

# 初 等 数 学

( 內 部 試 用 )

广东农林学院农机系

《数学》教材编写组

1972年10月

# 毛主席語录

我們的教育方針，應該使受教育者在德育、智育、体育几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者。

教育必須为无产阶级政治服务，必須同生产劳动相結合。

学生也是这样，以学为主，兼学别样，即不但学文，也要学工、学农、学軍，也要批判资产阶级。学制要縮短，教育要革命，资产阶级知識分子統治我們学校的现象，再也不能繼續下去了。

自然科学是人們爭取自由的一种武装。人們为着要在社会上得到自由，就要用社会科学来了解社会，改造社会进行社会革命。人們为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

中国人民有志气，有能力，一定要在不远的将来，赶上和超过世界先进水平。

## 序 言

波澜壮阔的无产阶级文化大革命，以极其雄伟的力量推动着我国社会主义教育事业蓬勃发展。在毛主席“**工人阶级必须领导一切**”的伟大号召下，工人阶级昂首阔步地进驻了学校阵地，使学校面貌发生了极其深刻的变化。在毛主席无产阶级革命路线指引下，一批批工农兵学员满怀革命豪情，迈步跨入社会主义新型大学，肩负着“上大学，管大学，用毛泽东思想改造大学”的光荣使命，教育革命呈现着朝气蓬勃的新局面。

在教育战线一派大好形势和全国教育工作会议《纪要》精神鼓舞下，我们遵照毛主席“**教材要彻底改革**”的教导，认真学习了毛主席的光辉哲学著作《实践论》和《矛盾论》，批判过去旧数学教材中的资产阶级思想体系，深入三大革命斗争实践，进行调查研究和亲自参加教学实践，在这基础上，为适应当前教育革命形势的需要和农机事业发展的要求，结合本专业的实际，初步编写出这本《初等数学》。

过去的数学教材，可统称为“公理化”体系。它是资产阶级世界观在数学领域里的具体体现，它鼓吹数学是几个数学家的“天才产物”、“理论从公理而来”、“是非由推理而定”。否认数学来源于实践，否认数学中存在矛盾，否认数学要为生产实践服务。

过去的数学教材，在“谨严性”、“科学性”、和“抽象性”的幌子下，以极其隐蔽的方式，向学生灌输资产阶级的唯心论、形而上学的世界观，鼓吹资产阶级的反动的天才观，使数学成为资产阶级对劳动人民实行思想政治和文化专政的工具，为复辟资本主义服务。

颠倒了的历史必须颠倒过来。“**无产阶级必须在上层建筑其中包括各个文化领域中对资产阶级实行全面的专政。**”数学来源于三大革命斗争实践，是劳动人民在长期生产斗争实践中创造出来的。今天，必须又转过来为实践服务，为广大工农兵所掌握所利用。

毛主席的教育革命思想是编写教材的根本指导思想，工农兵的需要是编写教材的出发点，三大革命斗争实践是数学教材的丰富源泉，兄弟院校编写教材的经验是我们学习的榜样，挂钩厂的领导干部、工人和革命技术人员的大力支持和鼓励给予我们无穷无尽的力量。

遵照毛主席“**不破不立**”、“**破字当头，立也就在其中了**”的教导，我们在教材内容上本着破旧立新的精神，破除旧教材以概念为基础，从定义公理出发，立以实践为基础，从经验上升到理论；破除形而上学的自圆其说的演绎推理，立以分析事物内部矛盾，从中找出规律指导再实践；破除理论脱离实际，学而无用，立以学用一致，为实践服务。我们在处理教材方法上本着联系生产实际和专业实际，充分揭露矛盾，分析矛盾和注意矛盾的转化规律，以期达到培养学员分析问题和解决问题的能力。我们在教材叙述形式上，力求做到由表及里，通俗易懂，便于学员自学。

由于水平所限，时间仓促，不妥或错误之处有所难免。热诚希望同志们提出宝贵意见，以便不断完善和提高，更好地为工农兵服务。

# 目 录

## 序 言

|                       |        |
|-----------------------|--------|
| 第一章 几何划线基本知识          | ( 1 )  |
| § 1—1 划线、找圆心          | ( 1 )  |
| § 1—2 等分线段和圆          | ( 4 )  |
| § 1—3 连接线             | ( 6 )  |
| 第二章 度量                | ( 15 ) |
| § 2—1 几何度量单位进率和换算关式   | ( 15 ) |
| § 2—2 常见几何图形面积、体积计算公式 | ( 21 ) |
| 第三章 分数及其运算            | ( 27 ) |
| § 3—1 对分数的认识          | ( 27 ) |
| § 3—2 分数的加减法          | ( 28 ) |
| § 3—3 分数的乘除法          | ( 31 ) |
| § 3—4 分数的应用           | ( 35 ) |
| 第四章 正负数、乘方、开方和指数运算    | ( 41 ) |
| § 4—1 正负数及其运算         | ( 41 ) |
| § 4—2 乘法和开方           | ( 45 ) |
| § 4—3 指数运算——乘方和开方的统一  | ( 60 ) |
| 第五章 整式和分式             | ( 64 ) |
| § 5—1 代数式             | ( 64 ) |
| § 5—2 整式              | ( 66 ) |
| § 5—3 分式              | ( 71 ) |
| 第六章 代数方程的解法           | ( 74 ) |
| § 6—1 代数方程            | ( 74 ) |
| § 6—2 一元一次方程的解法       | ( 75 ) |
| § 6—3 一元二次方程          | ( 79 ) |
| § 6—4 多元一次方程组         | ( 83 ) |
| 第七章 对数                | ( 92 ) |
| § 7—1 对数的意义           | ( 92 ) |
| § 7—2 积、商、幂的对数        | ( 93 ) |
| § 7—3 常用对数            | ( 94 ) |
| § 7—4 利用对数进行数值计算      | ( 96 ) |
| § 7—5 自然对数、换底公式       | ( 98 ) |



