于我们研究这些方程的适定性、散射性理论是非常重要的.

下面从几个不同的侧面考察 (1.1). 假设 (1.1) 的解 $u(x)$ 光滑且在无穷远处衰减, 即

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

视角 1 直接验算, 可见

$$0 = (-\Delta u + f(u))u = \nabla \cdot (-\nabla u u) + |\nabla u|^2 + uf(u).$$

因此, 在 $\mathbb{R}^N$ 上积分, 就得

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + uf(u))\mathrm{d}x = 0. \tag{1.2}$$

如果设 $u(x)$ 及 $v(x)$ 均是 (1.1) 的解, 则

$$0 = (-\Delta u + f(u))v = \nabla \cdot (-\nabla u v) + \nabla u \nabla v + vf(u),$$

$$0 = (-\Delta v + f(v))u = \nabla \cdot (-\nabla v u) + \nabla v \nabla u + uf(v).$$

因此, 在 $\mathbb{R}^N$ 上积分上面两式, 作差就得

$$\int_{\mathbb{R}^N} (vf(u) - uf(v))\mathrm{d}x = 0. \tag{1.3}$$

视角 2 设 $u(x)$ 满足 (1.1), 则尺度变换 (scaling transformation) 就意味着 $v(x) = \alpha u(\lambda x)$ 满足

$$\Delta v = \alpha\lambda^2 f\left(\frac{v}{\alpha}\right), \quad f(0) = 0. \tag{1.4}$$

于是, 对于形如 $f(u)=cu^p+du^q$ 的非线性函数, 通过尺度变换 $v(x)=\alpha u(\lambda x)$, 就可以将 (1.1) 转换成

$$\Delta v=\pm v^p\pm v^q. \tag{1.5}$$

视角 3 记 $F(u)=\int_0^u f(v)\mathrm{d}v$ 及

$$E(u)=\int_{\mathbb{R}^N}\left\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2+F(u)\right\}\mathrm{d}x. \tag{1.6}$$

则方程 (1.1) 可以写成变分形式

$$\delta E(u)=0. \tag{1.7}$$

形式上, 设 T_ε 是满足 $T_0=I$ 的一簇光滑的变换, 记 $M=\left.\frac{\mathrm{d}T_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ 是光滑变换簇所对应的乘子. 对于任意的函数 $u(x)$, 有

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}E[T_\varepsilon u]=(E'(u),Mu)=(-\Delta u+f(u),Mu). \tag{1.8}$$

若 $u(x)$ 是 (1.1) 的解, 则 (1.8) 式是 0, 说明 $E[T_\varepsilon u]=E[T_\eta u]=\text{const}$, $(-\Delta u+f(u))Mu$ 是一个散度形式. 当然, 这恰好是如下著名的 Noether 定理的直接结果.

Noether 定理 如果存在一个单参数变换簇保持变分问题 (方程) 不变, 则方程的解满足一个守恒律.

下面就来研究 (1.1) 在 $\mathbb{R}^N$ 中的共形变换群作用下所满足的守恒积分或分析非线性项 $f(u)$ 应满足什么条件才能确保在共形变换群作用下的不变性. 与此同时, 利用这些性质还可以得到对某些非线性函数, (1.1) 不存在解的一些判定条件.

1. *平移变换* (translation transformation)

$$T_\varepsilon\colon\ u(x)\longrightarrow u(x+\varepsilon a),\qquad M=\left.\frac{\mathrm{d}T_\varepsilon}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=a\cdot\nabla. \tag{1.9}$$

将 $(-\Delta u+f(u))Mu$ 写成散度形式, 就得守恒积分:

$$\nabla\cdot\left\{-(a\cdot\nabla u)\nabla u+a\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}+F(u)\right)\right\}=0. \tag{1.10}$$

特别, 取 $a=e_k$ 是第 k 个坐标的单位向量, 则 (1.10) 就意味着

$$\left\{-u_k^2+\frac{1}{2}|\nabla u|^2+F(u)\right\}_k+\sum_{j\neq k}\{-u_ju_k\}_j=0,\quad 其中\ u_j=\frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{1.11}$$

