

幾何學講義 平面圖

上野清華

幾何學講義

平面部

上野清著

張廷華譯

江苏工业学院图书馆
藏书章

商務印書館發行

民國二十一年一月二十九日
 敝公司突遭國難總務處印刷
 所編譯所書棧房均被炸燬附
 設之涵芬樓東方圖書館尙公
 小學亦遭殃及盡付焚如三十
 五載之經營墮於一旦迭蒙
 各界慰問督望速圖恢復詞意
 懇摯銜感何窮敝館雖處境艱
 困不敢不勉爲其難因將需用
 較切各書先行覆印其他各書
 亦將次第出版惟是圖版裝製
 不能盡如原式事勢所限想荷
 鑒原謹布下忱統祈垂督

上海商務印書館謹啓

版 權 所 有 翻 印 必 究

中華民國二十一年四月九日
 中華民國二十二年五月國難後第一版

(一四七九)

幾何學講義 平面一册

每册定價大洋叁元

外埠酌加運費匯費

原 著 者 上 野 清

譯 述 者 張 廷 華

校 訂 者 趙 壽 孝 天
 趙 略 師 良

印 發 行 者 兼 商 務 印 書 館
 上 海 河 南 路

發 行 所 商 務 印 書 館
 上 海 及 各 埠

上野清

幾何學講義 平面部

原序

予於編纂此講義錄之始。先蒐集平日之草稿、札記、考試紙、質問等。又取英美德法幾何學書數十種。并幾何學歷史。與之對照。以定例題之秩序。次乃解釋是等之例題。參考英國幾何學教授改良協會所著幾何學書之順序。而設公理、定義、定理等。由是區別例題之種類。俾讀者便於檢索。分全書爲五編。每編又分爲若干節。而插入同類之例題。且於各編之終。視定理所漏凡重要而有名之例題。均分類記入之。

然後定編纂之次序。第一爲緒言講述幾何學中各項之緣起。爲論理學之應用。第二以簡潔之講述。成各編之定理。第三從事於例題之解釋。

至編纂之目的。則以供自修、試驗、參考三者之用也。集多種幾何學書之例題於本書。而引用本書中之定義、公理、定理及例題以解釋之。欲使讀他種幾何書者。可藉此書以一一研究。蓋本書對於初學者。直冀其用爲幾何學例題之字典也。

雖然。予之解釋。其或涉於煩雜。或失諸簡畧。在所不免。故深望讀者檢閱例題之後。考求其他之良解較勝於予之解釋者。又望自修者先取例題潛心研究之。至萬不得已。然後翻閱予之解釋。并望於例題之困難者。姑置於後。而先取其簡易者一讀之。

易解而易忘者。幾何學之例題。難考而易忘者。亦幾何學之例題。有於難解之題。見他人之解釋。則驚其淺易者。有於苦心考究之題。易時觀之。恍如初遇。竟不能解者。凡此諸弊。皆原因於不能分別定理及例題之秩序也。本書蒐集例題。種類咸備。同時又明瞭其分類。欲使初習幾何學者。深知幾何學之趣味。反覺易解而難忘。易考而難忘者。亦幾何學之例題也。予之希望若此。使此希望而能達於萬一也。則幸甚矣。

講述者識

幾何學講義

目次

緒論

命題，定義，公理，普通公理，定理，定理之二部分，
本定理，對偶定理，逆定理，裏定理，四定理之集合，
複假設，轉換法，一致法，推論，公法，問題.....1-9

平面部

第壹編 直線

定義	點，線，面，體，直線，平面，幾何學，幾何公理.....	10-12
第一節 (一點上之角)	角，隣角，直角，垂線，銳角及鈍角，餘角，補角，對頂角，定理自一至三.....	12-18
第一節之例題	自1至11.....	18-21
第二節 (三角形)	平面圖形，全等形，平面直線圖形，四角形，三角形，等脚三角形，直角三角形，鈍角三角形，銳角三角形，定理自四至十五.....	21-34
第二節之例題	自12至56.....	35-48
第三節 (垂線)	距離，定理十六.....	48-49
第三節之例題	57及58.....	50