|                             |         |
|-----------------------------|---------|
| <b>第八章 全等三角形与相似形</b> .....  | ( 100 ) |
| § 8—1 三角形的稳定性、分类及其边角关系..... | ( 100 ) |
| § 8—2 全等三角形.....            | ( 103 ) |
| § 8—3 相似三角形.....            | ( 107 ) |
| <b>第九章 三角计算与应用</b> .....    | ( 112 ) |
| § 9—1 锐角三角函数与直角三角形解法.....   | ( 112 ) |
| 一、 什么叫锐角三角函数.....           | ( 112 ) |
| 二、 锐角三角函数之间的关系.....         | ( 114 ) |
| 三、 三角函数表的用法.....            | ( 115 ) |
| 四、 直角三角形解法及其应用.....         | ( 118 ) |
| § 9—2 任意角的三角函数与解任意三角形.....  | ( 129 ) |
| 一、 角的概念扩充.....              | ( 129 ) |
| 二、 平面直角坐标系.....             | ( 130 ) |
| 三、 任意角的三角函数.....            | ( 131 ) |
| 四、 正弦定理和余弦定理、解任意三角形.....    | ( 137 ) |
| 五、 反三角函数.....               | ( 146 ) |
| <b>第十章 矢量的合成和分解</b> .....   | ( 152 ) |
| § 10—1 矢量的特征及其几何表示.....     | ( 152 ) |
| § 10—2 矢量的合成和分解.....        | ( 153 ) |
| § 10—3 矢量的坐标表示及其代数加法.....   | ( 160 ) |
| <b>第十一章 优选法</b> .....       | ( 170 ) |
| (一) 优选法的基本内容.....           | ( 170 ) |
| § 11—1 什么是优选法.....          | ( 170 ) |
| § 11—2 单因素.....             | ( 170 ) |
| § 11—3 抓主要矛盾.....           | ( 175 ) |
| § 11—4 双因素、多因素.....         | ( 177 ) |
| (二) 具体问题具体分析——特殊方法.....     | ( 178 ) |
| § 11—5 分数法.....             | ( 178 ) |
| § 11—6 对半法.....             | ( 180 ) |
| § 11—7 平行线法.....            | ( 181 ) |
| § 11—8 一批可以作几次试验的情况.....    | ( 181 ) |
| § 11—9 陡度法.....             | ( 182 ) |
| § 11—10 瞎子爬山法.....          | ( 184 ) |
| § 11—11 最后一跃——抛物线法.....     | ( 184 ) |
| <b>第十二章 统筹法</b> .....       | ( 186 ) |
| § 12—1 什么是统筹方法.....         | ( 186 ) |
| § 12—2 统筹方法的基本内容.....       | ( 186 ) |

|         |                        |         |
|---------|------------------------|---------|
| § 12— 3 | 党的领导, 群众路线·····        | ( 191 ) |
| § 12— 4 | 附录·····                | ( 192 ) |
| 1、      | “零”箭头的应用·····          | ( 192 ) |
| 2、      | 图的合并·····              | ( 193 ) |
| 3、      | 多——巧安排·····            | ( 194 ) |
| 4、      | 快——平行作业和交叉作业·····      | ( 195 ) |
| 5、      | 好——保证质量·····           | ( 197 ) |
| 6、      | 省——算时差·····            | ( 198 ) |
| § 12— 5 | 图例和问题·····             | ( 201 ) |
| 〔附〕     | 计算尺构造原理和用法·····        | ( 204 ) |
| § 1     | 构造原理·····              | ( 204 ) |
| § 2     | 计算尺的使用·····            | ( 205 ) |
| 一、      | 倒尺与求倒数·····            | ( 205 ) |
| 二、      | 平方尺与求平方、开平方·····       | ( 206 ) |
| 三、      | 立方尺与求立方、开立方·····       | ( 207 ) |
| 四、      | 对数尺与求对数和反对数·····       | ( 209 ) |
| 五、      | 三角函数尺与求三角函数和反三角函数····· | ( 210 ) |
| 六、      | 乘除与比例·····             | ( 212 ) |
| 七、      | 重对数尺与求任意次幂和开方·····     | ( 219 ) |

# 第一章 几何划线基本知识

在制造机械零件时，工人先要按照图纸上标明的尺寸，在毛坯或材料上划出加工的“界限”；木工在制作农具时，要按照规格在木料上弹上“墨线”；建筑工人在施工前也要按照图纸，在基地上“放线”。这些就是常说的划线。它在三大革命实践中有着广泛的应用。