2. **旋转变换** (rotation transformation)

$$T_\theta u(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_k,\cdots,x_N)=u(x_1,\cdots,\tilde{x}_j,\cdots,\tilde{x}_k,\cdots,x_N),$$
$$\tilde{x}_j=x_j\cos\theta+x_k\sin\theta,\quad \tilde{x}_k=-x_j\sin\theta+x_k\cos\theta. \tag{1.12}$$

直接验算可得

$$\begin{aligned}M=&\frac{\mathrm{d}T_\theta}{\mathrm{d}\theta}\bigg|_{\theta=0}=(-x_j\sin\theta+x_k\cos\theta)\partial_j+(-x_j\cos\theta-x_k\sin\theta)\partial_k\bigg|_{\theta=0}\\=&x_k\partial_j-x_j\partial_k.\end{aligned}\tag{1.13}$$

将 $(-\Delta u+f(u))Mu$ 写成散度形式, 就得守恒形式:

$$\nabla\cdot\{-(x_k\partial_j-x_j\partial_k)u\nabla u\}+\left\{x_k\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}+F(u)\right)\right\}_j-\left\{x_j\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}+F(u)\right)\right\}_k=0. \tag{1.14}$$

3. **伸缩变换** (dilation transformation)

寻求在伸缩变换

$$T_\lambda(u(x))\triangleq u_\lambda(x)=\lambda^m u(\lambda x),\quad \lambda>0 \tag{1.15}$$

下, 保持 (1.1) 对应的 Lagrange 积分不变 (仅需找满足条件的 m 即可). 注意到 $\nabla u_\lambda(x)=\lambda^{m+1}(\nabla u)(\lambda x)$, 直接计算可得

$$\begin{aligned}E(u_\lambda)=&\int_{\mathbb{R}^N}\left\{\frac{1}{2}\lambda^{2m+2}|(\nabla u)(\lambda x)|^2+F(\lambda^m u(\lambda x))\right\}\mathrm{d}x\\=&\int_{\mathbb{R}^N}\left\{\frac{1}{2}\lambda^{2m+2-N}|(\nabla u)(y)|^2+\lambda^{-N}F(\lambda^m u(y))\right\}\mathrm{d}y,\end{aligned}\tag{1.16}$$

这里用到 $y=\lambda x$, $\mathrm{d}y=\lambda^N\mathrm{d}x$. 现取 $2m+2=N$ (即 $m=(N-2)/2$), 总有

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}E(u_\lambda(x))\bigg|_{\lambda=1}=\int_{\mathbb{R}^N}\{-NF(u)+muf(u)\}\mathrm{d}y. \tag{1.17}$$

这就说明对于上面选取的 $m=(N-2)/2$, $-NF(u)+muf(u)$ 是一个散度形式. 此时, 伸缩变换 (1.15) 对应的母元 M 为

$$Mu=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[\lambda^m u(\lambda x)]\bigg|_{\lambda=1}=x\cdot\nabla u+mu. \tag{1.18}$$

相应的守恒形式是

$$0=(-\Delta u+f(u))(x\cdot\nabla u+mu)$$

$$
\begin{aligned}
&= muf(u) - NF(u) + \nabla \cdot \{-(x\cdot\nabla)u\nabla u \\
&\quad + \frac{1}{2}x|\nabla u|^2 - mu\nabla u + xF(u)\}, \quad m = \frac{N-2}{2}.
\end{aligned} \tag{1.19}
$$

在验证上面守恒形式时, 用到了如下等式:

$$
\nabla\cdot\big((x\cdot\nabla)u\nabla u\big) = \partial_j\big((x_k\partial_k u)\partial_j u\big) = \delta_{jk}\partial_k u\partial_j u + x_k\partial_k\partial_j u\partial_j u + x_k\partial_k u\partial_j^2 u.
$$