第四節 (平行線) 平行直線, 交線之角, 外角, 內角, 錯角, 應角, 幾何公理, 定理十七及十八.....	50-53
第四節之例題 自 59 至 65.....	53-56
第五節 (直線圖形之角) 多角形, 凸多角形, 凹多角形, 正多角形, 定理自十九至二十一.....	56-59
第五節之例題 自 66 至 105.....	60-71
第六節 (平行四邊形) 平行四邊形, 梯形, 矩形, 菱形, 正方形, 定理自二十二至二十四.....	72-74
第六節之例題 自 106 至 136.....	74-82
第七節 (正射影) 正射影, 定理自二十五至二十七.....	83-85
第七節之例題 自 137 至 161.....	85-94
第八節 (軌跡) 軌跡, 軌跡之證明法, 定理二十八及二十九, 軌跡之交截, 定理三十及三十一.....	94-100
第八節之例題 自 162 至 168.....	100-101
第壹編例題 (三角形之線) 垂線, 中線, 角之二等分線, 例題自 169 至 193.....	102-110
(三角形之心) 外心, 內心, 傍心, 垂心, 重心, 例題自 194 至 214.....	110-117
(極大極小) 例題自 215 至 220.....	117-120

第貳編 圓

定義 圓, 中心, 半徑, 直徑.....	121
第一節 (根原之性質) 定理自一至三.....	121-124
第一節之例題 自 221 至 237.....	124-129

第二節 (中心角及扇形之角) 弧, 中心角, 扇形, 扇形之角, 定理四.....	129-130
第二節之例題 238 及 239.....	131
第三節 (弦) 弦, 定理自五至八.....	131-134
第三節之例題 自 240 至 276.....	135-143
第四節 (弓形之角) 弓形, 圓周角, 弓形之角, 內切及外切, 定理自九至十一.....	143-147
第四節之例題 自 277 至 412.....	147-184
第五節 (切線) 割線, 割線之極限位置, 切線, 切點, 定理自十二至十四.....	185-188
第五節之例題 自 413 至 510.....	189-213
第六節 (兩圓之關係) 相切及相交, 兩圓之外切, 相交, 內切, 定理自十五至十七.....	213-217
第六節之例題 自 511 至 578.....	218-238
第七節 (圓之內切及外切圖形) 內切及外切, 直線圖形之內切圓及外切圓, 定理十八及十九.....	238-240
第七節之例題 自 579 至 604.....	241-247
第貳編例題 (三角形之切圓及心) 三角形之外切圓, 內切圓 傍切圓, 例題自 605 至 655.....	247-263
(垂足三角形) 例題自 656 至 667.....	264-267
(九點圓) 例題自 668 至 676.....	267-271
(西摩松線) 例題自 677 至 630.....	271-276
(兩圓之交角) 例題自 691 至 698.....	276-279
(極大極小) 例題自 699 至 711.....	280-285

第叁編 面積

面積之定義	面積，兩圖形之相等，普通公理(d)，普通公理(e)，幾何公理(1)，幾何公理(1)之推衍	286
第一節 (平行四邊形)	三角形及平行四邊形之高，定理自一至三	287-289
第一節之例題	自 712 至 799	289-319
第二節 (矩形及正方形)	矩形及正方形，有限直線之內分及外分，有限二直線上之矩形，有限一直線上之正方形，定理自四至八 代數二定理自四至八	319-324
第二節之例題	自 800 至 822	325-331
第三節 (三角形之關係)	直角三角形，鈍角及銳角三角形，定理自九至十一	332-334
第三節之例題	自 823 至 933	334-366
第四節 (圓之關係)	弦之內分及外分，割線，切線，定理十二及十三	366-368
第四節之例題	自 934 至 1020	368-393
第叁編例題 (三角形之面積及切圓)	三角形之面積，三角形之內切圓，外切圓，傍切圓 他之切圓，例題自 1021 至 1032	393-397
(根軸)	二圓之根軸，相等切線之軌跡，三圓之根軸，例題自 1033 至 1039	397-400
(諸點之重心)	三角形之頂及重心，多角形之角頂，諸點之重心 例題自 1040 至 1052	400-405
(極大極小)	例題自 1053 至 1081	405-412