## §1-1 划线、找圆心

### 一、垂线的划法

1. 劳动人民常用划线工具：重锤、曲尺、直角三角板、丁字尺和划针（在平台上）进行划垂线（划法在实践中掌握）。

2. 用园规划垂直平分线

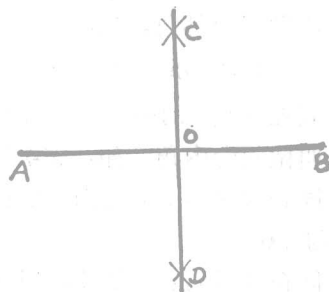
划法如下：

（1）分别以已知线段端点 A、B 为圆心，大于  $\frac{1}{2}AB$  的长为半径划弧，交于 C 和 D；

（2）连结 C 和 D，那末，CD 就是已知线段 AB 的垂直平分线。即：

$CD \perp AB$  （符号“ $\perp$ ”表示垂直）

并且  $AO = OB$



### 二、平行线的划法及其性质

1、工人常用丁字尺、曲尺、划针或三角板配合直尺等工具划平行线（划法在实践中掌握）

#### 2、平行线的性质

“理论的基础是实践。”“认识从实践始。”通过划平行线的实践，我们可以得出如下两个结论：

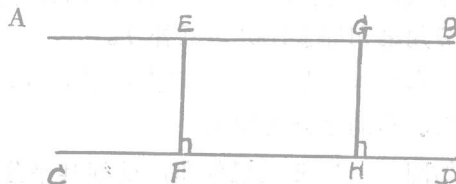
（1）两平行线间的垂直距离处处相等；反之，距离处处相等的两直线互相平行。

平行常用符号“ $\parallel$ ”表示。

如图：如果  $AB \parallel CD$ ，那末  $EF = GH$ 。

反之，如果  $EF = GH$ ，且  $EF$ 、 $GH$  与  $CD$  垂直，那末  $AB \parallel CD$ 。

划针放在平台上，移动其底座，针尖始终与平台保持等距离，针尖就划出了与平台平面



平行的平行线。这就充分地说明了平行线间距离处处相等的道理。

(2) 如图：我们知道，如果直尺  $l$  固定不动，三角板沿直线移动， $\angle 1 = \angle 2$ ，那末，沿三角板另一边划出的直线彼此平行。

即：  $a \parallel b$

两直线  $l_1, l_2$  被第三直线  $l$  所截而得八个角，依它们相对三直线  $l_1, l_2$  和  $l$  分别给予同位角、内错角、同旁内角和同旁外角等称呼。

如图：

同在直线  $l_1, l_2$  上方或下方，并同在直线  $l$  的左边或右边的两个角，叫做同位角。如：

$\angle 1$  与  $\angle 5$ ；  $\angle 4$  与  $\angle 8$ ；

$\angle 2$  与  $\angle 6$ ；  $\angle 3$  与  $\angle 7$ ；

同在直线  $l$  的一旁，并在直线  $l_1, l_2$  之外的两个角，叫做同旁外角。如：

$\angle 1$  与  $\angle 8$ ；  $\angle 2$  与  $\angle 7$ 。

同在直线  $l$  的一旁，并在直线  $l_1, l_2$  之内的两个角，叫做同旁内角。如： $\angle 4$  与  $\angle 5$ ；  $\angle 3$  与  $\angle 6$ 。

同在直线  $l_1, l_2$  之内，但分别在直线  $l$  的两旁的两个角，叫做内错角。如： $\angle 3$  与  $\angle 5$ ；  $\angle 4$  与  $\angle 6$ 。

同在直线  $l_1, l_2$  之外，但分别在直线  $l$  的两旁的两个角，叫做外错角。如： $\angle 2$  与  $\angle 8$ ；  $\angle 1$  与  $\angle 7$ 。

通过用三角板配合直尺划平行线的实践，我们知道：如图。

若同位角相等，即  $\angle 1 = \angle 5$ ，则两直线平行，即  $l_1 \parallel l_2$ 。

反之，两平行直线被一直线所截得的同位角必相等。即：若  $l_1 \parallel l_2$ ，则  $\angle 1 = \angle 5$ ；  $\angle 2 = \angle 6$ ；  $\angle 4 = \angle 8$ ；  $\angle 3 = \angle 7$ 。

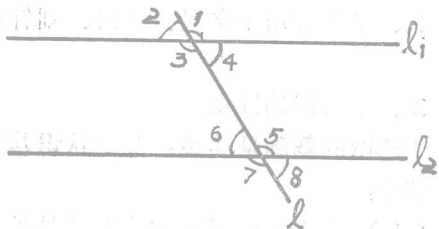
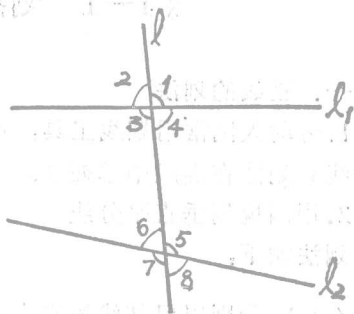
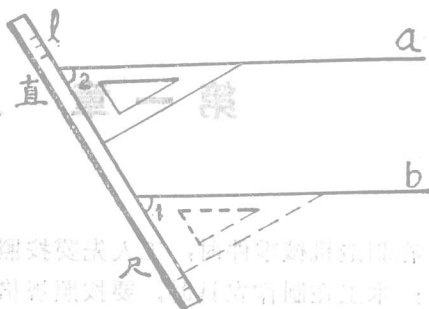
进一步推理可得：若  $l_1 \parallel l_2$ ，则：内错角相等；外错角相等；同旁内角互补；同旁外角也互补（两角之和等于  $180^\circ$  叫互补）。

反之，若内（外）错角相等或同旁内（外）角互补，则  $l_1 \parallel l_2$ 。

### 三、角的平分线画法

如图： $\angle AOB$  是已知角，试划其平分线。

画法：

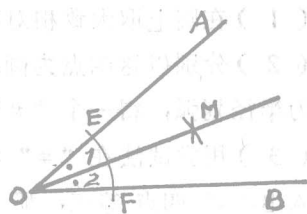




(1) 以顶点  $O$  为圆心, 适当长为半径划弧交  $OA$  于  $E$ 、交  $OB$  于  $F$ ;

(2) 分别以点  $E$ 、 $F$  为圆心, 适当长(但必须同长)为半径划弧相交于点  $M$ ;

(3) 连结  $OM$ , 则  $OM$  即为  $\angle AOB$  的平分线, 即:  $\angle 1 = \angle 2$ 。



#### 四、找圆心

“在某种意义上来说, 最聪明、最有才能的, 是最有实践经验的战士。”工人在长期的生产实践中, 积累了许多找圆心的方法。常见的有如下几种:

##### 1. 用尺规找圆心

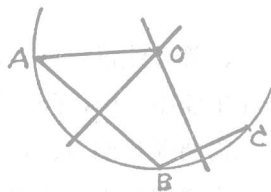
机器的皮带轮损坏了, 需要重造, 这就必须设法测出它的半径尺寸。工人常这样做:

(1) 先把破皮带轮放在纸上划出一段弧(如图);

(2) 在弧上任取三点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ;