利用

$$
\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + uf(u))\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N}\{-NF(u) + muf(u)\}\mathrm{d}x = 0
$$

(见 (1.2) 与 (1.17)) 就得

$$
\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^N}uf(u)\mathrm{d}x = -\frac{2N}{N-2}\int_{\mathbb{R}^N}F(u)\mathrm{d}x, \quad N\geqslant 3 \tag{1.20}
$$

及

$$
E(u) = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x > 0. \tag{1.21}
$$

作为上面等式的推论, 我们有如下结果:

定理 1.1 设 $u(x)$ 是 (1.1) 的光滑解且在 $|x|\to\infty$ 时有衰减, 则 (1.1) 对应的能量 $E(u)>0(u(x)\equiv 0$ 除外). 另外, 如果

(a) $sf(s)>0$, $N\geqslant 2$;

(b) $F(s)>0$, $N\geqslant 2$;

(c) $H(s)>0$, $H(s)=(N-2)sf(s)-2NF(s)$, $N\geqslant 2$;

(d) $-H(s)>0$, $N\geqslant 2$;

(e) $K(s)>0$, $K(s)=sf(s)-2F(s)$, $N\geqslant 3$

之一成立, 则 (1.1) 不存在解.

证明 为简单起见, 仅在 $N\geqslant 3$ 下证明. 注意到

$$
\int_{\mathbb{R}^N}uf(u)\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x \leqslant 0,
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^N}F(u)\mathrm{d}x = \frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N}uf(u)\mathrm{d}x = -\frac{N-2}{2N}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x \leqslant 0,
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^N}H(u)\mathrm{d}x = (N-2)\int_{\mathbb{R}^N}uf(u)\mathrm{d}x - 2N\int_{\mathbb{R}^N}F(u)\mathrm{d}x = 0,
$$

$$
\int_{\mathbb{R}^N}-H(u)\mathrm{d}x = 0
$$

和

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} K(u)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N} uf(u)\mathrm{d}x - 2\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\mathrm{d}x + \frac{N-2}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\mathrm{d}x \leqslant 0,\end{aligned}$$

利用反证法就得定理 1.1 的结果.

注记 1.2 (i) 定理 1.1 在 $N=1$ 的情形下是不成立的. 这是因为当 $F \geqslant 0$ 时, (1.1) 仍存在解. 见文献 [S2] 及其引文.

(ii) 一般来说, 椭圆型方程 (1.1) 在伸缩变换

$$u(x) \longrightarrow u_\lambda = \lambda^m u(\lambda x), \quad m = \frac{N-2}{2}$$

下并不具有不变性. 然而, 如果非线性项满足

$$-NF(u) + \frac{N-2}{2}uf(u) = 0, \quad F'(u) = f(u), \tag{1.22}$$

即

$$F(u) = \text{const} \cdot u^{\frac{2N}{N-2}},$$

则 (1.1) 在伸缩变换下保持不变. 在此情形下, 椭圆方程 (1.1) 对应的变分问题 (可以是光滑区域上的边值问题) 的解就恰好是达到最佳的 Sobolev 嵌入不等式

$$||\varphi(x)||_{\frac{2N}{N-2}} \leqslant C||\nabla\varphi||_2, \quad C = \text{最佳常数} \tag{1.23}$$

的 $\varphi(x)$. 具体证明可参见文献 [S2].

注记 1.3 如果假设 f 与 F 还显式地依赖于 x, 则可获得 (1.17) 的一个 Virial 等式, 即

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbb{R}^N}\left\{-NF(x,u) + \frac{N-2}{N}uf(x,u) - x\cdot\nabla F\right\}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left\{-NF(x,u) + \frac{N-2}{N}uf(x,u) - r\frac{\partial F}{\partial r}\right\}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{1.24}$$

4. **反射变换** (inversion transformation)

众所周知, $\mathbb{R}^N$ 上的反射变换

$$V: \quad x \longrightarrow \frac{x}{|x|^2}$$