第肆編 比例

比例之定義 量及數之記號, 比, 倍量之夾法, 比之記號, 兩等比, 兩不等比, 比例, 比例之記法, 外項, 中項, 相應項, 連比例, 比例中項, 比例第三項, 反比, 複比, 平方比, 立方比, 注意, 複比, 平方比及立方比之略記 法.....	413-415
第一節 (普通之量) 定理自一至十三.....	415-420
第二節 (幾何學之量) 調和比例, 調和列點, 定理自十四 至十六.....	420-423
第二節之例題 自 1082 至 1087.....	423-424
第三節 (相似形) 相似直線圖形, 相似中心, 定理自十七 至二十三.....	425-430
第三節之例題 自 1088 至 1217.....	431-473
第四節 (面積) 定理自二十四至三十.....	474-479
第四節之例題 自 1218 至 1426.....	479-562
第五節 (軌跡) 定理三十一及三十二.....	563-564
第五節之例題 自 1427 至 1444.....	565-570
第肆編例題 (三角形之切圓) 例題自 1445 至 1509.....	571-591
(橫截線) 例題自 1510 至 1528.....	592-599
(腦形) 例題自 1529 至 1532.....	600-601
(方程式) 例題自 1533 至 1536.....	602-603
(極大極小) 例題自 1537 至 1542.....	604-605

第 五 編 作 圖

緒論 定木, 兩脚器, 公法 (1), (2), (3).....	606
第一節 (直線) 問題自一至十一.....	606-611
第一節之例題 自 1543 至 1576.....	612-619
第二節 (圓) 問題自十二至二十一.....	619-623
第二節之例題 自 1577 至 1621.....	623-633
第三節 (面積) 問題自二十二至二十八.....	633-638
第三節之例題 自 1622 至 1654.....	638-646
第四節 (比例) 問題自二十九至三十二.....	647-648
第四節之例題 自 1655 至 1685.....	649-657

上 野 清
幾 何 學 講 義
平 面 部

緒 論

1. 命題 就一事物而敘述之。謂之命題。

例如「順天者中國之首府也」爲命題。

若單曰「中國之首府也」則何處爲中國之首府乎。便爲不完全之文詞矣。凡敘述一事而文詞不完全者。決不能謂之命題。卽命題必爲完全之文詞。

又如「天氣晴和故海上靜穩」爲命題。

此例若單曰「天氣晴和」或單曰「海上靜穩」亦爲意義完全之文詞。故可謂之命題。

2. 幾何學之命題 上所示之例。爲普通之命題。而幾何學之命題。則其所敘述者。以推得其學理及其應用爲限。

幾何學之命題。共分六種如次。

定義。公理。定理。推論。公法。問題。

此六種。依次講述如次

3. 定義 就一事物而敘述其特別性質之命題曰定義。但其敘述。至其事物可與他事物判然區別而止。而不及其他之事項。

定義之命題。確定事物之分限。甚為嚴正。例如於字典中解釋一文字之意義。必有與他文字判別者。方為其文字之定義。若於既判別後更敘其餘事。則非定義而為說明。

4. 公理 由吾人平生之經驗而認為真確之命題曰公理。

學幾何學。不先明公理。終不能踐修業之途。此與無資本者不能經營商業同。

公理分普通公理及幾何公理二種。次所示者。為普通公理。其幾何公理。俟漸入幾何學之門而示之。

5. 普通公理 不僅關於幾何學而關於一切數量之公理也。如次之右方為代數式。可與左方對照。

(普通公理)

(普通公理之代數式)

- | | |
|-----------------------|--|
| (a) 全量大於其壹部分。 | (a) $6 + 4 > 6$ 或 > 4 |
| (b) 全量等於各部分之和 | (b) $10 = 6 + 4$ |
| (c) 等於同量之諸量。必互
相等。 | (c) $a = b, a = c$ 。則
$b = c$ 。 |
| (d) 等量各加等量。其和相
等。 | (d) $a = b, m = n$ 。則
$a + m = b + n$ |