(3) 分别连结  $A$ 、 $B$ 、 $C$ , 作  $AB$  和  $BC$  的垂直平分线, 相交于点  $O$ ;

点  $O$  就是破皮带轮的圆心,  $OA$  就是半径。



“一切真知都是从直接经验发源的。”从上面的实践, 我们可以发现:

(1) 不在同一直线上三点, 可以确定一个圆;

(2) 如果把圆上任意两点的连线叫做圆的弦, 那末, 此弦的垂直平分线必通过此圆的圆心;

##### 2. 用角尺找圆心

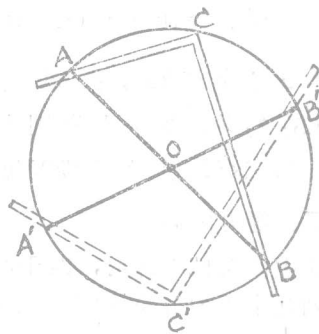
如图所示:

首先把角尺的顶点紧靠圆形工件的边缘, 角尺两边与圆形工件的边缘交于  $A'$ 、 $B'$ , 连结  $A'B'$ , 然后把角尺转一个角度, 用同样的方法得到  $AB$ ;

$AB$  和  $A'B'$  都是圆的最长的弦, 即为圆的直径, 其交点  $O$  就是此圆的圆心。

如果把角顶在圆周上的  $\angle ACB$  和  $\angle A'C'B'$  叫做此圆的圆周角。以上实践我们可以发现:

直径所对的圆周角一定是直角; 反之, 圆周角为直角其所对的弦就是此圆的直径。



##### 3. 用圆规划 “#” 字找圆心

“对于具体情况作具体分析”

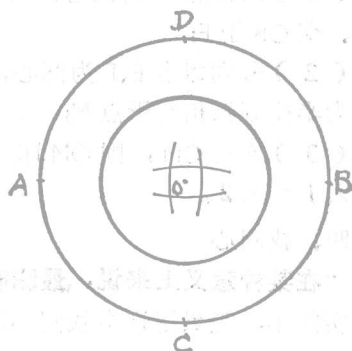
工人师傅拿到空心圆形工件时, 先在空心中间塞一块木头, 然后用下面的方法画 “#” 字找圆心:

(1) 在圆上取大致相对称的四点 A, B, C 和 D;

(2) 分别以这四点为圆心, 大约是此圆的半径之长为半径划弧, 得一个“#”字;

(3) 用尝试法在“#”字中间找一个点 O, 使它到 A, B, C, D 四点等距, 那末, O 点就是所要找的圆心。

因为“#”字的范围较小, 在小范围内找中心是比较容易的。划“#”字找圆心, 就是化“整”为“零”, 化“难”为“易”的一种方法。



## § 1—2 等分线段和圆

### 一、等分线段

在工业生产中, 经常要在机械零件上, 钻一些等距离小孔, 这些小孔的等分又要求较准确, 就需要通过测量、计算或作图得出。

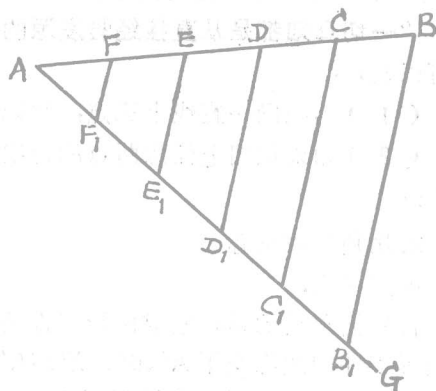
工人常用划平行线的方法把已知线段任意等分。

例如, 把线段 AB 分为五等分, 划法如下:

(1) 过 A 点任意划一射线 AG;

(2) 在 AG 上任意截取五个相等线段:

$$AF_1 = F_1E_1 = E_1D_1 = D_1C_1 = C_1B_1,$$



(3) 连结 BB<sub>1</sub>, 并过 C<sub>1</sub>, D<sub>1</sub>, E<sub>1</sub>, F<sub>1</sub> 分别作 BB<sub>1</sub> 的平行线, 且分别与 AB 相交于 C, D, E, F, 这就把已知线段五等分了。

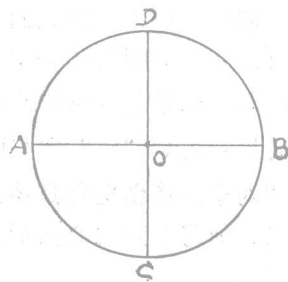
### 二、等分圆周

在生产机械零件时, 对于圆形工件, 往往需要在同一圆周上划几个均匀分布的圆孔或槽 (如铣床的分度盘), 就是说, 需要等分圆周。

#### 1、四等分圆周

过圆心 O 作两条互相垂直的直径 (工人师傅叫“打十字线”), 就把此圆周分成四等分了。

如果又把每一等分再平分, 就得到八等分 (平分弧的方法和平分弦 BC 的方法相同)。



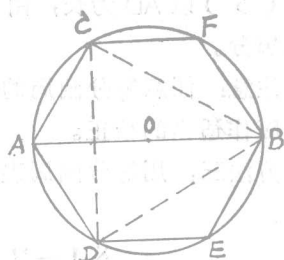
## 2、六等分、三等分圆周

(1) 划圆的直径 AB;

(2) 以 A、B 为圆心, OA 为半径划弧交圆于 C、D 和 E、F, 则圆周被分为六等分。

由作图可知, 圆内接正六边形的边长 AD 就是此圆的半径。

如果将六等分的每两等分缩成一份, 即为三等分圆周。



## 3、五等分圆周

(1) 过圆心 O 划十字线 AK 和 MN;

(2) 以 ON 中点 P 为圆心, PA 长为半径划弧交于 OM 上之 Q 点;

(3) 以 A 为圆心, AQ 长为半径划弧交圆周于 C 和 D。又以 C 和 D 为圆心, AQ 长为半径划弧交圆周于 B 和 E;

(4) 连结 A、C、B、E、D, 则得此圆内接正五边形, 即分圆周为五等分。



## 4、任意等分圆周

在生产实践中, 我们还会遇到七、九、十一、……等分圆周的问题, 这就需要研究它的任意等分的问题。工人师傅常用的方法有以下几种:

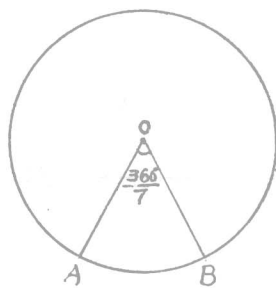
方法一: 用量角器等分圆周

例如: 七等分圆周。

因为一个圆周为  $360^\circ$ , 其七等分的一等分就是:

$$\frac{360^\circ}{7} = 51^\circ 25' 43''.$$

因此, 以圆心 O 为顶角, 用量角器量一个  $51^\circ 25' 43''$  的圆心角, 则这个角所对的弧  $\widehat{AB}$  就是整个圆周的七分之一。在这圆周上, 依次划等弧就将圆周七等分了。



方法二: 用分规等分圆周

例如: 五等分圆周

(1) 作圆的直径 AB;

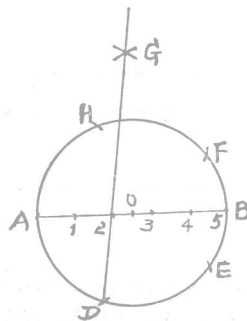
(2) 把 AB 分成五等分, 得分点: 1, 2, 3, 4, 5 (即点 B)。

(要 n 等分圆周, 就 n 等分 AB)

(3) 分别以 A、B 为圆心, 以直径 AB 长为半径划弧交于 G;

(4) 经过点 G 及等分点 2 (不论多少等分圆周都经过分点

2) 划直线与圆交于 D, 则  $\widehat{AD}$  就是整个圆周的五分之一;



(5) 以 AD 为长，由点 A 起连续在圆上截取等弦，得分点 A、D、E、F、H 则圆周被这些点五等分。

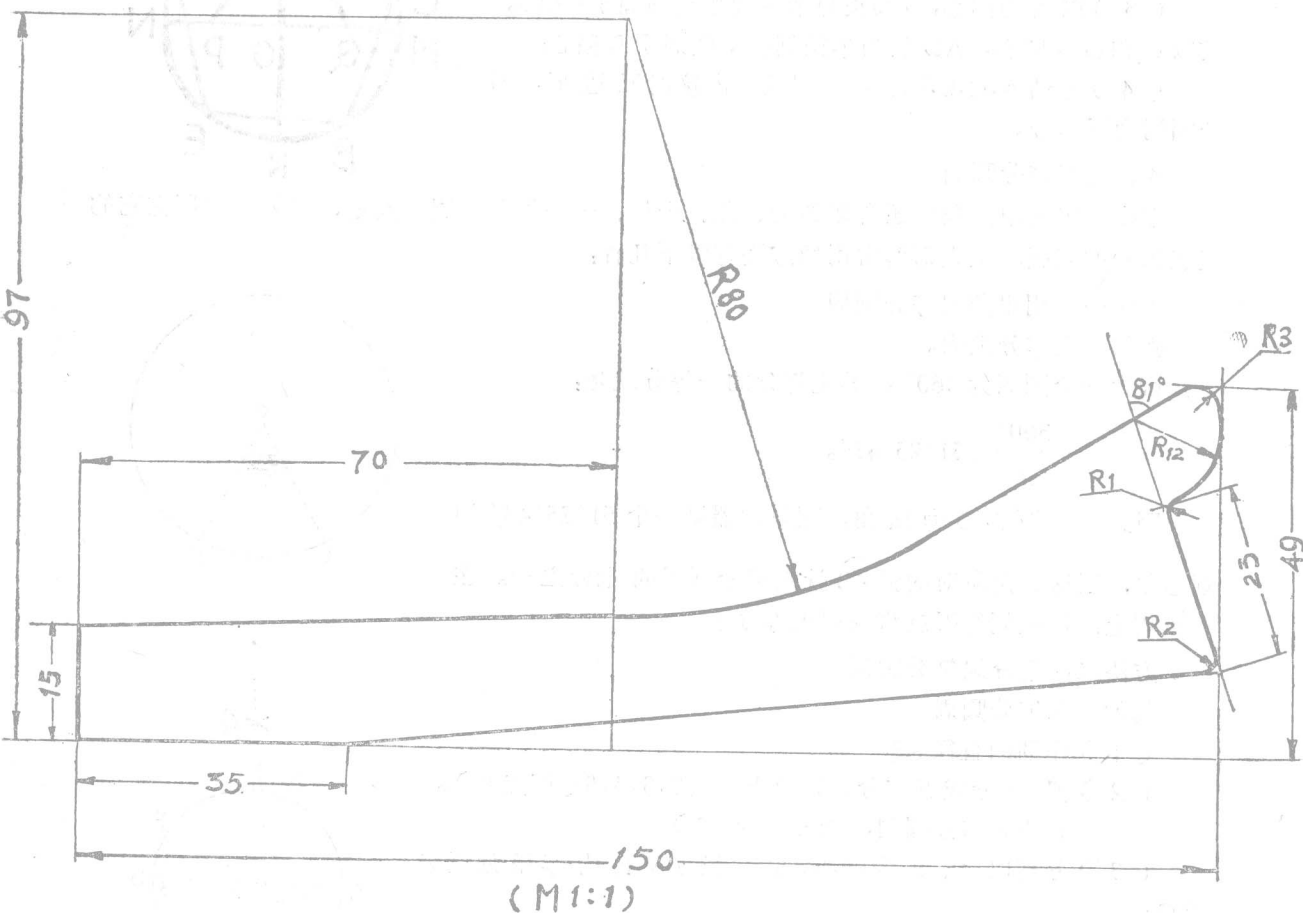
注意：任意等分圆周的方法，是近似作图法。如果作图的结果，产生较大的误差，那末，应作适当的校正。