(e) 等量各減等量。其差相等。

(f) 不等量各加等量。其和不等。大量之和。仍大於小量之和。

(g) 不等量各減等量。其差不等。大量之差仍大於小量之差。

(h) 等量之半必相等。

(e) $a = b, m = n$ 則
 $a - m = b - n$ 。

(f) $a > b, m = n$ 則
 $a + m > b + n$ 。

(g) $a > b, m = n$ 則
 $a - m > b - n$ 。

(h) $a = b$ 則 $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$ 。

6. 定理 由已知之命題而證明其合理之命題。曰定理。

其已知之命題。即定義與公理及已知之定理。而已知之定理。則僅由公理與定義而證得其真確者也。

7. 定理之二部分 凡定理。必由假設與終決二部分而成。

假設者。假定為已知之事實也。

終決者。由假設而生之事實。為定理之結果也。

例如算術中有云「兩數 5 及 3 其積為 15」。此為定理。而「兩數 5 及 3」為假設。「其積為 15」為終決。故假設為已知之事實。而終決即其答也。

故終決者。爲由已知之事實而用公理或已知之定理所推求而得之事實。此推求之法。謂之證明。故證明者。即所以確示其定理之真者也。

例如由「兩數5及3」之假設而用乘法之定義。以證明其 $5 \times 3 = 6 + 5 + 5 = 15$ 。而得「其積爲15」之終決。又史云房玄齡善謀。杜如晦善斷。故以貞觀政治爲定理。則玄齡其假設者。而如晦其終決者也。

8. 本定理 示定理之模範。

A 爲 B 則 C 爲 D.....(1)

「A 爲 B」爲假設。而「C 爲 D」爲終決。

9. 對偶定理 定理(1)爲合理。則次之定理(2)亦必合理。

C 非爲 D。則 A 非爲 B.....(2)

(2)稱爲(1)之對偶定理。又(1)稱爲(2)之對偶定理。即(1),(2)互爲對偶定理。

例如 A 爲 B。則必 C 爲 D。若 C 非 D。則 A 不能爲 B 明矣。即「砂糖(假設)必甘(終決)」。故此對偶若云「不甘者非砂糖」。必合於理。

10. 逆定理 假設與終決互相交換之兩定理。互稱爲逆定理。

(1)之逆定理。即次之(3)。又(1)即(3)之逆定理

C 爲 D。則 A 爲 B.....(3)

本定理合於理。其逆定理未必合於理。即(1)爲合理。(3)未必爲合理。

例如「砂糖必甘」之逆爲「甘物必砂糖」，必不合理。何則。以甘物除砂糖外。尚有飴糖及甘酒等物也。

11. 裏定理 (3) 之對偶如次

A 非爲 B 則 C 非爲 D.(4)

(4) 稱爲(1)之裏定理

12. 四定理之集合 記前之四定理。

本定理 A 爲 B 則 C 爲 D. (1),

對偶定理 C 非爲 D 則 A 非爲 B. (2), [即(4)之逆]

逆定理 C 爲 D 則 A 爲 B. (3), [即(2)之裏]

裏定理 A 非爲 B 則 C 非爲 D. (4), [即(3)之對偶]

本定理若合理。則其對偶定理亦必合理。(見9款)。故(1)能合理。則(2)必合理。又(3)能合理。則(4)必合理。

又本定理雖合理。其逆定理或不能合理。(見10款)。故(1)能合理。而(3)不能合理。即與(3)同時合理之(3)之對偶定理(4)。亦不能合理。是則(1)能合理。其裏定理(4)。不能合理。

由是本定理雖合理。其裏定理或不能合理。

由是(1),(2),(3),(4)之內。(1)與(2)同時合理。又(3)與(4)同時合理。而(1),(2)與(3),(4)合理與否。則不相關係。故在幾何學之證明。必於此四定理之內。證明其不相關係之二定理方爲完備。即證明(1)與(3)。或(1)與(4)。或(2)與(3)。或(2)與(4)。之二定理能合理。則他之二定理。亦同時合理。

如次例爲(1),(2)合理而(3),(4)不合理。

本定理 砂糖必甘。 (1),

對偶定理 不甘者非砂糖。 (2),

逆定理 甘者必爲砂糖。 (3),

裏定理 非砂糖則不甘。 (4),

又如次例則(1),(2),(3),(4)皆能合理。

本定理 土曜日之次日爲日曜日。 (1),

對偶定理 非日曜日則非土曜日之次日。 (2),

逆定理 日曜日爲土曜日之次日。 (3),

裏定理 非土曜日之次日則非日曜日。 (4),

13. 複假設 有時一定理中有兩三之假設者則爲複假設。若以其複假設之一與終決交換即爲本定理之逆定理。

例如 A 爲 B (假設) } 則 E 爲 F
 C 爲 D (假設) }

此逆定理如次。

A 爲 B } 則 C 爲 D
 E 爲 F }

及 C 爲 D } 則 A 爲 B
 E 爲 F }

此逆定理亦不能以本定理合理即謂之合理。