方法三：用等分圆周表等分圆周（见第九章）

### §1-3 连接线

在绘制机械零件图时，常常要把线段与弧、弧与弧圆滑地连接起来，这种连接在数学上就叫做相切。

例如，广东70型人力水稻插秧机固定秧夹展开尺寸如图所示。工人师傅先依图纸尺寸，把它划在工模毛坯上，铣成工模，然后依模冲压进行大批生产。



工人师傅划线方法如下：

(1) 依图纸尺寸划基准线和直线段：15和35；

5(2) 划  $R_{80}$  的圆弧;

(3) 在十字线内划  $R_3$  的小圆弧;

(4) 在  $R_{80}$  的大圆弧的左边拉弧边线, 右边拉大圆弧与小圆弧的边线;

(5) 划  $R_{12}$  的圆弧;

(6) 作  $81^\circ$  线, 并在线段23下端与线段35右端作直线;

(7) 在交叉线内用小圆角  $R_1$  和  $R_2$  过渡。

工人师傅在这里所说的“沿弧拉边线”就是作圆的切线;“在十字线或交叉线内划圆弧”就是以十字线或交叉线为边缘作圆弧, 保证圆弧不出线。也就是作一圆和十字线或交叉线相切;“作过渡圆弧”就是用一圆弧使前后的直线段或圆弧平滑地连接起来, 也就是相切。

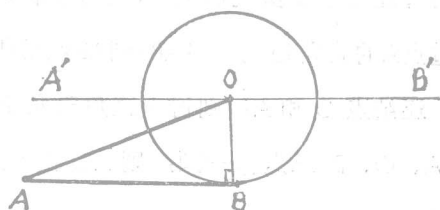
“不论做什么事, 不懂得那件事的情形, 它的性质, 它和它以外的事情的关联, 就不知道那件事的规律, 就不知道如何去做, 就不能做好那件事。”为了正确地熟练地划出连接线, 研究“相切”的规律就很有必要了。

### 1、直线和圆弧相切的规律

圆弧的边线 AB 叫圆的切线。

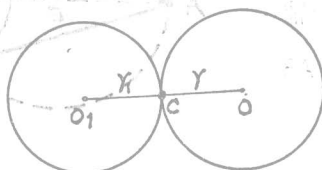
切线和圆只有一个交点 B, 叫切点。如图: 连结 OB 就是圆的半径, 过切点的半径必和切线垂直。即  $OB \perp AB$ 。

因此, 和直线 AB 相切的圆, 其圆心必在与直线 AB 相距为半径的平行线  $A'B'$  上。

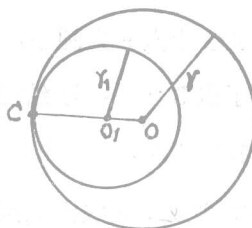


### 2、圆和圆相切的规律

如图: 两圆只交于一点(叫切点), 就说两圆相切。



两圆外切于点C



两圆内切于点C

由图可知: 两圆相切(外切或内切)切点必在两圆的连心线上, 且两圆的圆心距必等于这两圆的半径之和(外切)或差(内切)。即

$$OO_1 = r + r_1 \text{ (外切)}$$

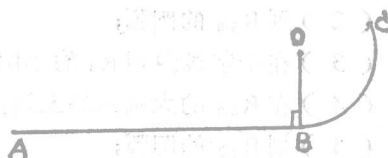
$$OO_1 = r - r_1 \text{ (内切)}$$

“感觉到了的东西, 我们不能立刻理解它, 只有理解了的东西, 才更深刻地感觉它。”认识了“相切”的规律, 我们就可以深刻理解和进一步掌握工人依图划线的方法了。下面以解剖麻雀的方法, 分类举例说明之。

一、拉弧的边缘线——作圆的切线。

例 1、划一直线和  $\widehat{BC}$  连接于点 B。

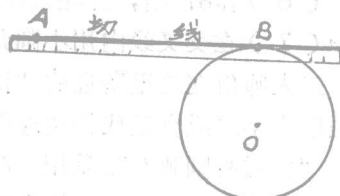
划法：先找出  $\widehat{BC}$  的圆心 O，然后连结点 O、B，并过点 B 作  $AB \perp OB$ ，则 AB 和  $\widehat{BC}$  相切于点 B。



例 2，过圆外一点 A，作圆 O 的切线。

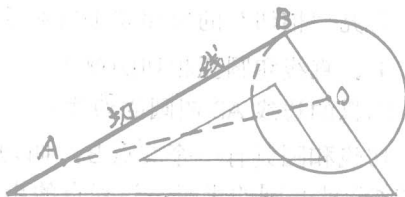
划法一：简划法

用直尺边对准点 A 和已知圆 O 的边缘拉直线 AB 就行了。



划法二：用直角三角板

将直角三角板的一直角边通过已知点 A，另一直角边通过已知圆的圆心 O，直角顶靠近已知圆边，通过点 A 的直角边划直线 AB，则 AB 就是所求的切线。

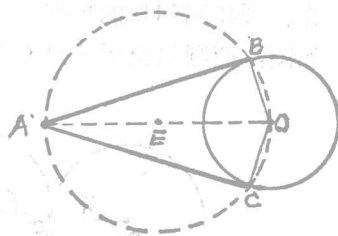


连结点 O 和 A，则得一直角三角形 AOB，若以 A、O、B 三点作一圆，则 AO 就是此圆的直径，B 点就是此圆和已知圆 O 的交点，于是又得

划法三：作辅助圆找切点

(1) 连结已知点 A 和圆心 O；

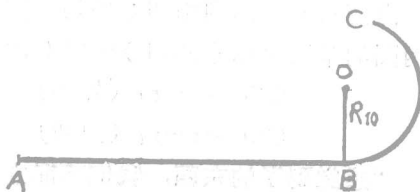
(2) 以 AO 中点 E 为圆心，OE 为半径划一个辅助圆交已知圆于点 B 和 C，连结点 A、B 和点 A、C，AB 和 AC 便是所求的切线，点 B 和 C 是切点。



二、在十字线或交叉线内划圆——作与已知直线相切的圆。

例 1、划一半径为  $R = 10\text{mm}$  的圆弧和直线相切于点 B。

划法：过点 B 作  $OB \perp AB$ ，并取  $OB = 10\text{mm}$ ，以点 O 为圆心，OB 为半径划  $\widehat{BC}$ ，则  $\widehat{BC}$  与 AB 相切于点 B。



例 2、已知两相交线 OA 和 OB，试作一个半径  $R = 10\text{mm}$  的圆和 OA，OB 都相切。

划法：分别作与 OA，OB 距离为  $10\text{mm}$  的平行线 a 和 b，并相交于点 O。



以点  $O$  为圆心,  $R = 10\text{mm}$  为半径划圆, 则此圆必和交叉线相切, 即 保证圆  $O$  不出线  $OA$  和  $OB$ 。

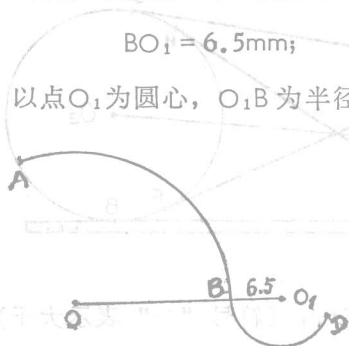
### 三、作过渡线与前后连接

例 1、已知  $\widehat{AB}$  (圆心为  $O$ ), 划一半径为  $6.5\text{mm}$  的弧与  $\widehat{AB}$  连接于点  $B$  (外切)。

划法: 连结点  $O, B$  并延长至点  $O_1$ , 使

$$BO_1 = 6.5\text{mm};$$

以点  $O_1$  为圆心,  $O_1B$  为半径划  $\widehat{BD}$ , 则  $\widehat{AB}$  与  $\widehat{BD}$  连接于点  $B$ 。



例 2、已知  $\odot O_1$  和  $\odot O_2$  的半径为  $R_1$  和  $R_2$ , 以及线段  $a$ , 试划一半径为  $a$  的弧和两已知圆  $O_1$  和  $O_2$  外连接。

分析: 问题是确定连接圆弧的圆心  $O$  (叫 连接中

心)。由于

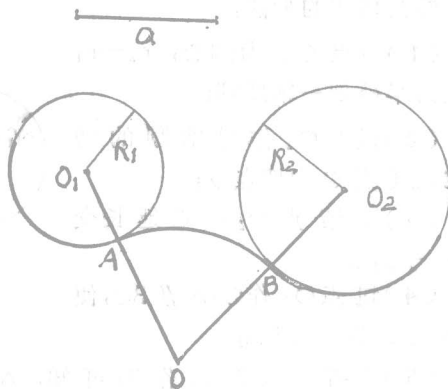
$$OO_1 = R_1 + a$$

$$OO_2 = R_2 + a$$

于是, 连接方法如下:

(1) 分别以点  $O_1, O_2$  为圆心,  $R_1 + a$ ,  $R_2 + a$  为半径划弧相交于点  $O$ ;

(2) 以点  $O$  为圆心,  $a$  为半径划弧  $AB$ , 则  $\widehat{AB}$  与前后两已知圆外连接于点  $A, B$ 。

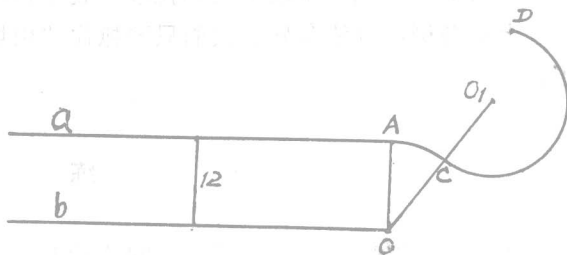


例 3、已知圆弧  $CD$  (圆心为  $O_1$ , 半径为  $R_1 = 10\text{mm}$ ) 和一直线  $a$ , 试划一个半径为  $R = 12\text{mm}$  的圆弧与直线  $a$  和  $\widehat{DC}$  直连接。

分析: 问题是确定连接中心  $O$ 。由于

$OO_1 = R_1 + R = 22$ 。并且, 中心  $O$  到直线  $a$  的距离  $R = 12$ 。于是, 连接的方法如下:

(1) 作与已知直线  $a$  的距离等于  $12$



的平行线  $b$ ;

(2) 以点  $O_1$  为圆心,  $2r_1$  为半径划弧交直线  $b$  于点  $O$ ;

(3) 连点  $O, O_1$  交  $\odot O_1$  于  $C$ ;

(4) 以点  $O$  为圆心,  $OC$  为半径划弧相交直线  $a$  于点  $A$ , 则  $\widehat{CA}$  与直线  $a$  连接于点  $A$ , 与  $\odot O_1$  连接于点  $C$ , 即点  $A, C$  为切点。

例 4、划一直线与两圆弧连接 (即作两圆的内、外公切线)。

划法一: 简划法

如图: 用直尺对准两圆的边缘拉线, 即得两圆的内公切线  $EF$  和  $GH$ ; 外公切线  $AB$  和  $CD$ 。

由作图可知:

外公切线长相等:  $AB = CD$ ;

内公切线长相等:  $EF = GH$

划法二: (精确度要求较高时才用这种划法)

已知两圆  $\odot O_1$  和  $\odot O_2$ , 它们的半径为  $r_1$  和  $r_2$ , 并且  $r_2 > r_1$  (符号 “ $>$ ” 表示大于), 试作此两圆的内、外公切线。

外公切线的划法:

(1) 以点  $O_2$  为圆心,  $r_2 - r_1$  的长为半径划一辅助圆;

(2) 过点  $O_1$  作辅助圆的切线  $O_1C$  (点  $C$  为切点);

(3) 连结点  $O_2, C$  延长交  $\odot O_2$  于点  $B$ ;

(4) 过点  $O_1$  作  $O_1A \parallel BC$ , 使  $O_1A$  交  $\odot O_1$  于点  $A$ ;

(5) 连结点  $A, B$ , 由作图可知:  $AB \perp O_1A$ ,  $AB \perp O_2B$ , 就是说,  $AB$  既是  $\odot O_1$  的切线, 又是  $\odot O_2$  的切线。

因此,  $AB$  是两圆的外公切线。

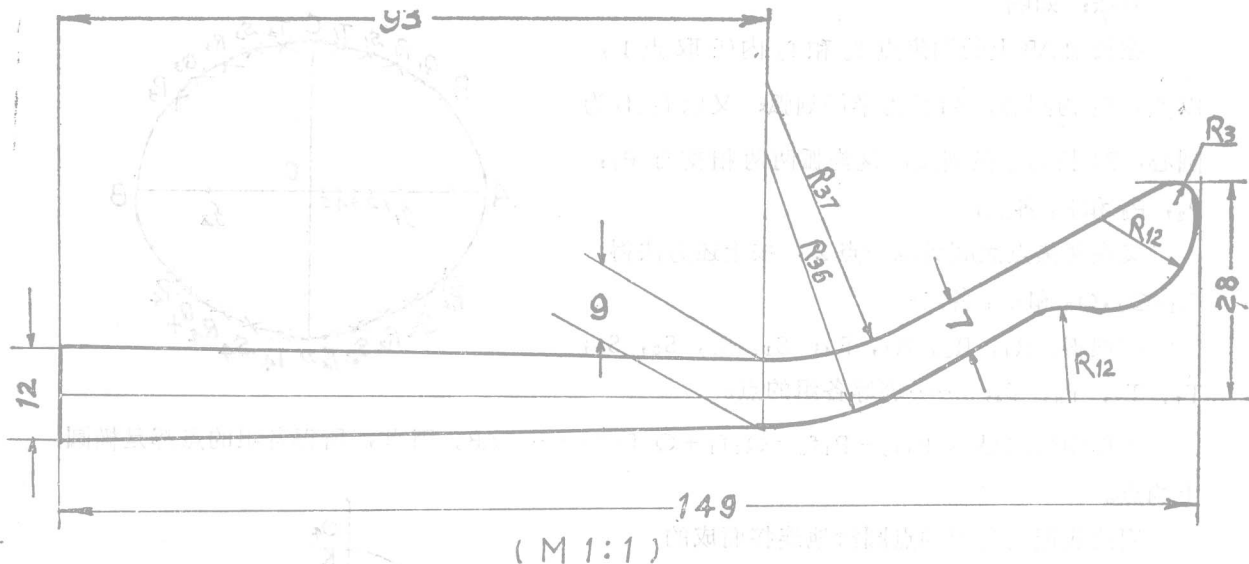
内公切线的划法, 学员自行完成。

工人师傅常说 “对准两弧边拉线” 就是作两圆的内、外公切线。

上举各例, 划法各异。我们只要抓住 “相切” 这个本质及其基本规律, 问题就不难解决了。

## 练习

1、广东 70 型人力水稻插秧机的活动秧夹展开图如下。试依图中所注尺寸复制一图。



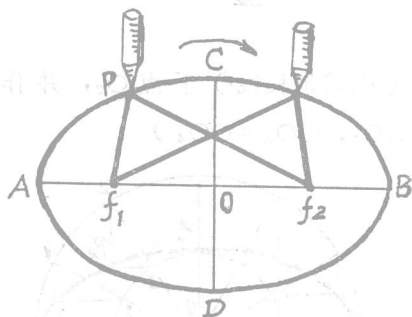
2、已知直线  $a \parallel b$ ,  $\angle 1 = 42^\circ$  试求其它角的度数。

#### 四、椭圆的画法

在生产实践中,常遇到铁板和圆管倾斜地焊接在一起,接口就是椭圆(即常说的扁圆),焊接前必须按照图纸尺寸划出椭圆曲线。工人师傅常用如下的方法。

##### 划法一:套绳法

如图:取绳长等于  $AB$  其两端分别固定于两定点  $f_1$  和  $f_2$  上。

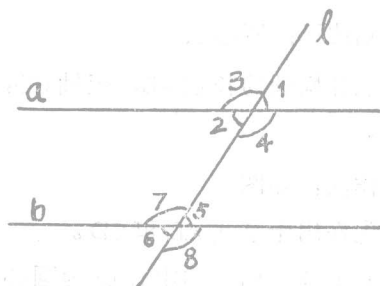


同理得到:  $Of_2^2 = OA^2 - OC^2$ ,

于是  $Of_1^2 = Of_2^2 = OA^2 - OC^2$ 。

##### 划法二:分割长轴定点描迹法

已知长轴  $AB$  上的两焦点  $f_1$  和  $f_2$ , 试作一椭圆。



以动杆(铅笔之类)套在绳内并拉紧,移动一周,则动点  $P$  (笔尖)在平面上所划出的曲线就是椭圆。 $AB$  叫椭圆的长轴,  $CD$  叫椭圆的短轴,定点  $f_1$  和  $f_2$  叫焦点。

由作图可知:  $Pf_1 + Pf_2 = AB$ ;

当动点  $P$  到达点  $C$  时,则有:

$$Of_1^2 = f_1C^2 - OC^2 \quad (\text{见第四章勾股定理})$$

但是  $f_1C + f_2C = AB$ , 又  $f_1C = f_2C = OA$ 。

$$\text{所以} \quad Of_1^2 = OA^2 - OC^2$$